МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ДИСПЕРСИИ ОПТИЧЕСКИХ СТЕКОЛ С ПОМОЩЬЮ НАГЛЯДНЫХ ПАРАМЕТРОВ

В. Г. РЕЗНИК, С. А. РОДИОНОВ

При создании системы автоматизированного проектирования оптики одной из важных задач является разработка машинного каталога оптических материалов. Построение такого каталога обычно основано на применении одной или нескольких дисперсионных формул, справедливых для многих оптических материалов. Наибольшую известность и распространение получили дисперсионные формулы Зельмейера, Герцбергера, Неймана-Кеттлера [5]. Однако все они обладают двумя недостатками, несколько снижающими их ценность при построении машинного каталога. Во-первых, параметры, входящие в эти и им подобные формулы, не имеют физического смысла, непривычны для оптика-конструктора и не дают наглядного представления о поведения дисперсии оптического стекла. Во-вторых, пользуясь этими параметрами, невозможно построить дисперсионную зависимость $n(\lambda)$ по небольшому количеству исходных данных. Это часто бывает необходимо, когда встает вопрос о применении новых материалов и при пересчете оптических систем на плавки.

В свое время Герцбергером [1, 2] был предложен другой подход, испытанный авторами для большинства стекол из ГОСТ 13659-68, однако он не обеспечивал необходимый точности аппроксимации в широком спектральном интервале длин волн [3]. Тем не менее использование в этом методе величин $n(D)$, $\nu(D)$ и $P(\lambda)$, наглядно характеризующих дисперсию оптических материалов и входящих в известные выражения [1] для расчета апохроматов, делают его весьма привлекательным для оптиков.

Здесь предлагается развитие этого метода, свободного от перечисленных недостатков.

1. Исходные соображения

Известно, что для оптического стекла многих марок справедливо следующее простое соотношение между относительной частной дисперсией $P(\lambda)$, и коэффициентом дисперсии $\nu(D)$ [1, 2]:

$$P(\lambda)=A_1(\lambda)\nu(D)+A_2(\lambda). \quad (1)$$

Здесь

$$P(\lambda)=\frac{n(\lambda)-n(F)}{n(F)-n(C)};\nu(D)=\frac{n(D)-1}{n(F)-n(C)},$$

где $n(\lambda)$ – показатель преломления при длине волны λ; $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ – некоторые универсальные оптические функции длины волны, общие для всех оптических материалов. Оптическое стекло тех марок, для которых выполняется соотношение (1), часто называют обычным. На графике $P_\lambda(\nu_D)$ (рис.1) обычные стекла располагаются на прямой, один из способов определения уравнения которой предложен в [3]. Учитывая, что в соответствии с (1)

$$P(D)=\frac{N(D)-N(F)}{N(F)-N(C)}=A_1(D)\nu(D)+A_2(D),$$

где $N(\lambda)=n(\lambda)-1$, легко получить выражение для вычисления показателя преломления обычных стекол при любой длине волны:

$$N(\lambda)=N(D)\left[1+A_1(\lambda)-A_1(D)+\frac{1}{\nu(D)}\left(A_2(\lambda)-A_2(D)\right)\right].$$

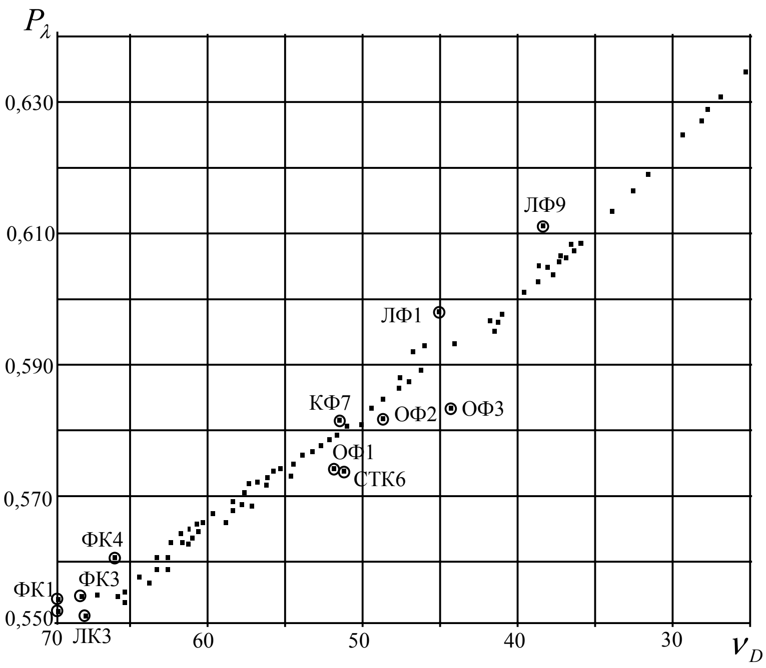

Рис.1

Существует, однако, значительное количество оптических материалов, называемых необычными, для которых соотношение (1) не выполняется. Введем в (1) поправку $R(\lambda)$, позволяющую учесть особенности хода дисперсии необычных оптических материалов:

$$P(\lambda)=A_1(\lambda)\nu(D)+A_2(\lambda)+R(\lambda), \qquad (2)$$

где

$$R(\lambda)=C_1(\lambda)\omega_1+C_2(\lambda)\omega_2+\ldots+C_p(\lambda)\omega_p;$$

$C_1(\lambda),C_2(\lambda),\ldots,C_p(\lambda)$ — универсальные оптические функции, зависящие только от длины волны, как $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$. Таким образом, в соответствии с (2) зависимость $n(\lambda)$ для каждого стекла полностью определяется значениями $n(D),\nu(D)$, а также параметрами $\omega_i\,(i=1,p)$. При этом значения универсальных оптических функций при любой длине волны должны быть известны.

Рассмотрим способы преодоления трудностей, лежащих на пути практического применения соотношения (2).

Определение функций $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$

В качестве исходных данных используем показатели преломления для 34 длин волн в интервале 0,365–2,6 мкм (ГОСТ 13659-68). По этим данным для большинства стекол, кроме «остро необычных», отмеченных на рис.1, можно в соответствии с (1) построить систему уравнений:

$$Ax = B\,. \qquad (3)$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} \nu_1(D) & 1 \\ \nu_2(D) & 1 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ \nu_m(D) & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} P_1(\lambda_1) & P_1(\lambda_2) & . & . & . & P_1(\lambda_n) \\ P_2(\lambda_1) & P_2(\lambda_2) & . & . & . & P_2(\lambda_n) \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ P_m(\lambda_1) & P_m(\lambda_2) & . & . & . & P_m(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} A_1(\lambda_1) & A_1(\lambda_2) & . & . & . & A_1(\lambda_n) \\ A_2(\lambda_1) & A_2(\lambda_2) & . & . & . & A_2(\lambda_{,n}) \end{pmatrix},$$

где m – количество стекол; n – количество длин волн; $\nu_i(D)$ – коэффициент дисперсии или число Аббе i-го стекла (i==1, m);

$$P_i(\lambda_j) = \frac{n_i(\lambda_j) - n_i(F)}{n_i(F) - n_i(C)}$$

частные относительные дисперсии $(j = 1, n, i = 1, m)$; $A_1(\lambda_j)$ и $A_2(\lambda_j)$ – искомые универсальные оптические функции $(j = 1, n)$. Система уравнений (3) легко решается методом наименьших квадратов (МНК); графики функций $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ приведены на рис. 2.

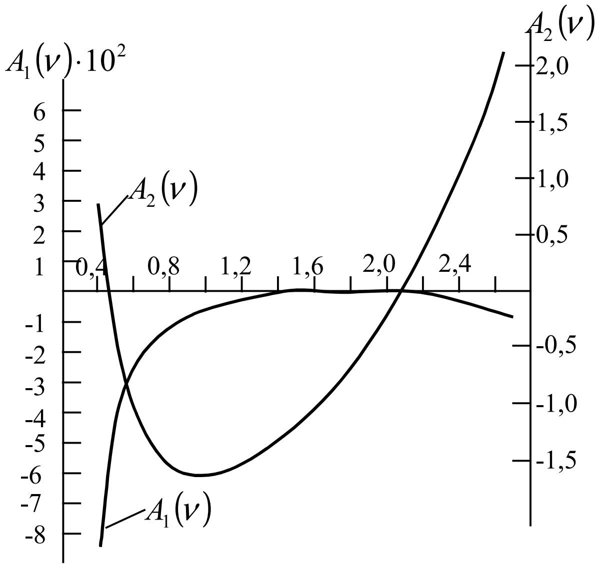

Рис.2

Определение функций $C_1(\lambda), C_2(\lambda), ..., C_p(\lambda)$ по Герцбергеру

Поправка $R(\lambda)$ «на необычность» для каждого оптического стекла, как следует из (2), может быть представлена следующим образом:

$$R_i(\lambda_j) = C_1(\lambda_j)\omega_{i1} + C_2(\lambda_j)\omega_{i2} + \\ + ... + C_p(\lambda_j)\omega_{ip} = P_i(\lambda_j) - A_1(\lambda_j)\nu_i(D) - A_2(\lambda_j), \quad (4)$$

где $i = (1, m)$ – номер стекла; $j = (1, n)$ – номер длины волны.

