О РАСЧЕТЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ЛУЧЕЙ ЧЕРЕЗ ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

С. А. РОДИОНОВ

Вводится понятие дифференциалов лучей и рассматривается математический аппарат и алгоритмы расчета их через произвольные оптические системы.

При проектировании оптических систем с помощью ЭВМ широко используется расчет действительных лучей. Гораздо меньше внимания уделяется расчету лучей, близких к данному действительному, или бесконечно узких пучков, в основном их применение ограничивается задачами определения астигматизма вдоль главного луча меридионального сечения центрированных систем. Как показал опыт автора, использование произвольных лучей, близких к данному или, более точно, дифференциалов действительных лучей открывает широкие возможности для упрощения и повышения эффективности самых различных программ автоматизированного проектирования оптических систем. Настоящая работа посвящается рассмотрению математического аппарата и алгоритмов расчета дифференциалов лучей через произвольную оптическую систему.

Основные определения и системы координат.

В настоящее время общепринято связывать с каждой поверхностью так называемую систему координат Федера [1], начало которой помещено в вершину поверхности, а плоскость *xoy* касается поверхности. Оптическая поверхность описывается уравнением в этой системе координат:

$$f(s) = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ – радиус-вектор точки на поверхности.

В каждой точке поверхности определены вектор $\mathbf{g}$ градиента функции $f(s)$, то есть вектор нормали к поверхности и симметрическая матрица Гессе $\mathbf{H}$ вторых производных f по $\mathbf{s}$ или первых производных $\mathbf{g}$ по $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{g} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}; \qquad \mathbf{H} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{s}^2} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{s}}. \tag{2}$$

Не обсуждая здесь конкретный выбор уравнения (1), потребуем только, чтобы в вершине поверхности вектор нормали $\mathbf{g}$ совпадал бы с положительным направлением оси *z*.

Действительный луч определяется двумя векторами: радиус-вектором $\mathbf{s}$ точки пересечения луча с поверхностью и ортом $\mathbf{a}$ направления (рис.1). Определим дифференциал луча как совокупность приращений $d\mathbf{s}$ и $d\mathbf{a}$ векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{a}$ соответственно. Указанные векторы удовлетворяют следующим очевидным соотношениям:

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} = 1; \tag{3}$$

$$(\mathbf{g}, d\mathbf{s}) = \mathbf{g}^{\mathrm{T}} d\mathbf{s} = d\mathbf{s}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = 0 \tag{4}$$

$$(\mathbf{a}, d\mathbf{a}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} d\mathbf{a} = d\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} = 0, \tag{5}$$

где запись $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} d\mathbf{a}$ используется для скалярного произведения векторов в матричной форме, т – индекс транспонирования.

Векторы **s**, **a** и d**s**, d**a** можно объединить в шестимерные векторы **x** и d**x** луча и дифференциала луча

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}; \qquad d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} d\mathbf{s} \\ d\mathbf{a} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

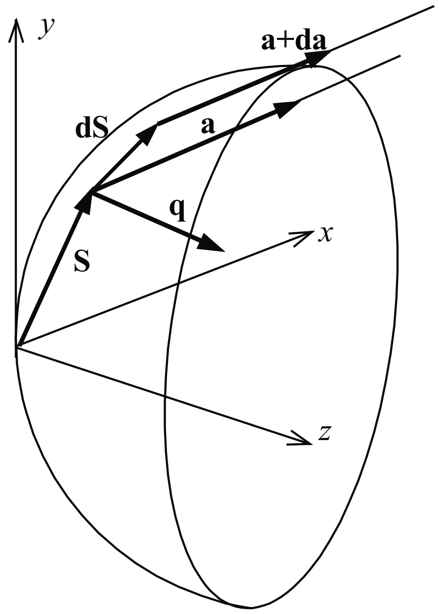

Рис. 1

Естественно, что из шести компонент каждого из векторов только четыре являются независимыми с учетом условий (3)-(5) и уравнения (1), поэтому, вообще говоря, векторы луча и дифференциала луча можно представить в виде четырехмерных векторов, однако для данной статьи это не является существенным.

Задача расчета луча и дифференциала луча.

Пусть известны векторы $\mathbf{x}'_{k-1}$ и $d\mathbf{x}'_{k-1}$ луча и дифференциала этого луча, преломленные на предыдущей поверхности, в системе координат, связанной с предыдущей поверхностью. Пусть также известны вектор $\mathbf{d}_{k-1}$ и ортогональная матрица $\mathbf{\Phi}_{k-1}$ показывающие положение и ориентацию системы Федера данной поверхности относительно предыдущей [2], параметры уравнения (1) данной поверхности и относительный показатель преломления $n_r=n/n'$ для данной поверхности. Необходимо найти векторы $\mathbf{x}_k'$ и $d\mathbf{x}_k'$ преломленные на данной поверхности. Повторяя этот процесс циклически, от первой поверхности до последней, произведем расчет луча через систему поверхностей.

Расчет луча через одну поверхность разбивается на три принципиально различающихся между собой этапа.

