МАТРИЧНЫЙ АППАРАТ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ, НЕ ИМЕЮЩИХ СИММЕТРИИ

С.А. РОДИОНОВ, доктор технических наук - ИТМО

Рассмотрено применение матриц второго порядка для описания характеристик оптических систем в самом общем случае, не имеющих свойств симметрии. Показано, что продольные отрезки, такие как дефокусировки, продольные аберрации в окрестности произвольного луча, положения зрачков описываются симметричной матрицей, увеличения в общем случае несимметричной матрицей, а размеры и ориентация областей поля, зрачка, световых габаритов – симметричными положительно определенными матрицами. При помощи приведения матриц к диагональной форме продемонстрирован геометрический смысл соответствующих понятий.

Матричный аппарат достаточно давно и плодотворно применяется в самых различных разделах оптики [1], в частности, для описания свойств оптических систем в параксиальной (гауссовой) области, для представления поляризационных приборов, расчета тонкопленочных покрытий. В основном для этих целей применяются матрицы второго порядка (2×2). Гораздо менее известно, но столь же плодотворно использование матриц 2×2 для описания свойств децентрированных оптических систем. Некоторые аспекты такого применения были рассмотрены в работе автора [2]. В настоящей статье эта тема получает дальнейшее развитие. Мы рассмотрим применение матриц 2×2 для описания продольных отрезков, например, продольных аберраций, положения зрачков, затем для описания увеличений и, наконец, для описания формы и размеров зрачков, полей предмета и изображения. В каждом случае мы начнем рассмотрение с центрированных систем, где соответствующие характеристики трактуются как скалярные величины, затем рассмотрим системы с двум плоскостями симметрии, где естественно применение пары чисел по одному для каждого сечения и, наконец, перейдем к общему случаю не центрированных систем без особых свойств симметрии, в которых рассматриваемые характеристики уже представляются через матрицу 2×2.

1. МАТРИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ОТРЕЗКОВ

Понятие продольных отрезков широко используется для описания дефокусировок, продольных аберраций, положений зрачков. Для центрированных систем (для пучков с круговой симметрией) это понятие совершенно очевидно и определяется как расстояние от некоторой опорной плоскости ОП до точки пересечения луча с осью (см. рис.1). Какой именно луч имеется в виду, зависит от ситуации. В случае дефокусировок это нулевой (параксиальный) луч, для случая продольных аберраций это действительный луч осевого пучка, для определения положения зрачков – главный луч. Для нас важным является то, что продольный отрезок d связывает линейную координату луча h в опорной плоскости и угловую α:

$d = h / \alpha$ или $h = d\alpha$ (1)

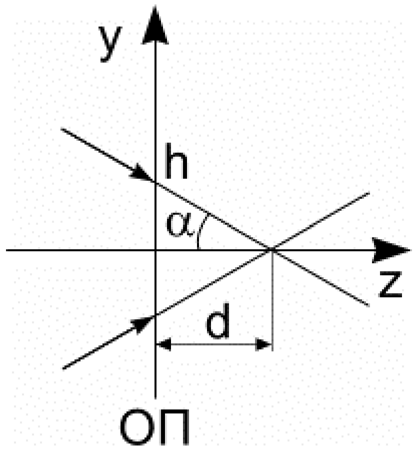

Рис. 1. Продольный отрезок в случае осевой симметрии.

В случаях, когда имеются две плоскости симметрии, например, для окрестности главного луча, лежащего в меридиональной плоскости центрированной оптической системы, также естественно вытекает определение двух продольных отрезков, каждого в своей плоскости симметрии (рис.2):

