О ВЕКТОРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ АСТИГМАТИЗМА, ВНОСИМОГО ЦИЛИНДРИЧНОСТЬЮ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОПТИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ

С. А. РОДИОНОВ

Вводится векторное описание астигматизма или цилиндричности оптических деталей, при этом длина вектора равна величине астигматизма или цилиндричности, а угол ориентации – удвоенному углу ориентации главного сечения цилиндричности.

Известно, что одной из основных технологических погрешностей, возникающих при сборке оптических систем приборов, является астигматизм, вносимый цилиндричностью поверхностей оптических деталей [1]. Для назначения допуска на остаточную цилиндричность поверхностей отдельных линз необходимо знать закон суммирования астигматизма при произвольной (случайной) ориентации главных сечений.

Иногда астигматизм считают векторной ошибкой, при этом длина вектора принимается равной величине астигматизма (цилиндричности), а угол с осью – углу ориентации оси цилиндра [2]. Однако при таком определении астигматизм не обладает всеми свойствами векторной ошибки, так как при повороте на 180° не изменяется.

Рассмотрим влияние какой-либо оптической поверхности на проходящий волновой фронт. В приближении бесконечно узкого пучка это влияние описывается членами не выше второй степени:

$$\omega(x, y) = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \tag{1}$$

где $\omega(x, y)$ – вносимая волновая аберрация, x, y – декартовы координаты на поверхности волнового фронта или детали. Представим (1) в виде

$$\omega(x, y) = d\left(x^2 + y^2\right) + a\left(x^2 - y^2\right) + 2bxy, \tag{2}$$

где

$$d = \frac{a_{20} + a_{02}}{2}; \quad a = \frac{a_{20} - a_{02}}{2}; \quad b = \frac{1}{2}a_{11}.$$

Член $d\left(x^2 + y^2\right)$ описывает деформацию, симметричную относительно вращения вокруг оси системы, т. е. соответствует расфокусировке, вносимой поверхностью, а собственно астигматизм, вызванный цилиндричностью поверхности, описывают члены $a\left(x^2 - y^2\right)$ и $2bxy$. В выражении (2) главные сечения деформации, вносимой поверхностью, не совпадают с осями координат x, y. Повернем систему координат на угол φ до совпадения ее осей с главными сечениями деформации, при этом член, содержащий произведение координат, станет равным нулю:

$$W\left(x', y'\right) = d'\left(x'^2 + y'^2\right) + a_i'\left(x'^2 - y'^2\right) + 2b'x'y'; \quad b' = 0, \tag{3}$$

где x', y' – координаты в системе, повернутой на угол φ. Пользуясь формулами преобразования координат [3]

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi;$$

$$y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi,$$

получим выражения для коэффициентов d', a', b':

$$d' = d;\ a' = a\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi;\ b' = a\sin 2\varphi - b\cos 2\varphi = 0, \tag{4}$$

откуда $tg 2\varphi = \dfrac{b}{a}$.

Формулы (4) показывают, что коэффициенты a и b, описывающие астигматизм, преобразуются при повороте координат как проекции некоторого вектора, поворачиваемого на удвоенный угол. Длина этого вектора $a_0 = \sqrt{a'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Итак, астигматизм, или цилиндричность поверхностей в оптической системе, может описываться двумерным вектором, длина которого равна разности стрелок деформации волнового фронта в его главных сечениях, а угол с осью x – удвоенному углу между этой осью и первым главным сечением. При повороте детали вокруг оси системы, т. е. вокруг нормали к поверхности, вектор вносимого деталью астигматизма поворачивается на удвоенный угол.

Так как ориентация поверхности относительно оптической оси системы произвольна, угол φ и, следовательно, угол φ может принимать с равной вероятностью любые значения в интервале $[0, 2\pi]$, поэтому астигматизм, вносимый технологической цилиндричностью поверхностей деталей, есть случайный релеевский вектор [3] и должен суммироваться по обычному закону суммирования таких векторов, точно так же как, например, клиновидность оптических деталей или децентрировка. Экспериментальные результаты, приведенные в [2], подтверждают справедливость этого закона суммирования для астигматизма.

Коэффициенты d (расфокусировки) и a_0 (астигматизма) можно легко связать с отклонениями поверхности от номинальной сферы, выраженными в интерференционных полосах N и ΔN, в соответствии с ГОСТом 2.412–68. Выражения (1) – (3) описывают волновую аберрацию в пределах рабочего пучка [1], а величины N, ΔN – отклонение поверхности в пределах контрольного диаметра, т.е. светового диаметра детали или пробного стекла [4]. Нормируем координаты x, y таким образом, чтобы в этих координатах диаметр рабочего пучка был равен двум. Тогда в главных сечениях деформации имеем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{\max} &= d + a_0 = N_{\max} k \\ \omega_{\min} &= d - a_0 = N_{\min} k \end{aligned}\right\} \text{ в длинах волн,} \tag{5}$$

где $k = \dfrac{n-1}{2} \cdot \dfrac{D^2_{раб}}{D^2_{кон}}$, n показатель преломления, $D_{раб}$, $D_{кон}$ – рабочий и контрольный диаметры соответственно. Из (5) получаем

$$\left. \begin{aligned} d &= \frac{N_{\max} + N_{\min}}{2} k \\ a_0 &= \frac{N_{\max} - N_{\min}}{2} k \end{aligned} \right\} \text{в длинах волн.} \qquad (6)$$

По ГОСТу 2.412–68 общая ошибка N определяется как число интерференционных полос в том сечении, где оно максимально, астигматизм или местная ошибка ΔN – как разность между количеством полос в максимальном и минимальном сечениях, т.е. $N = N_{\max}$, $\Delta N = N_{\max} - N_{\min}$. Тогда

$$d = \left(N - \frac{\Delta N}{2} \right) k; \; a_0 = \frac{\Delta N}{2} k. \qquad (7)$$

Выражения (6) и (7) показывают, что за общую ошибку N удобнее принять полусумму интерференционных полос в двух главных сечениях: $N = \dfrac{N_{\max} + N_{\min}}{2}$, при этом формулы (7) упрощаются: $d = Nk$; $a_0 = \dfrac{\Delta N}{2} k$.

Полезно отметить, что коэффициенты a, b, описывающие проекции вектора астигматизма на оси x, y тождественны коэффициентам разложения вносимой волновой аберрации c_{22} и s_{22} по полиномам Цернике [5] в виде:

$$\omega(\rho, \varphi) = c_{20} \boldsymbol{P}_2^0(\rho) + \boldsymbol{P}_2^2(\rho)(c_{22} \cos 2\varphi + s_{22} \sin 2\varphi),$$

где $\boldsymbol{P}_2^0(\rho) = 2\rho^2 - 1$ и $\boldsymbol{P}_2^2(\rho) = \rho^2$ – радиальные полиномы Цернике, ρ, φ – полярные координаты, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\varphi = arctg \dfrac{y}{x}$.

Следовательно, церниковские коэффициенты c_{22} и s_{22} могут рассматриваться как проекции вектора астигматизма на оси x и y соответственно, длина вектора астигматизма равна $\sqrt{c_{22}^2 + s_{22}^2}$.

В заключение заметим, что векторное представление астигматизма удобно применять также при расчете астигматизма вдоль произвольного главного луча в нецентрированных оптических системах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Погарев Г. В. Юстировка оптических приборов. Л., «Машиностроение», 1968, с. 178.
2. Бурбаев А. М. О суммировании векторных погрешностей оптических деталей. Труды ЛИТМО, вып. 75, Изд. ЛИТМО, 1974, с. 86.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., «Наука», 1974, с. 56.
4. ГОСТ 2.412–68 Правила выполнения чертежей и схем оптических изделий.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., «Наука», 1970, с. 503, 835.