ПОЛИХРОМАТИЧЕСКАЯ ОПТИЧЕСКАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КАНОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

С. А. РОДИОНОВ

Полихроматическая оптическая передаточная функция (ОПФ) оптических систем представляется в канонических координатах в виде тройного интеграла, область интегрирования которого — параллелепипед с фиксированными размерами, образованный координатными плоскостями, благодаря чему упрощается схема вычислений при расчете ОПФ по волновым аберрациям и волновому хроматизму и уменьшается количество действий.

Для описания передаточных свойств оптических систем, работающих и более или менее широком интервале длин волн света, используется полихроматическая оптическая передаточная функция (ОПФ). Под полихроматической ОПФ D(ν, θ) как функцией пространственной частоты ν и угла ее ориентации θ понимают средневзвешенную от монохроматических ОПФ $D(\lambda,\nu,\theta)$, где весовой функцией служит функция относительной спектральной эффективности $q(\lambda)$:

$$D(\nu,\theta)=\frac{1}{Q}\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}}q(\lambda)D(\lambda,\nu,\theta)d\lambda;\quad Q=\int\limits_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}}q(\lambda)d\lambda. \tag{1}$$

При практических вычислениях интеграл (1) обычно заменяют суммой, что соответствует квадратурной формуле прямоугольников:

$$D(\nu,\theta)\cong\frac{1}{Q}\sum_{i=1}^{n}q(\lambda_i)D(\lambda_i,\nu,\theta);\quad Q=\sum_{i=1}^{n}q(\lambda_i), \tag{2}$$

где λ_i, $i=1,2,\ldots,n$ – некоторый набор длин волн в рабочем интервале от $\lambda_{\min}$ до $\lambda_{\max}$.

При вычислении монохроматических ОПФ $D(\lambda,\nu,\theta)$, входящих в выражения (1) и (2), они представляются в относительных частотах ω, θ_s:

$$\omega=\frac{\nu}{\nu_{\lim}}=\nu\frac{\lambda}{2A},\quad \mathrm{tg}\theta_S=\frac{A_y}{A_z}\mathrm{tg}\theta, \tag{3}$$

где A_y, A_z – меридиональная и сагиттальная апертуры; $A=\left(\frac{\cos^2\theta}{A_y}+\frac{\sin^2\theta}{A_z}\right)^{-1/2}$ – апертура в направлении θ; $\nu_{\lim}$ – предельная частота в направлении θ; λ – длина волны света.

Воспользуемся выражениями для монохроматической ОПФ в относительных частотах, приведенными в работе автора [1]:

$$D(\omega,\theta_S)=D_0(\omega)D_a(\omega,\theta_S), \tag{4}$$

где $D_0(\omega) \cong (1-\omega)(1-\omega^2)^{1/2}$ – безаберрационная ОПФ; $D_a(\omega,\theta_s)$ – аберрационный множитель, определяемый выражением

$$D_a(\omega,\theta_S) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \exp(4\pi i\omega V)\,d\rho_\omega^2\,d\varphi_\omega, \tag{5}$$

где V – функция, представленная разложением по координатам ρ_ω, φ_ω,

$$V = \sum \upsilon_{ij}\rho_\omega^i \cos^j \varphi_\omega. \tag{6}$$

Коэффициенты разложения (6) определяются через коэффициенты ω_{ij} разложения волновой аберрации W по каноническим координатам ρ, φ на зрачке:

$$W(\rho,\varphi) = \sum \omega_{ij}\rho^i \cos^j \varphi. \tag{7}$$

Волновая аберрация W при этом выражается в длинах волн данного монохроматического излучения:

$$W(\rho,\varphi) = \frac{1}{\lambda}\left[< l(\rho,\varphi) > - < l_{pr} >\right],$$

где $< l(\rho,\varphi) >$ – разность оптических длин хода от входной до выходной сферы луча с координатами ρ, φ; $< l_{pr} >$ – то же для главного луча пучка.

Для использования полученных в соответствии с (4) значений $D(\omega,\theta_s)$ в выражении (1) необходимо перевести относительные частоты ω, θ_s в действительные по формулам (3). При этом возникает некоторое неудобство, связанное с тем, что формулы (3) зависят от длины волны λ, поэтому одной и той же действительной частоте ν соответствуют различные значения относительной частоты ω для различных λ. Кроме того, при наличии значительного хроматизма, для получения нужной точности в (2) необходимо брать большое число длин волн. Представляется интересным в связи с этим получить выражение для полихроматической ОПФ не в виде суммы (2), а целиком в канонических координатах, аналогично (4), (5).