$$h_x = d_x \alpha_x,$$
$$h_y = d_y \alpha_y. \quad (2)$$

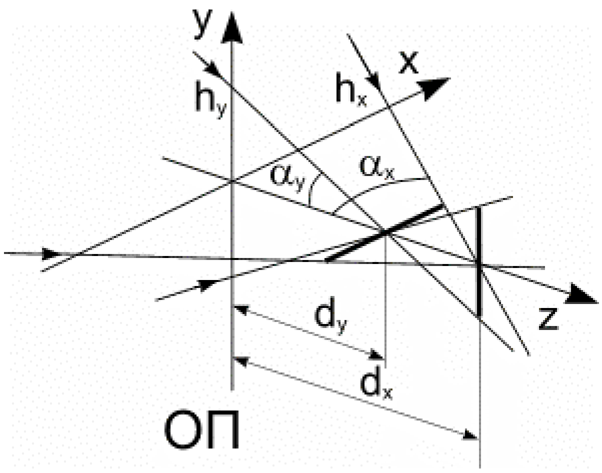

Рис. 2. Продольные отрезки в системах с двумя плоскостями симметрии

Если рассматривать весь бесконечно узкий пучок лучей с двумя плоскостями симметрии, то удобно произвольный луч этого пучка характеризовать парой линейных координат *x,y* – координатами точки пересечения его с опорной плоскостью *Oxy* и парой угловых координат, в качестве которых естественно принять направляющие косинусы *X* и *Y* орта луча с осями *x* и *y* соответственно:

$$X = \cos\theta_x,$$
$$Y = \cos\theta_y. \quad (3)$$

Для лучей, лежащих в меридиональной и в сагиттальной плоскостях, как нетрудно видеть $X = 0, Y = -\alpha_y$ и $X = -\alpha_x, Y = 0$. С введением новых координат уравнения (2) становятся справедливыми для любого луча пучка, имеющего две плоскости симметрии и принимают следующий вид:

$$x = -d_x X, \qquad y = -d_y Y. \tag{4}$$

Если теперь перейти к общему случаю пучка, не имеющего симметрии, то легко заключить, что для этого общего случая уравнения (4) должны быть дополнены смешанными членами, то есть содержащими Y в уравнение для x и X в уравнение для y:

$$x = -(d_{xx} X + d_{xy} Y), \qquad y = -(d_{yx} X + d_{yy} Y). \tag{5}$$

В предыдущих уравнениях уже легко видна матрица **D** продольных отрезков, вытекающая из матричной записи уравнений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} d_{xx} d_{xy} \\ d_{yx} d_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -\mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{xx} d_{xy} \\ d_{yx} d_{yy} \end{pmatrix}$ – матрица (2×2) продольных отрезков, показывающая положение фокусов пучка относительно опорной плоскости Oxy.

В случае пучка с двумя плоскостями симметрии эта матрица становится диагональной: $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_x & 0 \\ 0 & d_y \end{pmatrix}$, а в случае пучка с круговой симметрией – единичной матрицей, умноженной на скаляр: $\mathbf{D} = \mathbf{I} \cdot d$.

В общем случае, когда пучок не имеет симметрии, матрица **D** продольных отрезков не диагональная, но, как можно показать, она обязательно должна быть симметричной. Это следует из того, что пучок лучей, подчиняющийся законам геометрической оптики, должен быть нормальной конгруэнцией [3], то есть лучи должны быть нормалями к волновому фронту. Для лучей, близких к оси пучка (оси z), это условие эквивалентно тому, что их направляющие косинусы равны произведению симметричной матрицы кривизны волнового фронта на вектор линейных координат [4]:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \rho_{xx} \rho_{xy} \\ \rho_{yx} \rho_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z''_{xx} z''_{xy} \\ z''_{yx} z''_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где элементы матрицы кривизны представляют собой вторые частные производные от деформации волнового фронта относительно плоскости по координатам x и y. Симметричность матрицы кривизны, то есть вторых производных следует из того факта, что смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования. Сравнивая выражения (6) и (7), легко заметить, что матрица продольных отрезков является обратной по отношению к симметричной матрице кривизны волнового фронта и, следовательно, также должна быть симметричной. Заметим, что несимметричная матрица продольных отрезков какого-либо пучка свидетельствует о наличии “скрученности” такого пучка, который не имеет оптического смысла и которому не может соответствовать никакой волновой фронт.

Для прояснения физического смысла симметричной недиагональной матрицы продольных отрезков воспользуемся приведением ее к диагональной форме [5] путем следующей факторизации:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