Первый этап – преобразование координат, т. е. переход от системы координат x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1} к системе x_k, y_k, z_k – описывается следующими выражениями:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{\Phi}_{k-1}(\mathbf{s}'_{k-1} - \mathbf{d}_{k-1});$$

$$\mathbf{a}_k = \mathbf{\Phi}_{k-1}\mathbf{a}'_{k-1}.$$

Дифференцируя эти выражения, получаем формулы преобразования для дифференциала луча:

$$d\mathbf{s}_k = \mathbf{\Phi}_{k-1} d\mathbf{s}'_{k-1};$$

$$d\mathbf{a}_k = \mathbf{\Phi}_{k-1} d\mathbf{a}'_{k-1}.$$

Для шестимерных векторов (6) соответствующие формулы принимают вид:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}(\mathbf{x}'_k - \mathbf{b}_{k-1});$$

$$d\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1} d\mathbf{x}'_k,$$

где

$$\underset{6\times 6}{\mathbf{F}_{k-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}_{k-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{\Phi}_{k-1} \end{pmatrix}; \qquad \underset{6\times 1}{\mathbf{b}_{k-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как все дальнейшие действия производятся в системе координат данной k-й поверхности, для сокращения записи индекс k опускается.

Второй этап – перенос точки встречи луча от предыдущей к данной поверхности – описывается формулой

$$\mathbf{s}' = \mathbf{s} + \mathbf{a}l \qquad (7)$$

(вектор **a** на этом этапе не изменяется). Длина луча l между поверхностями находится из решения уравнения, полученного подстановкой (7) в (1) $f(\mathbf{s}') = f(\mathbf{s} + \mathbf{a}l) = 0$ известными методами [3–5].

Дифференцируя (7), получим выражение переноса для дифференциала $d\mathbf{s}$ луча (дифференциал $d\mathbf{a}$ не изменяется при переносе):

$$d\mathbf{s}' = d\mathbf{s} + d\mathbf{a}l + \mathbf{a}dl. \qquad (8)$$

Для определения величины dl умножим (8) скалярно на вектор нормали **g**, т. с. на $\mathbf{g}^{\mathrm{T}}$ слева и воспользуемся
условием (4) $\mathbf{g}^{\mathrm{T}} d\mathbf{s}' = 0$:

$$\mathbf{g}^{\mathrm{T}} d\mathbf{s}' = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}(d\mathbf{s} + d\mathbf{a}l) + \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}dl, \quad \text{откуда} \quad dl = -\frac{1}{q}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}(d\mathbf{s} + d\mathbf{a}l),$$

где $q = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = (\mathbf{g}, \mathbf{a})$.

Подставляя в (8) полученное выражение, получаем

$$d\mathbf{s}' = (\mathbf{I} - \frac{1}{q}\mathbf{a}\mathbf{g}^{\mathrm{T}})(d\mathbf{s} + d\mathbf{a}l) = \mathbf{P}(d\mathbf{s} + d\mathbf{a}l), \quad (9)$$

где матрица $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{q}\mathbf{a}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}$ представляет собой оператор, проектирующий лучом **a** на касательную к поверхности плоскость. Как всякий проектирующий оператор, он вырожден и при возведении его в любую целую степень не изменяется.

Для шестимерных векторов (6) уравнения переноса запишутся в виде

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{T}d\mathbf{x}, \quad (10)$$

где $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P}l \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ – матрица 6×6 переноса дифференциала луча, **I** – единичная матрица 3×3. При составлении программ матричное выражение (10) проще всего реализуется следующей цепочкой формул последовательного перевычисления вектора $d\mathbf{s}$:

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{s} + d\mathbf{a}l;$$

$$dl = -q^{-1}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}d\mathbf{s};$$

$$d\mathbf{s} = d\mathbf{s} + \mathbf{a}dl$$

Для всех дифференциалов данного луча матрица переноса **T** постоянна, для действительных лучей длина луча l и вектор **g**, а, следовательно, и матрица переноса меняются от луча к лучу, поэтому матричная запись переноса для действительных лучей не имеет практического интереса и не приводится здесь. *Третий этап – преломление* – реализуется обычно по описанным в литературе [3–5] векторным формулам преломления, которые, однако, требуют приведения вектора нормали к единичной длине, что в случае несферических поверхностей вызывает появление излишних действий. Нетрудно получить модификацию формул преломления для неединичного вектора нормали **g**:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}n_r + \mathbf{g}\Gamma, \quad (11)$$

где $\Gamma = (q' - n_r q)/\mathbf{g}^2$ – «астигматическая постоянная», $q' = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}'$ – скалярное произведение преломленного луча и нормали, $q' = \mathbf{g}^2 - n_r^2(\mathbf{g}^2 - q^2)$ $\mathbf{g}^2 = \mathbf{g}^{\mathrm{T}}\mathbf{g} = (\mathbf{g},\mathbf{g})$.

