ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОПТИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭНЕРГИИ

И. П. АГУРОК, С. А. РОДИОНОВ

Функция концентрации энергии (ФКЭ) $E(r)$, показывающая, какая часть всей энергии пятна рассеяния оптической системы содержится в круге радиусом r, является важной характеристикой качества изображения, особенно применительно к астрономическим телескопам [1]. Необходимость определения ФКЭ возникает как в процессе проектирования, так и при технологическом контроле и аттестации оптических приборов.

При проектировании и контроле оптических систем особенно важно точно вычислить ФКЭ у систем с волновыми аберрациями, не превышающими полторы-две длины волны, при расчете которых нельзя пренебрегать дифракционными эффектами.

В процессе проектирования исходной информацией для анализа структуры изображения является зрачковая функция $f(\rho_x, \rho_y) = \Omega(\rho_x, \rho_y)\tau^{1/2}(\rho_x, \rho_y)\exp[2\pi j W(\rho_x, \rho_y)]$, где $\Omega(\rho_x, \rho_y)$ – функция, описывающая область зрачка, $\tau^{1/2}(\rho_x, \rho_y)$ – функция энергетического пропускания, $W(\rho_x, \rho_y)$ – функция волновой аберрации [2]. По зрачковой функции методами быстрого преобразования Фурье (БПФ) определяется функция рассеяния точки (ФРТ) $h(x, y)$, характеризующая распределение освещенности в пятне рассеяния и другие параметры структуры изображения [2]. При экспериментальном исследовании ФКЭ может быть измерена непосредственно, но малость размеров ФРТ и связанные с этим трудности измерения не позволяют обеспечить требуемую точность. Поэтому в большинстве случаев в процессе контроля и аттестации оптических систем ФКЭ определяется также расчетным путем по ФРТ, вычисленной, в свою очередь, методом БПФ по зрачковой функции, полученной экспериментально с помощью интерферометрических методов или метода Гартмана [3-5]. Формула, выражающая ФКЭ через ФРТ, может быть записана в следующем виде:

$$E(r, x_0, y_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} circ\left(\frac{x - x_0}{r}, \frac{y - y_0}{r}\right) h(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

где $circ(x, y)$ – функция «круг» [6], определяемая выражением

$$circ(x, y) = \begin{cases} 1 & при \quad x^2 + y^2 < 1; \\ 0 & при \quad x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

В выражении (1) ФРТ нормирована исходя из условия равенства полной энергии единице. Координаты x_0, y_0 центра круга должны определяться для каждого значения радиусов r из условия достижения максимума $E(r, x_0, y_0)$.

При практическом использовании формулы (1) необходимо прибегать к методам численного интегрирования двумерных функций [2]. Поскольку значения ФРТ, полученной методом БПФ, всегда расположены в точках прямоугольной сети с равномерным шагом [2], в то время как контур области интегрирования в выражении (1) представляет собой, окружность, при численном интегрировании возникает неизбежная граничная погрешность [2]. Дополнительные трудности в вычислении создаются вследствие того, что ФРТ является весьма быстроосциллирующей функцией, меняющей свои значения от нуля до максимума в пределах нескольких узлов, причем узлы не совпадают с нулями функции. Методы численного интегрирования, имеющие в своей основе полиномиальную интерполяцию, в такой ситуации дают значительную погрешность. На практике обычно не удается получить значения ФКЭ, лежащие в весьма важном диапазоне 70...85 % с погрешностью менее чем 1,5 % при использовании наиболее распространенной сети БПФ 128×128 узлов. При меньшем количестве узлов (64×64) и меньших значениях ФКЭ погрешность существенно возрастет. Кроме того, использование методов численного интегрирования ФРТ не позволяет с необходимой точностью и без больших затрат определять оптимальные значения координат центра круга x_0, y_0 для каждого значения радиуса r, поэтому обычно принимают в качестве x_0, y_0 постоянные для всех r координаты центра тяжести ФРТ [1], что, вообще говоря, неправильно.

Избежать указанных трудностей позволяет описанный далее метод, в котором вычисление ФКЭ производится не по ФРТ в соответствии с выражением (1), а посредством оптической передаточной функции (ОПФ), представляющей собой преобразование Фурье от ФРТ [1, 2, 6]. Поскольку ОПФ также является одной из важнейших характеристик структуры изображения и в процессе анализа изображения вычисляется по ФРТ методом БПФ, т. е. практически всегда известна, описываемый метод не требует непроизводительных вычислений.