где $c = \cos\varphi, s = \sin\varphi$ – элементы собственных векторов матрицы **D**, а $d_{1,}d_2$ – собственные числа матрицы **D**. Отсюда ясно, что в общем случае недиагональная матрица дефокусировок описывает пучок с двумя плоскостями симметрии, повернутый на угол φ вокруг оси z (см. рис. 3); d_1 и d_2 – продольные отрезки этого повернутого пучка, при этом дефокусировка, определяющая положение кружка наименьшего рассеяния относительно опорной плоскости:

$$(d_1 + d_2)/2 = (d_{xx} + d_{yy})/2 = d \qquad (9)$$

астигматизм – расстояние между первым вторым фокусами пучка:

$$d_1 - d_2 = \sqrt{(d_{xx} - d_{yy})^2 + (2d_{xy})^2} = a \qquad (10)$$

а угол φ – поворота пучка определяется следующим выражением:

$$\mathrm{tg}(2\varphi) = \frac{2d_{xy}}{d_{xx} - d_{yy}} \qquad (11)$$

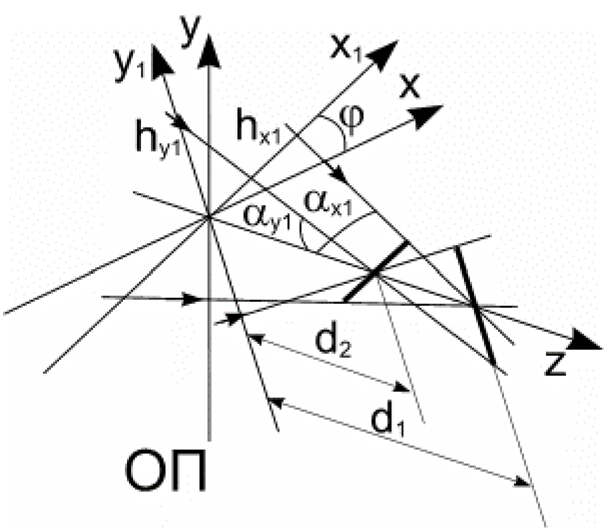

Рис. 3. Продольные отрезки в системах без симметрии

Таким образом, мы можем для любых оптических систем использовать понятие продольных отрезков в виде соответствующей симметричной матрицы второго порядка **D**. Так, для окрестности любого луча мы можем рассчитать, используя дифференциалы лучей [6], матрицу продольных дефокусировок, определить затем вторые производные от волновой аберрации для соответствующей точки зрачка, а после факторизации матрицы дефокусировок найти положение кружка наименьшего рассеяния, величины астигматизма и угла ориентации пучка. Мы можем также определить матрицу положения зрачка как изображения апертурной диафрагмы в системах без симметрии, хотя изображения в строгом смысле может не существовать. Хотя наше рассмотрение базировалось на анализе бесконечно малой окрестности действительного луча, принятого за ось z, легко можно распространить понятие продольных отрезков и на конечную окрестность, что позволяет использовать понятие продольных аберраций (в матричной форме) широкого пучка, не имеющего симметрии.

2. МАТРИЧНОЕ ОПИСАНИЕ УВЕЛИЧЕНИЙ

Как и для понятия продольных отрезков, определение поперечного (линейного) увеличения в случае центрированных систем очевидно и тривиально:

$$v = \frac{y'}{y} \text{ или } y' = v \cdot y, \qquad (12)$$

где y, y' – величины предмета и изображения соответственно.

Для систем с двумя плоскостями симметрии с различными значениями увеличений в различных сечениях (анаморфотах) увеличения определяются аналогично (12), но отдельно для каждого сечения (рис.4) :

$$\begin{matrix} v_x = \dfrac{x'}{x} \\ v_y = \dfrac{y'}{y} \end{matrix}, \text{ или } \begin{matrix} x' = v_x \cdot x \\ y' = v_y \cdot y \end{matrix}, \qquad (13)$$

где v_x, v_y – увеличения в соответствующих сечениях.

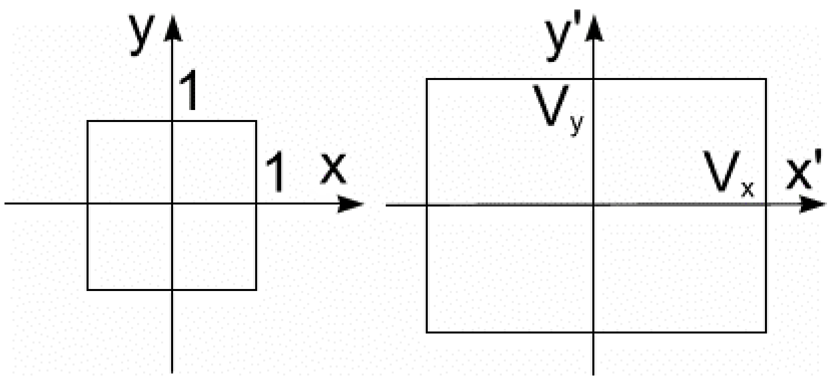

Рис. 4. Увеличение и анаморфирование в системах с двумя плоскостями симметрии

Рассуждая аналогично тому, как при анализе продольных отрезков, получим, что в оптических системах, не имеющих симметрии, выражение для связи координат точек на изображении и на предмете приобретает наиболее общий вид (рис.5):

$$x' = v_{xx} \cdot x + v_{xy} \cdot y,$$
$$y' = v_{yx} \cdot x + v_{yy} \cdot y, \tag{14}$$