По аналогии с каноническими координатами на зрачке, введем вместо длины волны λ безразмерную координату χ которую можно назвать канонической спектральной координатой,

$$\chi = \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda}, \tag{8}$$

где $\lambda_0 = \frac{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}{2}$; $\Delta\lambda = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{2}$.

Хроматизм аберраций оптических систем будет тогда описываться зависимостью волновой аберрации от координаты χ:

$$W(\rho,\varphi) = W(\chi,\rho,\varphi)$$

Учитывая (7), хроматизм W можно описать хроматизмом коэффициентов ω_{ij}. Представим каждый коэффициент ω_{ij} разложением в ряд по степеням χ.

Можно показать, что для большинства практических целей достаточно ограничиться 4-й степенью χ:

$$\omega_{ij} = {}_0\omega_{ij} + {}_1\omega_{ij} + {}_2\omega_{ij} + {}_3\omega_{ij} + {}_4\omega_{ij}. \qquad (9)$$

Коэффициенты ${}_1\omega_{ij} - {}_4\omega_{ij}$ назовем коэффициентами волнового хроматизма, коэффициент ${}_0\omega_{ij}$, очевидно, равен значению ω_{ij} для основной длины волны λ. При этом для устранения «формульного» хроматизма, вызванного тем, что волновая аберрация выражается в длинах волн λ и при изменении длины волны будет меняться даже, например, в зеркальных системах, где разность хода $< l(\rho,\varphi) > - < l_{pr} >$ – не зависит от длины волны, будем выражать волновую аберрацию для любой длины волны λ в основных длинах волн λ_0, т. е.

$$W(\chi,\rho,\varphi) = \frac{1}{\lambda_0}\left[< l(\chi,\rho,\varphi) > - < l_{pr}(\chi) >\right]. \qquad (10)$$

Для того, чтобы избавиться от «формульного» хроматизма выражений (3), приведем ω к основной длине волны. Для этого выразим текущую длину волны λ через основную λ_0 и координату χ:

$$\lambda = \lambda_0(1 + \chi\alpha), \qquad (11)$$

где $\alpha = \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$ – относительная полуширина рабочего интервала длин волн.

В соответствии с (3) для ω получим:

$$\omega = \omega_0(1 + \chi^{\alpha}), \qquad (12)$$

где $\omega_0 = \nu\dfrac{\lambda_0}{2A}$.

Подставив (12) в (4) и (5), получим для монохроматической ОПФ

$$D(\chi,\omega_0,\theta_S) = D_0(\chi,\omega_0)\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\exp(4\pi i\omega_0 V)\,d\rho_\omega^2\,d\varphi_\omega, \qquad (13)$$

где $D_0(\chi,\omega_0) = \left[1 - \omega_0(1 + \chi\alpha)\right]\left[1 - \omega_0{}^2(1 + \chi\alpha)^2\right]^{1/2}$ – безаберрационная монохроматическая ОПФ, а функция $V = V(\chi,\rho_\omega,\varphi_\omega)$ аналогична соответствующей функции в выражении (5) и может быть представлена разложением по трем каноническим координатам $\chi,\rho_\omega,\varphi_\omega$:

$$V = \sum {}_k\upsilon_{ij}\chi^k\rho_\omega^i\cos^j\varphi_\omega. \qquad (14)$$

Коэффициенты ${}_k\upsilon_{ij}$ этого разложения легко вычисляются по известным коэффициентам ${}_k\upsilon_{ij}$ волновой аберрации и волнового хроматизма при данных значениях ω_0 и θ_s, совершенно аналогично тому, как коэффициенты υ_{ij} для монохроматической ОПФ в выражении (6), см. работу [1].

Выражение (13) справедливо только для тех значений ω_0, для которых относительная частота ω для любой текущей длины волны не превышает 1, поскольку только в этих пределах монохроматические ОПФ непрерывны. Из (12) следует:

$$\omega = \omega_0(1+\chi\alpha) \le 1 \text{ при любом } \chi \in [-1;1] \text{ или } \omega_0 \le \frac{1}{1+\alpha} \qquad (15)$$

Обычно это условие всегда выполняется, так как для большинства систем $\alpha < 0.5$, а диапазон относительных частот ω_0, в котором работает система, не превышает 0.65.

Из выражения (13) видно, что монохроматическая ОПФ $D(\chi,\rho_\omega,\varphi_\omega)$ обладает хроматизмом, даже если хроматизм волновой аберрации отсутствует. Этот, так называемый, дифракционный хроматизм обязан своим происхождением хроматизму выражений (12) и (3).