Обратим внимание на то, что выражение (1) можно рассматривать как свертку двух двумерных функций $circ\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right)$ и $h(x, y)$:

$$E(r,x_0,y_0) = circ\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right) \otimes h(x,y), \tag{2}$$

где $\otimes$ обозначает операцию свертки. Выразим функции $circ\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right)$ и $h(x, y)$ через свои преобразования Фурье [6]

$$circ\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r}\right) = F^{-1}\left[\frac{rJ_1(2\pi\nu r)}{\nu}\right] \tag{3}$$

и

$$h(x,y) = F^{-1}[D(\nu_x,\nu_y)], \tag{4}$$

где F^{-1} – оператор обратного преобразования Фурье $\nu = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$, J_1 – функция Бесселя первого порядка, $D(\nu_x, \nu_y)$ – ОПФ, ν_x, ν_y – пространственные частоты.

В формуле (4) для ОПФ предполагается, что нормировка $D(0,0) = 1$ – общепринятая. Это соответствует полной энергии ФРТ, равной 1: $\iint\limits_{-\infty}^{\infty} h(x,y) = 1$.

Применим к выражению (2) операторы прямого и обратного преобразования Фурье и воспользуемся тем, что преобразование Фурье свертки равно произведению преобразований. С учетом формул (3) и (4) получим

$$\begin{aligned} E(r, x_0, y_0) &= F^{-1} F\left[circ\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) \otimes h(x,y) \right] = F^{-1}\left[\frac{rJ_1(2\pi\nu r)}{\nu} D(\nu_x, \nu_y) \right] = \\ &= r \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{J_1(2\pi\nu r)}{\nu} D(\nu_x, \nu_y) \exp\left[-2\pi j(\nu_x x_0 + \nu_y y_0)\right] d\nu_x d\nu_y, \end{aligned} \tag{5}$$

Введя обозначение

$$Q(\nu_x, \nu_y, x_0, y_0) = D(\nu_x, \nu_y) \exp\left[-2\pi j(\nu_x x_0 + \nu_y y_0)\right], \tag{6}$$

запишем следующую формулу для вычисления ФКЭ через ОПФ:

$$E(r, x_0, y_0) = r \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_1(2\pi\nu r)}{\nu} Q(\nu_x, \nu_y, x_0, y_0) d\nu_x d\nu_y. \tag{7}$$

Сравнивая выражения (1) и (7), можно заметить, что вычисления, выполненные по формуле (7), более точны. В самом деле, интегрирование в формуле (7) независимо от значений r, x_0, y_0 всегда производится по одной области, в которой ОПФ $D(\nu_x, \nu_y)$ отлична от нуля. Кроме того, ОПФ $D(\nu_x, \nu_y)$ меняется гораздо более плавно, чем ФРТ $h(x, y)$, поэтому погрешность интегрирования по формуле (7) должна быть при прочих равных условиях существенно меньше, чем по формуле (1). Тем не менее, формулы (7) и (1) не обладают взаимными преимуществами в отношении трудоемкости вычислений. Уменьшения трудоемкости можно достичь следующими путями.

Во-первых, заметим, что, поскольку ФРТ $h(x, y)$ является вещественной функцией, ее преобразование Фурье $D(\nu_x, \nu_y)$, а также и функция Q, определенная формулой (6), обладают следующими свойствами симметрии:

$$Q(\nu_x, \nu_y, x_0, y_0) = Q^*(-\nu_x, -\nu_y, x_0, y_0). \tag{8}$$

Так как функция $J_1(2\pi\nu r)/\nu$ обладает круговой симметрией, то и все подынтегральное выражение в формуле (7) удовлетворяет свойству (8). Нетрудно заметить, что интеграл (7) от мнимой части подынтегральной функции равен нулю, а интеграл от действительной части можно выразить через интеграл в пределах одной полуплоскости:

$$E(r, x_0, y_0) = 2r \int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_1(2\pi\nu r)}{\nu} Q^R(\nu_x, \nu_y, x_0, y_0) d\nu_x d\nu_y, \tag{9}$$

где Q^R – вещественная часть функции Q;

$$\begin{aligned} Q^R(\nu_x,\nu_y,x_0,y_0) &= D^R(\nu_x,\nu_y)\times \\ &\times\left[\cos(2\pi\nu_x x_0)\cos(2\pi\nu_y y_0)-\sin(2\pi\nu_x x_0)\sin(2\pi\nu_y y_0)\right]+ \\ &+D^I(\nu_x,\nu_y)\left[\sin(2\pi\nu_x x_0)\cos(2\pi\nu_y y_0)+\cos(2\pi\nu_x x_0)\sin(2\pi\nu_y y_0)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $Q^R(\nu_x,\nu_y)$, $D^I(\nu_x,\nu_y)$ – вещественная и мнимая части ОПФ.