В середине 30-х годов Герцбергер [1] предложил ограничиться в выражении (4) двумя коэффициентами, один из которых был определен в ультрафиолетовой области для $\lambda = 0,404$ мкм (h), а другой в инфракрасной для $\lambda = 0,76649$ мкм (A'). Ниже вместо эмпирического выбора опорных длин волн для определения поправочных коэффициентов предлагается способ их выбора из условия наибольшей корректности аппроксимации дисперсионной зависимости. Вследствие этого для вычисления значений универсальных оптических функций можно использовать МНК для всего множества стекол данного класса так, чтобы обеспечить наилучшую аппроксимацию. При определении поправочных коэффициентов $\omega_i(i = 1, p)$ для каждого стекла по МНК обеспечивается наилучшая аппроксимация $n(\lambda)$ при всех длинах волн заданного спектрального интервала с учетом весовых коэффициентов.

Определение базиса и универсальных оптических функций $C_1(\lambda), C_2(\lambda), ..., C_p(\lambda)$

Для обоснованного выбора поправочных коэффициентов и их количества p в более широком интервале длин волн предположим, что для каждой длины волны λ_j i-го стекла назначен свой поправочный коэффициент ω_{ij}. Его величина может быть определена следующим выражением:

$$\omega_{ij} = [P_i(\lambda_j) - A_1(\lambda_j)\nu_i(D) - A_2(\lambda_j)]q_j,$$

где

$$q_j = \frac{\lambda_C - \lambda_F}{\lambda_j - \lambda_F}$$

– нормирующий множитель.

Исследуем матрицу Ω, численные значения элементов ω_{ij} которой могут быть легко найдены, поскольку функции $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ уже определены. Каждый j-й столбец матрицы Ω содержит поправки для всех стекол при длине волны λ_j. Некоторые из рассматриваемых 34 длин волн близки друг к другу и соответствующие им столбцы могут быть исключены из рассмотрения. Более того, следует исключить из матрицы Ω все столбцы, являющиеся в некотором приближения линейными комбинациями базисных столбцов. С этой целью с помощью стандартного аппарата матричной алгебры [4] был определен ранг p

матрицы Ω и выделено p базисных столбцов. Из них несколько первых соответствуют следующим длинам волн из рассматриваемого интервала: λ_3=0,43405 мкм (G'), λ_{31}=2,5 мкм, λ_1=0,36501 мкм (i), λ_2=0,40466 мкм (h), λ_7=0,65628 мкм (C), λ_8=0,7 мкм, λ_{21}=1,5 мкм.

Поправки именно при этих опорных длинах волн обеспечивают наибольшую корректность аппроксимации. Выделив р опорных длин волн, мы можем определить универсальные оптические функции $C_1(\lambda), C_2(\lambda), ..., C_p(\lambda)$, потребовав, чтобы они удовлетворяли следующей системе уравнений:

$$\overline{\Omega} C = R, \tag{5}$$

где $\overline{\Omega}$ – матрица размерностью $m \times p$, сформированная из базисных столбцов матрицы Ω; R – матрица правых частей размерностью $m \times n$, каждый элемент которой определяется соотношением (4); C – искомая матрица размерностью $p \times n$.

Решая систему (5) с помощью МНК, получим значения функций $C(\lambda)$ матрицы:

$$C = \left(\overline{\Omega}^T \overline{\Omega}\right)^{-1} \overline{\Omega}^T R = \begin{pmatrix} C_1(\lambda_1) & C_1(\lambda_2) & . & . & . & C_1(\lambda_n) \\ C_2(\lambda_1) & C_2(\lambda_2) & . & . & . & \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ C_p(\lambda_1) & C_p(\lambda_2) & . & . & . & C_p(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Графики первых трех из этих функций изображены на рис. 3.