Рассмотрим дифракционный хроматизм безаберрационной ОПФ $D(\chi,\rho_\omega,\varphi_\omega)$. Представим ее в виде

$$D_0(\chi,\omega_0) = D_0(\omega_0) + \delta D_0(\chi,\omega_0), \qquad (16)$$

где $D_0(\omega_0)$ – безаберрационная ОПФ для основной длины волны; $\delta D_0(\chi,\omega_0)$ – хроматическая поправка безаберрационной ОПФ.

Для поправки $\delta D_0(\chi,\omega_0)$ нетрудно получить приближенное выражение, которое, впрочем, является точным для прямоугольной формы зрачка:

$$\delta D_0(\chi,\omega_0) \cong -\omega_0 \alpha\, \chi. \qquad (17)$$

Поскольку $\delta D_0(\chi,\omega_0)$ есть нечетная функция χ, то при четной функции $q(\chi)$ интеграл $\int\limits_{-1}^{+1} q(\chi)\,\delta D_0(\chi,\omega_0)d\chi$ равен нулю, т. е. в этом случае дифракционный хроматизм не сказывается на полихроматической ОПФ до значений ω_0, см. (15).

Подставив с учетом (16) и (17) выражение (13) для монохроматической ОПФ в выражение (1), получим:

$$D_0(\omega_0,\theta_S) = \frac{D_0(\omega_0)}{Q}\int\limits_{-1}^{+1}\left\{ q(\chi)\left[1-\frac{\omega_0\chi^{\alpha}}{D_0(\omega_0)}\right]\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\exp(4\pi i\omega_0 V)\,d\rho_\omega^2 d\varphi_\omega\right\}d\chi, \qquad (18)$$

где $Q = \int\limits_{-1}^{+1} q(\chi)d\chi.$

Изменив в предыдущем выражении порядок интегрирования, представим полихроматическую ОПФ в виде тройного интеграла:

$$D_0(\omega_0,\theta_S) = D_0(\omega_0)D_a(\omega_0,\theta_S) \qquad (19)$$

где

$$D_0(\omega_0,\theta_S) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2\pi} q_\omega(\chi,\omega_0)\exp(4\pi i\omega_0 V)d\chi d\rho_\omega^2 d\varphi_\omega\,; \quad (20)$$

$$q_\omega(\chi,\omega_0) = \frac{1}{Q}q(\chi)\left[1-\frac{\omega_0\chi^\alpha}{D_0(\omega_0)}\right].$$

Выражения (19) и (20) представляют полихроматическую ОПФ в канонических координатах и являются основой для практического вычисления $D_0(\omega_0,\theta_S)$ по известным коэффициентам ${}_k\omega_{ij}$ волновой аберрации и волнового хроматизма, а также функции $q(\chi)$.

Область интегрирования в (20) – параллелепипед с фиксированными размерами $2\times1\times2\pi$, грани которого есть координатные плоскости в координатах $\chi,\rho_\omega^2,\varphi_\omega$ благодаря чему значительно упрощается схема вычислений и уменьшается количество действий. Для вычисления интегралов подобного вида наиболее удачным является метод Гопкинса. Выражение (20) дает возможность применить мощный метод Гопкинса при интегрировании по всем трем переменным $\chi,\rho_\omega^2,\varphi_\omega$, тогда как в (1), (2) интегрирование по λ, очевидно, производится обычным методом прямоугольников, не учитывающим особенностей подынтегральной функции. Применение метода Гопкинса позволяет сократить количество узлов интегрирования по переменной χ. При непостоянной весовой функции $q_\omega(\chi)$ дальнейшее сокращение количества узлов по переменной χ может быть достигнуто применением предложенной автором [2] модификации метода Гопкинса, учитывающей первую и вторую производные весовой функции.

Вычисления значений функции V, а также ее производных в узлах интегрирования, необходимых в методе Гопкинса, легко выполняются по схеме Горнера при помощи коэффициентов разложения ${}_k\upsilon_{ij}$.

Как показала практическая проверка, удовлетворительная точность вычисления полихроматической ОПФ обеспечивается при количестве узлов по χ,ρ_ω^2 и φ_ω, соответственно равном 5×8×8, при этом погрешность в ОПФ не превышает 0.02, а на вычисление одного значения полихроматической ОПФ требуется не более 20 сек машинного времени на ЦВМ «Минск-22».

ЛИТЕРАТУРА

1. Родионов С. А., Усоскин В. В. Вычисление оптической передаточной функции центрированных оптических систем при помощи эллиптической аппроксимации области интегрирования. Изв. вузов СССР – «Приборостроение», 1972, т. XV, № 8.
2. 2. Родионов С. А. Использование производных весовой функции в методе Гопкинса для вычисления дифракционных интегралов. Изв. вузов СССР – «Приборостроение», 1972, т.XV, № 11.