Продолжая дальнейшие рассуждения, перейдем к каноническим координатам [2]. Как известно [2], в большинстве оптических систем для любой точки предмета в канонических координатах зрачок с удовлетворительной точностью может быть принят за единичный круг. В этом случае как ОПФ $D(\nu_x,\nu_y)$, так и функция Q отличны от нуля только внутри круга радиусом, равным двум каноническим единицам, и интегрирование в (9) удобно выполнять в полярных координатах:

$$E(r,x_0,y_0)=4r\int_0^1\int_0^\pi\frac{J_1(4\pi\omega r)}{\omega}Q^R(\omega,\theta,x_0,y_0)\omega d\omega d\theta, \tag{11}$$

где $\omega=\nu/2$, x_0, y_0, ν, r, выражены в канонических единицах [2].

Представим $Q^R(\omega,\theta,x_0,y_0)$ (8), (10) в следующем виде:

$$Q^R(\omega,\theta,x_0,y_0)=\sum_{k=0}^{9}a_k(x_0,y_0)\omega^k+\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=2m}^{N+2m}C_{k2m}R_k^{2m}(\omega)_{\cos 2m\theta}^{\sin 2m\theta}, \tag{12}$$

где $R_k^{2m}(\omega)_{\cos 2m\theta}^{\sin 2m\theta}$ – полиномы Цернике [7], ортогональные на единичном круге, $a_k(x_0,y_0), C_{k2m}$ – коэффициенты аппроксимации, которые могут быть определены по методу наименьших квадратов [2].

Подставляя (12) в (11), получим

$$\begin{aligned} E(r,x_0,y_0) &= 4\pi r\sum_{k=0}^{9}a_k(x_0,y_0)\int_0^1\omega^k J_1(4\pi\omega r)d\omega+ \\ &+4r\sum_{m=1}^{N}\sum_{k=2m}^{N+2m}C_{k2m}\int_0^1 R_k^{2m}(\omega)J_1(4\pi\omega r)\omega d\omega\int_0^\pi {}_{\cos 2m\theta d\theta}^{\sin 2m\theta} \end{aligned}$$

Поскольку $\int_0^1 {}_{\cos 2m\theta d\theta}^{\sin 2m\theta}=0$ при $m\neq 0$, то второй интеграл в предыдущей формуле равен нулю и окончательно получаем следующую простую формулу для вычисления ФКЭ посредством ОПФ:

$$E(r,x_0,y_0)=4\pi r\sum_{k=0}^{9}a_k(x_0,y_0)\int_0^1\omega^k J_1(4\pi\omega r)d\omega. \tag{13}$$

Заметим, что в формуле (13) интегрирование производится по одной переменной, что существенно сокращает количество вычислений. Кроме того, поскольку под интеграл не входит ОПФ $D(\nu_x,\nu_y)$, его значения не зависят от конкретной структуры изображения и могут быть вычислены (протабулированы) заранее для различных значений r и k. Обозначим через $I_k(r)=\int_0^1 \omega^k J_1(4\pi\omega r)d\omega$ табулированные значения этих интегралов. Тогда формула (13) может быть записана в следующем виде:

$$E(r,x_0,y_0)=4\pi r\sum_{k=0}^{9} a_k(x_0,y_0)I_k(r). \tag{14}$$

Вычисление ФКЭ в соответствии с (14) сводится к определению коэффициентов аппроксимации $a_k(x_0,y_0)$ и подстановке их в (14). Поскольку в процессе всего вывода, начиная с формулы (1), соблюдается условие нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)=1,$ формула (14) автоматически обеспечивает получение значений энергии $E(r,x_0,y_0)$ при условии $\lim_{r\to\infty} E(r,x_0,y_0)=1,$ хотя формула (14) предназначена для численного использования и непосредственная подстановка в нее $r=\infty$ не имеет смысла.