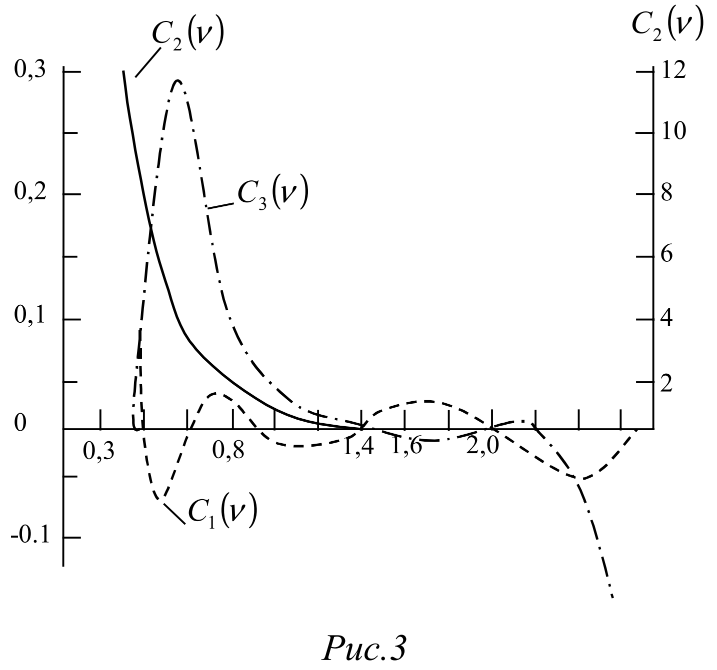

Рис.3

Аппроксимация универсальных оптических функций

Необходимым этапом на пути практического применения описываемого метода вычисления показателей преломления является аппроксимация универсальных функций $A_1(\lambda), A_2(\lambda), C_2(\lambda), ..., C_p(\lambda)$, так как необходимо знать их значения при любой длине волны из допустимого интервала. Заметим, однако, что очень большой точности не требуется, так как, во-первых, сами аппроксимируемые значения найдены по МНК совместной обработкой множества всех стекол стандартных марок и, во-вторых, индивидуальные особенности хода дисперсии каждого стекла более точно будут учтены на следующем этапе.

Вполне приемлемые результаты (см. рис. 2, 3) были получены при аппроксимации всех универсальных оптических функций степенным рядом:

$$C(\nu) = \sum_{i=1}^{9} a_i \nu^{2(i-5)},$$

где $\nu = \dfrac{1}{\lambda}$.

Аппроксимация дисперсионной зависимости $n(\lambda)$ отдельных стекол

Вернемся к выражению (2). Теперь, когда все необходимые функции "полностью определены, для каждого стекла можно составить следующую систему уравнений из условий наилучшей аппроксимации $n(D), \nu(D), P(\lambda)$ при всех длинах волн:

$$\left.\begin{array}{l} n_D = n(D) \\ \nu_D = \nu(D) \\ A_1(\lambda_1)\nu_D + A_2(\lambda_1) + C_1(\lambda_1)\omega_1 + \\ + ... + C_p(\lambda_1)\omega_p = P(\lambda_1) \\ A_1(\lambda_2)\nu_D + A_2(\lambda_2) + C_1(\lambda_2)\omega_1 + \\ + ... + C_p(\lambda_2)\omega_p = P(\lambda_2) \\ ... \\ A_1(\lambda_n)\nu_D + A_2(\lambda_n) + C_1(\lambda_n)\omega_1 + \\ + ... + C_p(\lambda_n)\omega_p = P(\lambda_n) \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Система (6) решается относительно неизвестных параметров $\mathbf{x} = (n_D, \nu_D, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_p)$ по МНК.

Весовые множители уравнений выбирались как величины, обратно пропорциональные погрешности определения их правых частей:

$$q_{n(D)} = \frac{1}{\delta n(D)},$$

$$q_{\nu(D)} = \frac{1}{\delta \nu(D)}, \delta\nu(D) = \left(\frac{\delta n(D)}{n(D)-1} + \frac{\delta n(F)+\delta n(C)}{n(F)-n(C)}\right)\nu(D),$$

$$q_{p(\lambda)} = \frac{1}{\delta P(\lambda)},$$

$$\delta P(\lambda) = \left(\frac{\delta n(\lambda)+\delta n(F)}{n(\lambda)-n(F)} + \frac{\delta n(F)+\delta n(C)}{n(F)-n(C)}\right)P(\lambda).$$

Показатель преломления при любой длине волны λ из рассматриваемого интервала может быть вычислен по формуле

$$N(\lambda) = n(\lambda) - 1 = N_D\left[B_1(\lambda) + \frac{1}{\nu_D}(B_2(\lambda) + \omega_1 B_3(\lambda) + \right. \qquad (7)$$
$$\left. + \omega_2 B_4(\lambda) + \ldots + \omega_p B_{p+2}(\lambda))\right]$$

где $B_1(\lambda) = 1 + A_1(\lambda) - A_1(D); B_2(\lambda) = A_2(\lambda) - A_2(D)$ и так далее. Эквивалентна формуле (7), но более компактна формула, выражающая показатели преломления $N(\lambda)$ через частные относительные дисперсии $P(\lambda)$:

$$N(\lambda) = n(\lambda) - 1 = N_D\left(1 + \frac{P(\lambda) - P(D)}{\nu_D}\right),$$

где $N_D = n_D - 1; \nu_D$ – число Аббе; $P(\lambda)$ и $P(D)$ – относительные частные дисперсии, вычисляемые по (2).