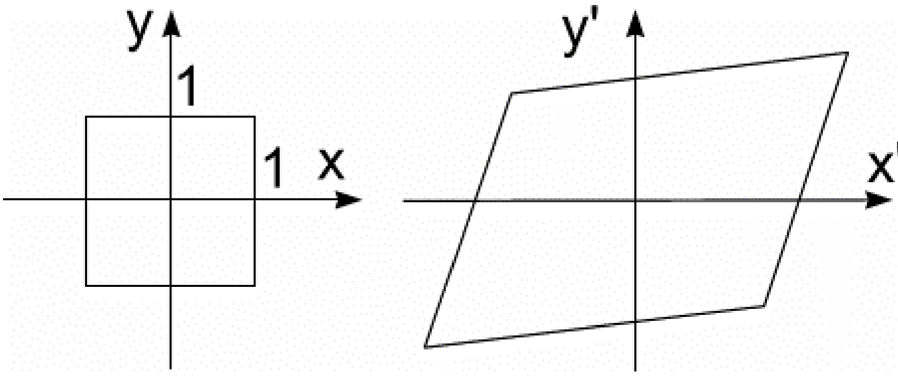

Рис. 5. Увеличение (преобразование координат) в общем случае систем без симметрии

или, в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{xx} & v_{xy} \\ v_{yx} & v_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{xx} & v_{xy} \\ v_{yx} & v_{yy} \end{pmatrix}$ – матрица увеличений, описывающая передачу масштабов в общем случае систем, не имеющих симметрии. Для систем с двумя плоскостями симметрии матрица увеличений становится диагональной, для центрированных систем - единичной матрицей, умноженной на скаляр, совершенно аналогично тому, что происходит с матрицей продольных отрезков, однако, в отличие от последней, матрица увеличений не обязана быть симметричной. Тем не менее, ее также можно привести к диагональной форме путем следующей факторизации:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{xx} & v_{xy} \\ v_{yx} & v_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' & s' \\ -s' & c' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $c = \cos\varphi, s = \sin\varphi, c' = \cos\varphi', s' = \sin\varphi'$.Сравнивая выражения (16) и (8), можно видеть, что при диагонализации матрицы увеличений, в отличие от матрица продольных отрезков, матрицы поворота слева и справа от диагональной описывают повороты в общем случае на различные углы. Из (16) видно, что действие оптической системы с матрицей увеличений общего вида можно представить в виде последовательности трех элементарных преобразований:

- поворота на угол φ, описываемого умножением на матрицу $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$;

- анаморфирования с увеличениями в двух взаимно-перпендикулярных направлениях v_1 и v_2 соответственно, описываемого умножением на диагональную матрицу $\begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}$;
- второго поворота в обратную сторону на угол $-\varphi'$, описываемого умножением на матрицу $\begin{pmatrix} c' & s' \\ -s' & c' \end{pmatrix}$.

Если увеличения v_1 и v_2 имеют разные знаки, кроме анаморфирования происходит также зеркальное оборачивание изображения.

Выражения для параметров элементарных преобразований могут быть легко получены из (16):

$$\begin{aligned} & tg(\varphi'+\varphi) = \frac{v_{xy}+v_{yx}}{v_{yy}-v_{xx}}; tg(\varphi'-\varphi) = \frac{v_{xy}-v_{yx}}{v_{xx}+v_{yy}}; \\ & v_2 - v_1 = (v_{yy}-v_{xx})\cos(\varphi''+\varphi) + (v_{xy}+v_{yx})\sin(\varphi'+\varphi); \\ & v_2 + v_1 + (v_{yy}+v_{xx})\cos(\varphi''-\varphi) + (v_{xy}-v_{yx})\sin(\varphi'-\varphi). \end{aligned} \tag{17}$$

