МАТРИЧНАЯ ФОРМА ОПИСАНИЯ ГАУССОВОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПУЧКА

Ц. В. ДЖАМИЙКОВА, С. А. РОДИОНОВ

Вводится комплексная матрица, описывающая пространственную структуру эллиптического гауссового пучка с общим астигматизмом. Найдены законы изменения матрицы при распространении пучка в свободном пространстве и при его трансформации произвольной оптической системой.

Соотношения матричной оптики в последнее время с большим успехом применяются для описания свойств оптических систем и гауссовых пучков. В работе [1] показана плодотворность матричного подхода к рассмотрению центрированных оптических систем и круговых гауссовых пучков. В [2] матричный аппарат обобщается на случаи окрестности произвольного луча в произвольной оптической системе. В связи с этим представляется полезным развитие указанного аппарата для описания наиболее общего и сложного вида гауссовых пучков – эллиптических пучков с общим астигматизмом, а также их распространения через произвольную оптическую систему,

Пусть имеется гауссов эллиптический пучок с общим астигматизмом, распространяющийся вдоль, оси z. Комплексная амплитуда ноля такого пучка описывается следующим выражением [3,4]:

$$U(x,y,z) = A_0\left[\frac{q_{11}^{-1}(z)q_{22}^{-1}(z)-q_{12}^{-2}(z)}{q_{11}^{-1}(0)q_{22}^{-1}(0)-q_{12}^{-2}(0)}\right]^{1/2}\times$$
$$\times\exp\left\{-ikn\left[z+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x^2}{q_{11}(z)}+\frac{y^2}{q_{22}(z)}+\frac{2xy}{q_{12}(z)}\right)\right]\right\}, \qquad (1)$$

где x, y, z – координаты точки, в которой рассматривается амплитуда поля; A_0 – постоянный множитель, определяющий мощность пучка; $\mathrm{k}=2\pi/\lambda$ – волновое число, где λ – длина волны, n – показатель преломления среды; q_{11}, q_{12}, q_{22} – комплексные параметры пучка. Как известно, гауссовы эллиптические пучки с общим астигматизмом, т.е. эллиптические вращающиеся пучки, могут быть получены из гауссовых эллиптических пучков с простым астигматизмом поворотом системы координат на некоторый комплексный угол $\varphi=\beta+i\alpha$, причем вещественная часть угла β приводит только к повороту пучка как целого и в этом смысле не представляет интереса [3].

Введем для описания гауссова пучка матрицу комплексных параметров, представляющую собой симметрическую матрицу второго порядка:

$$\mathbf{Q}(z)=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{q_{11}(z)} & \dfrac{1}{q_{12}(z)}\\ \dfrac{1}{q_{21}(z)} & \dfrac{1}{q_{22}(z)}\end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Для частного случая пучка с простым астигматизмом, оси эллипсов равной интенсивности и равной фазы которого ориентированы по осям координатной системы, матрица **Q**(z) – диагональная, при этом $q_{12} = q_{21} = 0$; $q_{11} = q_x$; $q_{22} = q_y$. В случае кругового пучка имеем $q_{12} = q_{21} = 0$; $q_{11} = q_{22} = q$, т. е. $\mathbf{Q}(z) = \mathbf{I}q$, где **I** – единичная матрица.

С помощью матрицы комплексных параметров выражение (1) может быть записано в компактном виде:

$$U(x,y,z) = A_0 \left[\frac{\det \mathbf{Q}(z)}{\det \mathbf{Q}(0)} \right]^{1/2} \exp\left\{ -ikn\left[z + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}^T \mathbf{Q}\mathbf{a} \right] \right\}, \qquad (3)$$

где $a = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – радиус-вектор рассматриваемой точки в плоскости z = const; T – индекс транспонирования; det **Q** – определитель матрицы **Q**. Нетрудно показать, что при повороте системы координат вокруг оси z на комплексный угол $\varphi = \beta + i\alpha$ определитель матрицы не изменяется, а сама матрица преобразуется в соответствии с формулой

$$\mathbf{Q}(z,\varphi) = \mathbf{R}\mathbf{Q}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}, \qquad (4)$$

где $\mathbf{R} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$ – матрица поворота на угол φ.