Для уменьшения погрешности аппроксимации все вычисления, в том числе решение систем уравнений и обращение матриц, были выполнены на ЭВМ ЕС-1040 с двойной точностью. В табл. 1 приведены средняя квадратичная погрешность σ аппроксимации при p=4 и значения параметров для нескольких марок стекол из ГОСТ 13659-68. Там же указана и максимальная по модулю ошибка аппроксимации, выраженная, как и σ, в единицах последней значащей цифры, указанной для показателя преломления в ГОСТ 13659-68. Абсолютная погрешность аппроксимации $n(\lambda)$ для стекол с особым ходом дисперсии представлена в табл. 2.

Таблица 1

Марка стекла	Значения наглядных параметров n_D / ν_D	ω_1 / ω_2	ω_3 / ω_4	$\sigma = 10^5 \sqrt{\frac{\sum_1^n \left(n_i^{исх} - n_i^{расч}\right)^2 q_i^2}{n-p}}$	$10^5 \max\left\|n_i^{исх} - n_i^{расч}\right\| q_i$
ЛК7	1,482800 66,318	0,10140 -0,02286	0,02630 0,02781	0,79	3,10
К8	1,516300 64,057	0,02597 -0,01268	0,01693 0,01411	1,60	4,20
БК4	1,530200 60,456	-0,00687 0,01417	0,00403 -0,00557	1,10	3,41
ТК8	1,614000 55,117	0,01464 0,01927	0,01989 0,00582	1,01	3,68
КФ4	1,518100 58,942	0,05412 -0,01923	0,01197 0,01037	1,53	4,68
БФ6	1,569600 49,444	-0.02429 -0.00804	-0,02577 -0,01611	1,26	3,49
Ф1	1,612800 36,938	-0,05509 -0,06485	-0,07736 -0,03102	0,66	1,42
ТФ4	1,739800 28,151	-0,23476 -0,08863	-0,19945 -0,09602	1,37	4,97
ОФ1	1,529400 51,801	0,13881 -0,05311	0,04515 0,03532	1,93	4,30

Таблица 2

Длина волны	Марка стекла ЛК1	ЛК3	ФК1	СТК10	ЛФ12	ОФ1	ОФ5	Вес q
0,40466	2,7	-0,3	0,7	0,24	-1,06	1,0	-2,1	1
0,43405	-4,4	-1,8	5,8	0,49	-5,8	3,1	1,1	10
0,48613	2,8	-2,8	5,2	6,1	-5,8	5,0	-0,5	10
0,54607	-1,7	-6,4	8,1	-1,9	-1,7	-0,1	-1,8	10
0,58903	0	0	0	0	0	0	0	0,1
0,65628	1,4	-2,6	5,1	1,4	-5,3	4,3	-1,3	10
0,7	-0,1	-0,4	0,9	7,0	-1,5	2,4	-3,4	1
0,76649	0,8	0,8	1,8	0,05	-1,5	1,2	-3,8	1
0,8	1,4	0,1	2,0	4,0	-1,4	0,7	-0,7	1
0,863	0,3	1,3	2,5	2,9	-1,0	-1,2	-2,0	1
0,9	1,0	1,2	2,8	2,0	-0,5	-2,0	0,6	1
0,951	1,2	1,8	3,6	1,7	0,4	-1,7	0,9	1
1,0	0,8	0,4	1,9	3,0	0,0	-2,0	-0,08	1
1,05	1,0	0,1	2,2	2,2	0,6	-1,0	-0,2	1

Абсолютная погрешность аппроксимации особых стекол $\left(\left(n_i^{исх} - n_i^{расч}\right)10^5 \cdot q_i\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. – М.; Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Herzberger M., Jenkins H., – JOSA, 1949 vol. 39. p. 981.
3. Резник В.Г., Родионов С.А. – ОМП, 1973, т. 40, с. 29.

4. Сборник научных программ на фортране. Вып. 2. Матричная и линейная алгебра. – М.: Статистика, 1974.
5. Ефимов А.М. – Физика и химия стекла, 1977, т. 3, № 5, с. 435–453.