Дифференцируя (11), получим формулу преломления для дифференциала $d\mathbf{a}'$ луча (векторы **s** и $d\mathbf{s}$ при преломлении не изменяются):

$$d\mathbf{a}' = d\mathbf{a}n_r + d\mathbf{g}\Gamma + \mathbf{g}d\Gamma. \quad (12)$$

Для нахождения $d\Gamma$ умножим (12) слева на $\mathbf{a}'^{\mathrm{T}}$ и воспользуемся условием (5). Заметим также, что из (2) следует $d\mathbf{g} = \mathbf{H}d\mathbf{s}$. Окончательно получим:

$$d\mathbf{a}' = \mathbf{P}'(d\mathbf{a}n_r + \mathbf{H}\mathbf{g}\mathbf{s}\Gamma). \quad (13)$$

где $\mathbf{P}' = \mathbf{I} - \frac{1}{q'}\mathbf{g}\mathbf{a}'^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} - (\mathbf{a}'^{\mathrm{T}}\mathbf{g})^{-1}\mathbf{g}\mathbf{a}'^{\mathrm{T}}$ — оператор, проектирующий вектором нормали $\mathbf{g}$ на плоскость, нормальную преломленному лучу.

Здесь полезно ввести в рассмотрение **хроматические дифференциалы** луча, при преломлении которых учитывается изменение показателей преломления n и n' с длиной волны, приводящее к изменению относительного показателя n_r данной поверхности на величину dn_r. Использование хроматических дифференциалов может заменить во многих случаях расчет лучей дополнительных длин волн. С учетом хроматизма при дифференцировании (11) появляется еще один член $(\mathbf{a}+d\mathbf{a})\, dn_r$, а окончательное выражение принимает вид

$$d\mathbf{a}' = \mathbf{P}'[n_r(d\mathbf{a}(1+\delta) + a\delta) + \mathbf{H}d\mathbf{s}\Gamma], \quad \text{где } \delta = \frac{dn_r}{n_r}. \tag{14}$$

Для шестимерных векторов дифференциалов $d\mathbf{x}$ формулы преломления запишутся в виде

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{R}(d\mathbf{x} + \mathbf{c}), \tag{15}$$

где $\underset{6\times 6}{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{P}'\mathbf{H}\Gamma & \mathbf{P}'n_r \end{pmatrix}$ – матрица преломления, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{a}\delta \end{pmatrix}$ – хроматическая добавка.

При составлении программы для ЭВМ матричные выражения (14) или (15) реализуются в виде последовательности формул:

$$d\mathbf{a} = (d\mathbf{a} + \mathbf{a}\delta)n_r + \mathbf{H}d\mathbf{s}\Gamma;$$

$$d\Gamma = -\frac{1}{q'}\mathbf{g}^{\mathrm{T}}d\mathbf{a};$$

$$d\mathbf{a} = d\mathbf{a} + \mathbf{g}d\Gamma.$$

Матричная запись формул преобразования координат, переноса и преломления дифференциалов луча на данной поверхности, примененная последовательно ко всем поверхностям системы, позволяет получить простые линейные соотношения, полностью описывающие свойства оптической системы в окрестности данного действительного луча, в том числе с учетом небольших изменений показателя преломления:

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{T}d\mathbf{x} + \mathbf{c}, \tag{16}$$

где $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}'$ — шестимерные векторы (6) дифференциалов луча на входе (первой поверхности) и на выходе (последней поверхности) системы, $\mathbf{T} = \mathbf{R}_p\mathbf{T}_p\mathbf{\Phi}_{p\text{-}1}\ldots\mathbf{R}_k\mathbf{T}_k\mathbf{\Phi}_{k\text{-}1}\ldots\mathbf{R}_2\mathbf{T}_2\mathbf{\Phi}_1\mathbf{R}_1$ – матрица преобразования (гауссова матрица) окрестности луча, $\mathbf{c} = \mathbf{R}_p\left(\ldots\mathbf{T}_3\mathbf{\Phi}_2\mathbf{R}_2 \times \left(\mathbf{T}_2\mathbf{\Phi}_1\mathbf{R}_1\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2\right) + \mathbf{c}_3 + \ldots + \mathbf{c}_p\right)$ – вектор хроматического смещения. Матрица $\mathbf{T}$ и вектор $\mathbf{c}$ постоянны для окрестности данного луча и являются ее полными характеристиками. Знание их заменяет в соответствии с выражением (16) расчет лучей, близких к данному.

В заключение отметим, что полученные выражения относятся к общему случаю «косого» луча в произвольной оптической системе. В частном случае меридионального луча в центрированной системе могут быть получены существенно более простые выражения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peeler O. P. *Optical Calculations with Automatic Computing Machinery*. – Journal of the Optical Society of America, vol. 41, № 9, p. 1157, 1951.
2. Пейсахсон Н. В., Тарнакин Н. Ир. *О расчете хода лучей в произвольной оптической системе*. Оптико-механическая промышленность, 1966, № 11.
3. Слюсарев Г. Г. *Методы расчета оптических систем* Л.: Машиностроение, 1969.
4. Feder D. P. *Calculation of an Optical Merit Function and its Derivatives with Respect to the System Parameters*. – Jorun. of the Optical Society of America, vol. 47, p. 913, 1957, № 6.
5. Герцбергер М. *Современная геометрическая оптика*. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1962.