Всегда можно найти такой угол поворота φ, чтобы по формуле (4) из произвольной матрицы **Q**(z) получить диагональную матрицу с параметрами $q_{12}= q_{21} = 0$; $q_{11}= q_x$; $q_{22} = q_y$, соответствующую пучку с простым астигматизмом, при этом, если мнимая часть α угла поворота φ диагонализирующего матрицу Q, равна нулю, исходный пучок также является пучком с простым астигматизмом, но повернутым как целое на угол относительно координатной оси. Величина мнимой части α показывает [3] «перекос» пучка, т. е. угол между осями эллипсов равной фазы и равной интенсивности.

Для гауссовых пучков с простым астигматизмом, как и для круговых пучков, известна простая связь комплексных параметров q с величинами, имеющими простое физическое толкование [1, 3, 4]:

$$\frac{1}{q_j} = \frac{1}{R_j} - \frac{2i}{kn\omega_j^2}, \qquad (5)$$

где R_j, $j = x, y$ – радиусы кривизны волнового фронта в его сечениях; ω_j, $j = x, y$ – полуоси эллипсов равной интенсивности на уровне $1/e^2$. При распространении пучка вдоль оси z комплексные параметры изменяются в соответствии с простыми формулами

$$q_j(z) = q_j(0) + z. \qquad (6)$$

Рассмотрим физический смысл матрицы комплексных параметров **Q**, для чего запишем ее в виде разложения на действительную и мнимую части:

$$\mathbf{Q}(\mathrm{z}) = \mathbf{R}(\mathrm{z}) + i\frac{2}{kn}\mathbf{W}(\mathrm{z}), \tag{7}$$

где $\mathbf{R}(\mathrm{z}) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{R_{11}(z)} & \dfrac{1}{R_{12}(z)} \\ \dfrac{1}{R_{21}(z)} & \dfrac{1}{R_{22}(z)} \end{vmatrix}$ – симметрическая матрица кривизны волнового фронта; $\mathbf{W}(\mathrm{z}) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\omega_{11}^2(z)} & \dfrac{1}{\omega_{12}^2(z)} \\ \dfrac{1}{\omega_{21}^2(z)} & \dfrac{1}{\omega_{22}^2(z)} \end{vmatrix}$ – симметрическая матрица эллипса равной интенсивности. Нетрудно увидеть, что собственные векторы матрицы $\mathbf{R}$(z) совпадают с направлениями главных сечений волнового фронта, а собственные числа обратны радиусам кривизны фронта в этих сечениях, собственные векторы матрицы $\mathbf{W}$(z) указывают направления осей эллипса равных интенсивностей пучка, а собственные числа матрицы $\mathbf{W}$(z) равны квадратам полуосей эллипса равной интенсивности на уровне интенсивности $1/e^2$.

Разложение матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{W}$ на произведение матриц собственных векторов и собственных значений эквивалентно их диагонализации в соответствии с формулами

$$\mathbf{R}(\mathrm{z}) = \mathbf{R}_R^{\mathrm{T}}(\mathrm{z})\mathbf{R}^0(\mathrm{z})\mathbf{R}_R(\mathrm{z}), \quad \mathbf{W}(\mathrm{z}) = \mathbf{R}_W^{\mathrm{T}}(\mathrm{z})\mathbf{W}^0(\mathrm{z})\mathbf{R}_W(\mathrm{z}), \tag{8}$$

где $\mathbf{R}_R$ (z), $\mathbf{R}_W$ (z) – матрицы собственных векторов $\mathbf{R}$ и W соответственно, равные матрицам поворота на углы ψ_R и ψ_W; $\mathbf{R}^0$(z) и $\mathbf{W}^0$(z) – диагональные матрицы собственных значений $\mathbf{R}$ и $\mathbf{W}$.

Как известно [4], при распространении пучка с общим астигматизмом вдоль оси z комплексные параметры q_{ij} изменяются в соответствии с довольно сложными формулами, не имеющими такого простого физического смысла, как формулы (6):

$$\begin{gathered} \frac{1}{q_{11}(z)} = \frac{\alpha z + \beta}{\alpha z^2 + (\beta+\gamma)z + 1}; \quad \frac{1}{q_{22}(z)} = \frac{\alpha z + \gamma}{\alpha z^2 + (\beta+\gamma)z + 1}; \\ \frac{1}{q_{12}(z)} = 2\frac{\pm\sqrt{\beta\gamma - \alpha}}{\alpha z^2 + (\beta+\gamma)z + 1}, \end{gathered} \tag{9}$$