Так как в выражении (12) полиномы $R_k^{2m}(\omega)_{\cos 2m\theta}^{\sin 2m\theta}$ ортогональны любому полиному ω_k, то определение коэффициентов $a_k(x_0,y_0)$ может производиться по методу наименьших квадратов независимо от коэффициентов C_{km}. (Строго говоря, ортогональность выполняется на непрерывной области – единичном круге или полукруге, а не на дискретном множестве значений ν_{xi}, ν_{yi}, однако при достаточном количестве узлов, например 64×64, как показывает практика, можно считать ортогональность справедливой и на дискретном множестве.) В этом случае коэффициенты $a_k(x_0,y_0)$ могут быть определены решением следующей системы линейных уравнений по методу наименьших квадратов:

$$AC=B, \tag{15}$$

где $C=[a_k(x_{0e},y_{0e})]$ – матрица неизвестных коэффициентов $a_k(x_0,y_0)$, соответствующих различным значениям x_{0e},y_{0e} координат центра круга, $A=\left[\left(\frac{\sqrt{\nu_{x_i}^2+\nu_{y_i}^2}}{2}\right)^k\right]$ – «конструкционная» матрица, $B=[Q^R(\nu_{xi},\nu_{yi},x_{0e},y_{0e})]$ – матрица правых частей, ν_{xi},ν_{yi} – узлы, на которых известны значения ОПФ $D(\nu_x,\nu_y)$. Решение системы (15) по методу наименьших квадратов [2] сразу дает значения коэффициентов $a_k(x_0,y_0)$ для набора значений координат центров x_{0e},y_{0e}. Подставляя полученные значения в формулу (14) и выбирая для каждого r максимальное значение $E(r,x_{0e},y_{0e})$ получаем оптимальную ФЭК. Значения x_{0e},y_{0e} целесообразно выбирать с достаточно мелким шагом в окрестности центра тяжести ФРТ. Если $\nu_x=n_x\Delta\nu_x, \nu_y=n_y\Delta\nu_y, x_0=l_x\Delta x_0, y_0= =l_y\Delta y_0$, то значения cos и sin в формуле (10), равные $\cos(2\pi n_x l_x\Delta\nu_x\Delta x_0)$ и

$\sin\left(2\pi n_x l_x \Delta\nu_x \Delta x_0\right)$, могут быть вычислены с использованием только значений $\cos\left(2\pi\Delta\nu_x \Delta x_0\right)$ и $\sin\left(2\pi\Delta\nu_x \Delta x_0\right)$, и последующего рекуррентного применения формул для cos и sin суммы углов.

Точность предложенного метода была проверена на примере вычисления ФКЭ безаберрационной оптической системы с круглым зрачком, для которой известно простое аналитическое выражение для определения ФРТ, ОПФ и ФКЭ [1]:

$$D_0(\omega) = \frac{2}{\pi}\left(\arccos\omega - \omega\sqrt{1-\omega^2}\right), 0 < \omega < 1;$$

$$E_0(r,0,0) = 1 - J_0^2(2\pi r) - J_1^2(2\pi r).$$

Исследования показали, что $D_0(\omega)$ представляется формулой (12) с точностью до 0,001, а погрешность вычисления $E_0(r,0,0)$ не превышает 0,05 % для любых r, что совершенно невозможно достичь путем интегрирования по формуле (1) при допустимых вычислительных затратах. К сожалению, вследствие аберраций аналитические выражения для ФКЭ отсутствуют, поэтому провести абсолютную оценку точности предложенного метода не представляется возможным. Учитывая реальную точность вычисления ОПФ методом БПФ, можно дать оценку максимальной погрешности метода (при количестве узлов в ФРТ и ОПФ, равном 128×128), составляющую 0,2 %, что значительно лучше оценки точности вычислений по формуле (1). Следует отметить также, что трудоемкость предложенного метода (с учетом затрат на определение коэффициента a_k и интеграла $I_k(r)$) оказалась на порядок ниже трудоемкости непосредственного численного интегрирования по формуле (1); этот факт обусловливает удобство применения описанного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уэзерелл У. – В кн.: Проектирование оптических систем/Под ред. Р. Шеннона, Дж. Вайанта. М.:
2. Мир, 1983, с. 178-332.
3. Родионов С. А. Автоматизация проектирования оптических систем. Л.: Машиностроение, 1982. 270 с.
4. Ган М. А. и др. – ОМП, 1978, № 9, с. 25-28.
5. Зверев В. А. и др. – ОМП, 1978, № 9, с. 7-10.
6. Зверев В. А., Родионов С. А., Сокольский М. Н. – ОМП, 1977, № 2, с. 18-22.
7. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 374 с.
8. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 865 с.