ВЫЧИСЛЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА КОЛЬЦЕ ПОЛИНОМОВ ЦЕРНИКЕ

РОДИОНОВ С.А., УСОСКИН В.В., ПРЖЕВАЛИНСКИЙ Л.И.

Приводится новый алгоритм вычисления полиномов Цернике, ортогональных на кольцевой области. Необходимый полином вычисляется через два предшествующих с помощью трехчленного рекуррентного соотношения. Приводятся выражения для определения коэффициентов этого соотношения.

В настоящее время для описания функции волновой аберрации все чаще применяется разложение этой функции по ортогональной системе полиномов Цернике. Достоинства этого способа разложения функции волновой аберрации подробно изложены в [1, 2], где описывается полная система полиномов, ортогональных внутри единичного круга. Однако для некоторых приложений, например, при описании волновой аберрации в астрономических системах большой интерес представляет получение полиномов Цернике, ортогональных на кольце, с заданным коэффициентом центрального экранирования к. В работе [3] было дано обобщение полиномов Цернике на кольцевую область, но только для случая $m=0$, т. е. для полиномов с круговой симметрией, что, вообще говоря, тривиально. В настоящей работе дается описание алгоритма, пригодного для получения кольцевых полиномов Цернике для любого *m.* Все приведенные ниже рассуждения будут, естественно, справедливы и для круглого зрачка, если положить везде $\varepsilon=0$. Следуя [1], полиномы Цернике от полярных координат ρ, φ определим следующим образом:

$$V_n^{\pm m}\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right) = R_n^m(\rho) = \exp(\pm im\varphi) \tag{1}$$

здесь индексы *m, n* – целые положительные числа, $n \geq m$, $n-m$ – четное число.

Рассмотрим получение выражений для радиальных полиномов $R_n^m(\rho)$. Как следует из (1), эти полиномы можно записать в виде

$$R_n^m(\rho) = t^{\frac{m}{2}} Q_k^m(t) \tag{2}$$

где $t=\rho^2$, $k=\dfrac{n-m}{2}$, а $Q_k^m(t)$ – полином от t степени *k.* Из ортогональности полиномов $R_n^m(\rho)$ вытекает, что полиномы $Q_k^m(t)$ должны удовлетворять соотношению:

$$\int_{\varepsilon^2}^{1} t^m Q_k^m(t) Q_{k}^m(t)\,dt = \lambda_k^m \delta_{kk'} \tag{3}$$

где $\delta_{kk'}$ – символ Кронекера, т. е. полиномы $Q_k^m(t)$ являются ортогональными полиномами с весом t^m на интервале [ε^2, 1]. Норму λ_k^m этих полиномов определим из условия

$$Q_k^m(1) = 1 \tag{4}$$

Систему полиномов $Q_k^m(t)$ можно получить ортогонализацией последовательности натуральных степеней $1, t, t^2, ..., t^k$, а каждый полином $Q_k^m(t)$ представить разложением:

$$Q_k^m(t) = \sum_{j=0}^{k} g_{kj} t^j \tag{5}$$

В соответствии с теоремой об ортогональных элементах [4] для ортогональных полиномов $Q_k^m(t)$ существует следующее трехчленное рекуррентное соотношение:

$$Q_0^m(t) = 1$$

$$Q_1^m(t) = \gamma_1^m \left[t - \alpha_1^m\right] \tag{6}$$

$$Q_k^m(t) = \gamma_{k+1}^m \left[Q_{k+1}^m(t)(t - \alpha_1^m) - \beta_{k+1}^m Q_{k-1}^m(t)\right]$$

Аналогичное рекуррентное соотношение можно получить для коэффицентов разложения (5):

$$g_{k+1,j}^m = \gamma_{k+1}^m \left(g_{k,j-1}^m - \alpha_{k+1}^m g_{k,j}^m - \beta_{k+1}^m g_{k-1,j}^m\right) \tag{7}$$

Легко видеть, что матрица G_k^m коэффициентов g_{kj}^m разложения (5) является нижней треугольной. Зная для всех индексов *k* и *m* значения коэффициентов $\alpha_k^m, \beta_k^m, \gamma_k^m$, можно получить требуемый полином Цернике через два предшествующих по индексу *k.* Следовательно, задача заключается в построении алгоритма нахождения коэффициентов $\alpha_k^m, \beta_k^m, \gamma_k^m$ рекуррентного соотношения (6). Умножая соотношение (6) последовательно на $Q_k^m(t)$, $Q_{k-1}^m(t)$, $Q_{k+1}^m(t)$ и интегрируя полученные равенства на интервале [ε^2, 1] с весом t^m, учитывая ортогональность системы полиномом $Q_k^m(t)$ легко получить:

$$\alpha_{k+1}^m = \frac{1}{\lambda_k} \int_{\varepsilon^2}^{1} t^{m+1} [Q_k^m(t)]^2 \, dt \tag{8}$$

$$\beta_{k+1}^m = \frac{1}{\lambda_{k-1}} \int_{\varepsilon^2}^{1} t^{m+1} Q_k^m(t) Q_{k-1}^m(t) dt \tag{9}$$

$$\lambda_{k+1}^m = \gamma_{k+1}^m \beta_{k+2}^m \lambda_k^m \tag{10}$$

Уменьшив в (10) индекс на единицу, для [3] получим более простое выражение, чем (9):

$$\beta_{k+1}^m = \frac{\lambda_k^m}{\gamma_k^m \lambda_{k-1}^m} \tag{11}$$

В (8) – (11) λ_k^m определяется условием ортогональности (3). Выражение для γ_{k+1}^m можно получить из условия (4):

$$\gamma_{л+1}^m = \frac{1}{1-\alpha_{k+1}^m - \beta_{k+1}^m} \qquad (12)$$

Найдем выражения, связывающие коэффициенты рекуррентного соотношения (6) и коэффициенты $g_{k,j}^m$ разложения (5).

Подставив (5) в (4) и (8) и проведя несложные преобразования, получим:

$$\lambda_k^m = S_{kk}; \quad \alpha_{k+1}^m = S_{kk}^1 : \lambda_k^m \qquad (13)$$

$$S_{kk} = \sum_{j=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \frac{g_{ki}^m g_{kj}^m (1-\varepsilon^{2(m+i+j+1)})}{m+i+j+1} \qquad (14)$$

$$S_{kk}^1 = \sum_{j=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} \frac{g_{ki}^m g_{kj}^m (1-\varepsilon^{2(m+i+j+2)})}{m+i+j+2}$$

ε – коэффициент центрального экранирования. Тогда алгоритм определения коэффициентов α_k^m, β_k^m, γ_k^m можно построить по следующей схеме:

1. Вычисляем значения α_1^m, β_1^m, γ_1^m, λ_1^m:

$$\alpha_1^m = \frac{(m+1)(1-\varepsilon^{2(m+2)})}{(m+2)(1-\varepsilon^{2(m+1)})}; \quad \beta_1^m = 0; \quad \gamma_1^m = \frac{1}{1-\alpha_1^m}; \quad \lambda_1^m = \frac{m+1}{1-\varepsilon^{2(m+1)}}$$

2. Определяем ненулевые элементы первой и второй строки матрицы G^m:

$$g_{00} = 1, \quad g_{10} = -\gamma_1^m \alpha_1^m, \quad g_{11} = \gamma_1^m$$

3. Из (14) вычисляем суммы S_{kk}, S_{kk}^1.

4. Из выражений (11)–(13) находим значения α_{k+1}^m, β_{k+1}^m, γ_{k+1}^m, λ_k^m.

5. По рекуррентному соотношению (7) определяем следующую строку матрицы G^m. Вычисленная строка и строки, вычисленные на предыдущих шагах, запоминаются.

6. Повторяя пп. 3, 4, 5 необходимое число раз, находим коэффициенты $\alpha_k^m, \beta_k^m, \gamma_k^m$ для всех значений индекса *k* при фиксированном индексе *m.*

7. Повторяя пп. 1–6, определяем $\alpha_k^m, \beta_k^m, \gamma_k^m$ для всех значений индекса *m.*

Описанная выше процедура была реализована в виде стандартной программы на алгоритмическом языке ФОРТРАН. Полученные по этой программе коэффициенты рекуррентного соотношения используются для генерации по выражениям (6) полиномов Цернике в программах анализа аберраций оптических систем и в программах обработки результатов контроля оптических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – М.: Наука, 1970.
2. *Бездитько С. Н.* Применение полиномов Цернике в оптике. – ОМП, 1974, № 9.
3. *Бездитько С. Н.* Определение коэффициентов разложения волновой аберрации по полиномам Цернике. – ОМП, 1975, № 7.
4. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. Т. 1. – М.: Наука, 1973.