Полезным является также матричное описание продольных увеличений в оптических системах, не имеющих симметрии. Рассматривая матричные дефокусировки, введенные в предыдущем разделе, в пространствах предметов $\mathbf{D}$ и изображений $\mathbf{D'}$ соответственно, приходим к выводу, что соотношение между ними определяется матричным продольным увеличением $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{D'} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \ . \tag{18}$$

Интересно отметить, что между поперечным (линейным) и продольным увеличениями в матричной форме существует соотношение, аналогичное известному соотношению между соответствующими скалярными величинами (приведем это соотношение без доказательства):

$$\mathbf{D'} = \frac{n'}{n} \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^T , \tag{19}$$

где n и n' – показатели преломления среды в пространствах предметов и изображений соответственно, $\mathbf{V}$ – матрица поперечных (линейных) увеличений, T – индекс транспонирования.

3. МАТРИЧНОЕ ОПИСАНИЕ ОБЛАСТЕЙ

Последняя тема, которую мы рассмотрим – это матричное описание различных областей в децентрированных системах. Рассматриваемые области могут быть полями (на объекте и изображении), областями зрачков, световыми габаритами диафрагм и т.п.

Начнем, как и в предыдущих разделах, с центрированных систем. Поскольку в последних все области представляют собой круги, концентричные оптической оси, единственным параметром, необходимым и достаточным для описания соответствующей области является ее радиус (полудиаметр или апертура) A (см. рис.6). В системах с двумя плоскостями симметрии, когда размеры области могут быть различными в двух взаимно-перпендикулярных направлениях, необходимо два параметра A_1 и A_2 (см. рис.7). Чтобы не отвлекаться на дискуссию о способах описания формы области, положим ее эллиптической, если это не так, достаточно указать признак формы – эллиптическая или прямоугольная, на описании размеров и ориентации области это никак не сказывается.

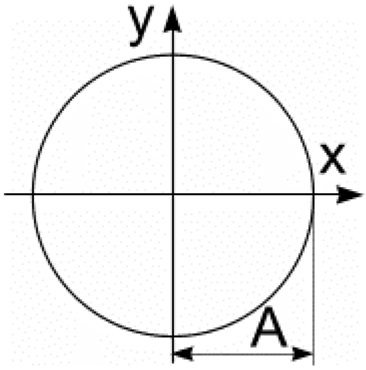

Рис. 6. Описание световых габаритов в центрированных системах.

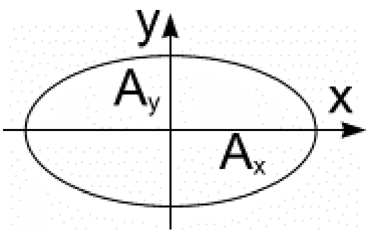

Рис. 7. Эллиптическая область в системах с двумя плоскостями симметрии

Переходя к общему случаю систем, не имеющих симметрии, как и в предыдущих разделах, приходим к выводу, что для описания формы области необходимо иметь матрицу, которая в этом случае из вполне очевидных соображений должна быть симметричной и, кроме того, положительно определенной:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где $c = \cos(\varphi), s = \sin(\varphi)$, φ – угол ориентации области относительно осей координат, $A_{1,} A_2$ – размеры области (полуоси) в главных сечениях (рис.8).

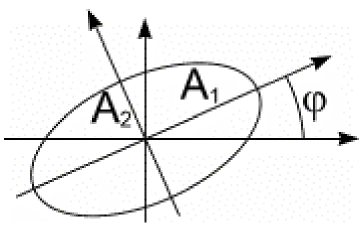

Рис. 8. Общий случай систем без симметрии – область повернута на угол

Заметим, что кроме матрицы **A** в децентрированных системах может понадобиться также вектор смещения центра области относительно начала координат.

Пусть, например, матрица **A** описывает поле на предмете, а матрица **A′** – поле на изображении, тогда, если пренебречь нелинейной дисторсией,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \tag{21}$$

где **V** – матрица увеличений, введенная в предыдущем разделе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джерард А., Берч Дж.М. Введение в матричную оптику. – М.: Мир, 1978.– 341 с.
2. Родионов С.А. // Оптический журнал, 1994. №8. С.13-17
3. Борн М.., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1970. –956 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике, – М.: Наука. 1974. – 832 с.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. –М.: Мир, 1989.– 655 с.
6. Родионов С.А. // Известия вузов – Приборостроение, 1980, т. 23, №3, с. 72-76: