О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ВОЛНОВОЙ АБЕРРАЦИИ ПО ЕЕ ЗНАЧЕНИЯМ ИЛИ ЗНАЧЕНИЯМ ПОПЕРЕЧНЫХ АБЕРРАЦИЙ

Б. И. ЛЕВИТ, А. Г. РАММ, С. А. РОДИОНОВ

Даны формулы для аппроксимации волновых аберраций на круге и кольце с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа специального вида. Приведены оценки погрешности.

При расчете оптических систем или при их экспериментальном исследовании обычно определяют значения волновой аберрации в отдельных точках зрачка. Часто вместо волновой аберрации получают значения поперечных аберраций, которые пропорциональны производным волновой аберрации по координатам на зрачке. Введением канонических координат [1] в большинстве случаев зрачок трансформируется в единичный круг или (при наличии центрального экранирования) в кольцо. На этом круге существует волновая аберрация $\omega(r,\varphi)$.

Будем считать функцию $\omega(r,\varphi)$ дважды непрерывно дифференцируемой по своим аргументам в области $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2x$. Аппроксимирующее выражение ищем в виде

$$\omega_n(r,\varphi) = a_0(r) + \sum_{k=1}^{n} a_k(r)\cos k\varphi + b_k(r)\sin k\varphi. \qquad (1)$$

Пусть

$$\varphi_s = \frac{2s\pi}{2n+1}\ , \ s = 0,1,...,2n\,.$$

Для выполнения равенства $\omega_n(r,\varphi_s) = \omega(r,\varphi_s)$, $s=0,1,\dots,2n$, необходимо и достаточно, чтобы функции $a_0(r)$, $a_1(r)$, $b_1(r),\dots,$ $a_n(r), b_n(r)$ определялись равенствами

$$a_0(r) = \frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\omega(r,\varphi_s), \qquad (2)$$

$$a_k(r) = \frac{2}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\omega(r,\varphi_s)\cos\left(\frac{2\pi s}{2n+1}k\right), \qquad (3)$$

$$b_k(r) = \frac{2}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\omega(r,\varphi_s)\sin\left(\frac{2\pi s}{2n+1}k\right). \qquad (4)$$

Обозначим $\omega(r,\varphi_s) = \omega_s(r)$, $s = 0,1,...,2n$. Заменим $\omega_s(r)$ интерполяционным полиномом Лагранжа с узлами в корнях полинома Чебышева, отнесенного к отрезку $[0,1]$,

$$\omega_s(r) \cong L_{N,s(r)}\,,$$

где N – степень полинома Лагранжа. Тогда

$$\omega(r,\varphi)\approx\frac{1}{2n+1}\left\{\sum_{s=0}^{2n}L_{N,s}(r)+2\sum_{k=1}^{n}\left[\cos k\varphi\sum_{s=0}^{2n}L_{N,s}\cos\left(k\frac{2\pi s}{2n+1}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sin k\varphi\sum_{s=0}^{2n}L_{N,s}\sin\left(k\frac{2\pi s}{2n+1}\right)\right]\right\}. \tag{5}$$

Учитывая, что $\omega(r_j,\varphi_s)=L_{N,s}(r_j)$, $1\le j\le N$, где r_j – узлы интерполяционного полинома Лагранжа, отметим, что формула (5) позволяет строить аппроксимирующее выражение для функции $\omega(r,\varphi)$ по известным значениям этой функции в точках r_j, φ_s, $0\le s\le 2n$, $1\le j\le N$; всего используется $(2n+1)N$ точек.

Оценим погрешности аппроксимации. Очевидно,

$$L_{N,s}=\sum_{j=0}^{N}f(r_j,\varphi_s)l_j(r),\ l_j(r)=l_{N,j}(r)=\frac{T_{N+1}(r)}{T_{N+1}(r_j)(r-r_i)},$$
$$T_{N+1}(r)=\prod_{j=0}^{N}(r-r_j),\ r_j=r_{j,N}=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2j+1}{2N+1}\pi\right)+0{,}5,\ \ 0\le j\le N. \tag{6}$$

Функция $\omega_n(r,\varphi)$ с коэффициентами (2)-(4) представима в виде

$$\omega_n(r,\varphi)=\frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\omega(r,\varphi_s)D_n(\varphi-\varphi_s),$$

$$\varphi_s=\frac{2\pi s}{2n+1},\ s=0,...,2n,\ D_n=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Окончательно формулу (5) можно записать в виде

$$\omega(r,\varphi)\cong F_{n,N}=\frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}D_n(\varphi-\varphi_s)\sum_{j=0}^{N}\omega(r_j,\varphi_s)l_{N,j}(r)=$$
$$=\frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\sum_{j=0}^{N}D_n(\varphi-\varphi_s)l_{N,j}(r)\omega(r_j,\varphi_s). \tag{7}$$

Пусть $Q_{n,N}(r,\varphi)$ – полином наилучшего приближения функции $\omega(r,\varphi)$, $0\le r\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$, полиномами вида

$$\sum_{t=0}^{n}\sum_{p=0}^{N}a_{t,p}r^p\cos t\varphi+b_{t,p}r^p\sin t\varphi. \tag{8}$$

Оценим погрешность формулы (7):

$$\begin{aligned}&\left|\omega(r,\varphi)-F_{n,N}(r,\varphi)\right|\le\left|\omega(r,\varphi)-Q_{n,N}(r,\varphi)\right|+\left|Q_{n,N}(r,\varphi)-F_{n,N}(r,\varphi)\right|;\\&\left\|f(r,\varphi)-Q_{n,N}(r,\varphi)\right\|=E_{n,N}(\omega),\end{aligned}\qquad(7')$$

$E_{n,N}(\omega)$ – наилучшее приближение функции $\omega(r,\varphi)$ полиномами вида (8).

Для оценки второго слагаемого в правой части (7’) представим $Q_{n,N}(r,\varphi)$ в виде

$$Q_{n,N}=\frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\sum_{j=0}^{N}D_n(\varphi-\varphi_s)l_{N,j}(r)Q_{n,N}(r_j,\varphi_s)$$

(это всегда можно сделать и притом единственным образом). Тогда

$$\left\|Q_{n,N}-F_{n,F}\right\|\le\frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\sum_{j=0}^{N}\left|D_n(\varphi-\varphi_s)l_{N,j}(r)\right|\times$$

$$\times\left|Q_{n,N}(r_j,\varphi_s)-\omega(r_j,\varphi_s)\right|\le$$

$$\le E_{n,N}(\omega)\frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\left|D_0(\overline{\varphi-\varphi_s})\right|\sum_{j=0}^{N}\left|l_{N,j}(r)\right|$$

Известно ([2], стр. 41), что

$$\sum_{j=0}^{N}\left|l_{N,j}(r)\right|\le 8+\frac{4}{\pi}\ln(N+1)\ \text{и}\ \frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\left|D_n(\varphi-\varphi_s)\right|\le\frac{2}{\pi}\ln n+\frac{\pi^2}{24}.$$

Таким образом,

$$\left\|\omega(r,\varphi)-F_{n,N}(r,\varphi)\right\|\le E_{n,N}(w)\left[\left(\frac{2}{\pi}\ln n+\frac{\pi^2}{24}\right)\left(8+\frac{4}{\pi}\ln(N+1)\right)+1\right].$$

Существование непрерывных вторых производных функции $\omega(r,\varphi)$ по обоим аргументам обеспечивает порядок погрешности $0\left(\frac{\ln n\cdot\ln N}{n^2N^2}\right)$.

В том случае, если нужно аппроксимировать $\omega(r,\varphi)$ на кольце $1\le\alpha\le r\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$, можно воспользоваться формулой (5), отнеся полиномы $L_{N,s}$ к промежутку $[a;1]$ с помощью линейной замены переменной $z=\frac{r}{1-\alpha}+\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Пусть нужно аппроксимировать функцию $\omega(r,\varphi)$ при $\alpha\le r\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$, причем известны значения $\frac{\partial\omega(r,\varphi)}{\partial r}$ и $\frac{\partial\omega(r,\varphi)}{\partial\varphi}$.

На дискретном множестве точек из этой области построим аппроксимирующее выражение (5) для $\frac{\partial\omega(r,\varphi)}{\partial r}$:

$$F_{n,N} \cong \frac{\partial\omega(r,\varphi)}{\partial r}.$$

Очевидно, что

$$\omega(r,\varphi) = \omega(r_0,\varphi) + \int_{r_0}^{r} \frac{\partial\omega(\rho,\varphi)}{\partial\rho} d\rho, \ \omega(r,\varphi) \cong \omega(r_0,\varphi) + \int_{r_0}^{r} E_{n,N}(\rho,\varphi) d\rho. \quad (9)$$

Для нахождения $\omega(r_0,\varphi)$ используем значения $\frac{\partial\omega(r,\varphi)}{\partial\varphi}$ которые будем считать известными в точках (r_0,φ_s), где r_0 совпадает с одним из радиусов r_j (см. (6)), а $\varphi = \frac{2\pi s}{2n+1}$, s=0, 1,…,2n.

По этим значениям $\left.\frac{\partial\omega(r_0,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_s, 0\le s\le 2n}$ построим интерполяционный тригонометрический полином степени n:

$$\frac{\partial\omega(r_0,\varphi)}{\partial\varphi} \cong P_n(\varphi) = \frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n} \frac{\partial\omega(r_0,\varphi_s)}{\partial\varphi} D_n(\varphi-\varphi_s),$$

$$\omega(r_0,\varphi) = \omega(r_0,0) + \int_0^{\varphi} \frac{\partial\omega(r_0,\psi)}{\partial\psi} d\psi, \ \omega(r_0,\varphi) \cong \omega(r_0,0) + \int_0^{\varphi} P_n(\psi) d\psi. \quad (10)$$

Окончательно из (9) и (10) получаем:

$$\omega(r,\varphi) \cong \omega(r_0,0) + \int_0^{\varphi} P_n(\psi) d\psi + \int_{r_0}^{r} F_{n,N}(\rho,\varphi) d\rho. \quad (11)$$

Таким образом, формула (11) определяет $\omega(r,\varphi)$ с точностью до произвольной постоянной $\omega(r_0,\varphi)$. Интегрирование в (11) производится аналитически. Погрешность аппроксимации функции $\omega(r,\varphi)$ по формуле (11) имеет тот же порядок, что и погрешность аппроксимации функции $\frac{\partial\omega(r,\varphi)}{\partial r}$.

Для оценки эффективности данного метода аппроксимации был проведен численный эксперимент. В качестве исследуемых функций были взяты функции вида

$$\omega(r,\varphi) = \omega_0(r,\varphi) + f(r,\varphi),$$

где

$$\omega_0(r,\varphi) = \sum_{t=0}^{n}\sum_{p=0}^{N} a_{t,p} r^p \cos t\varphi + b_{t,p} r^p \sin t\varphi, \ |a_{t,p}| \le 10, |b_{t,p}| \le 10;$$

$$f(r,\varphi) = 0, \text{ если } I = 1 - \left[\left(\frac{r\sin\varphi-\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{r\cos\alpha-\gamma}{\alpha}\right)^2\right] < 0; \ f(r,\varphi) = cI^2,$$

если $I \geq 0$. $c = const$ $|c| \leq 10$ α=0,2; 0,3; 0,4; $\beta^2 + \gamma^2 \leq 1$.

Функция $f(r,\varphi)$ моделирует местную ошибку («бугор») относительным радиусом α на фоне общей волновой аберрации.

Для этих функций при $n = 14$, $N = 6$ погрешность аппроксимации по формуле (11) для $a = 0{,}4$, $\beta = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}9$ не превышала 2% в тех точках, где $f(r,\varphi) = 0$, и 4%–в тех точках, где $f(r,\varphi) \neq 0$ (наилучший случай). Для $a = 0{,}2$, $\beta = 0{,}5$, погрешность не превышала 10 и 20% соответственно (наихудший случай). Ухудшение качества аппроксимации в последнем случае объясняется большой величиной градиента функции $\dfrac{\partial f(r,\varphi)}{\partial r}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hopkins И. Н. The Canoniral Coordinates in Geometrical and Diffraction Imaging Theory. – Jap Journal of Appl. Phys., 4, Sup.pl, 1965.
2. Турецкий А. Х. Теория интерполирования в задачах Минск, «Высшая школа», 1968.