где α, β, γ – комплексные постоянные, определяемые из граничных условий уравнения Гельмгольца, т. е. из уравнения комплексной амплитуды в плоскости z = 0. Применение матрицы комплексных параметров (2) позволяет вместо (9) получить путем несложных преобразований простое выражение для изменения матрицы $\mathbf{Q}$, аналогичное формуле (6):

$$\mathbf{Q}^{-1}(z) = \mathbf{Q}^{-1}(0) + \mathbf{I}z, \tag{10}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

С помощью матричного аппарата можно также существенно упростить формулы, описывающие преобразование гауссового пучка с общим астигматизмом произвольной оптической системой (в пределах гауссовой окрестности луча). В работе [5] получены соответствующие выражения без использования матричной нотации, что привело к довольно громоздким формулам, трудным для практического использования. Рассмотрим вывод матричных формул при тех же предположениях, что и в работе [5]. Пусть имеется произвольная оптическая система и произвольный луч, который является осью гауссова пучка с общим астигматизмом, распространяющегося через систему. Воспользуемся понятием гауссовой матрицы четвертого порядка, введенным в работе [2] для описания свойств системы в окрестности оси пучка, но, н отличие от работы [2], будем использовать обозначения, аналогичные введенным Когельником и Ли [1, 6]:

$$dr' = \begin{pmatrix} a' \\ n'q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ nq \end{pmatrix} = \mathbf{G}dr, \tag{11}$$

где q и q' – дифференциалы орта направления луча в пространствах предметов и изображений; n и n' – показатели преломления; **A**, **B**, **C**, **D** – квадратные подматрицы второго порядка гауссовой матрицы **G** окрестности луча. Матрицы **A**, **B**, **C**, **D** связаны с соответствующими подматрицами G_{ij}, введенными в работе [2], следующими формулами:

$$\mathbf{A} = G_{11};\quad \mathbf{B} = -n^{-1}G_{12};\quad \mathbf{C} = n'G_{12};\quad \mathbf{D} = -n'n^{-1}G_{22}. \tag{12}$$

С использованием (11) можно получить выражение для точечной гамильтоновой характеристики E $(a,\ a')$ в виде разложения ее в ряд Тейлора в окрестности точки (0,0):

$$E(a,a') = E(0{,}0) + \frac{1}{2}[\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{a}'^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}' - \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}' - \mathbf{a}'^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}]. \tag{13}$$

Затем из (13) и (3) после некоторых преобразований выведем окончательную формулу для преобразования матрицы комплексных параметров произвольного гауссова пучка произвольной оптической системой:

$$\mathbf{Q}' = (\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{Q})(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{Q})^{-1} \quad \text{или} \quad \mathbf{Q}'^{-1} = (\mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{B})(\mathbf{C}\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{D})^{-1}, \tag{14}$$

где $\mathbf{Q}'$ – матрица комплексных параметров трансформированного пучка на выходе из системы. Нетрудно заметить, что выражение (14) является обобщением известного правила *ABCD* [1,6], справедливого для частного случая кругового пучка, ось которого совпадает с осью центрированной оптической системы. Выражение (14) переходит в правило ABCD, если вместо матриц **Q**, $\mathbf{Q}'$, **A**, **B**, **C**, **D** рассматривать соответствующие скалярные величины. Отметим также, что отсутствие в формуле (13) членов, линейных по отношению к $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$, подтверждает гипотезу о том, что и в общем случае ось гауссова пучка совпадает с лучом, проходящим через систему по законам геометрической оптики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джерард А., Берч Дж. М. Введение в матричную оптику. – М.: Мир, 1978. –341 с.
2. Родионов С. А. Матричный аппарат гауссовой оптики в окрестности произвольного луча. –Оптика и спектроскопия, 1981, т.50, вып.5, с.969–976.
3. Бельский А. М., Корнейчик Т. М; Хапалюк А. П. Пространственная структура лазерного излучения. – Минск: Изд-во. БГУ им: В. И. Ленина, 1982. –198 с.
4. Гончаренко А. М. Гауссовы пучки света. – Минск: Наука и техника, 1977. –144 с.
5. Джамийкова Ц. В., Родионов С. А. Комплексные параметры эллиптического гауссова пучка с общим астигматизмом трансформированного произвольной оптической системой. – Изв.-вузов СССР – Приборостроение, 1987, № 6.
6. Когельник Х., Ли Т. Резонаторы и световые пучки лазеров. –ТИИЭР, 1966, т. 54, №10.