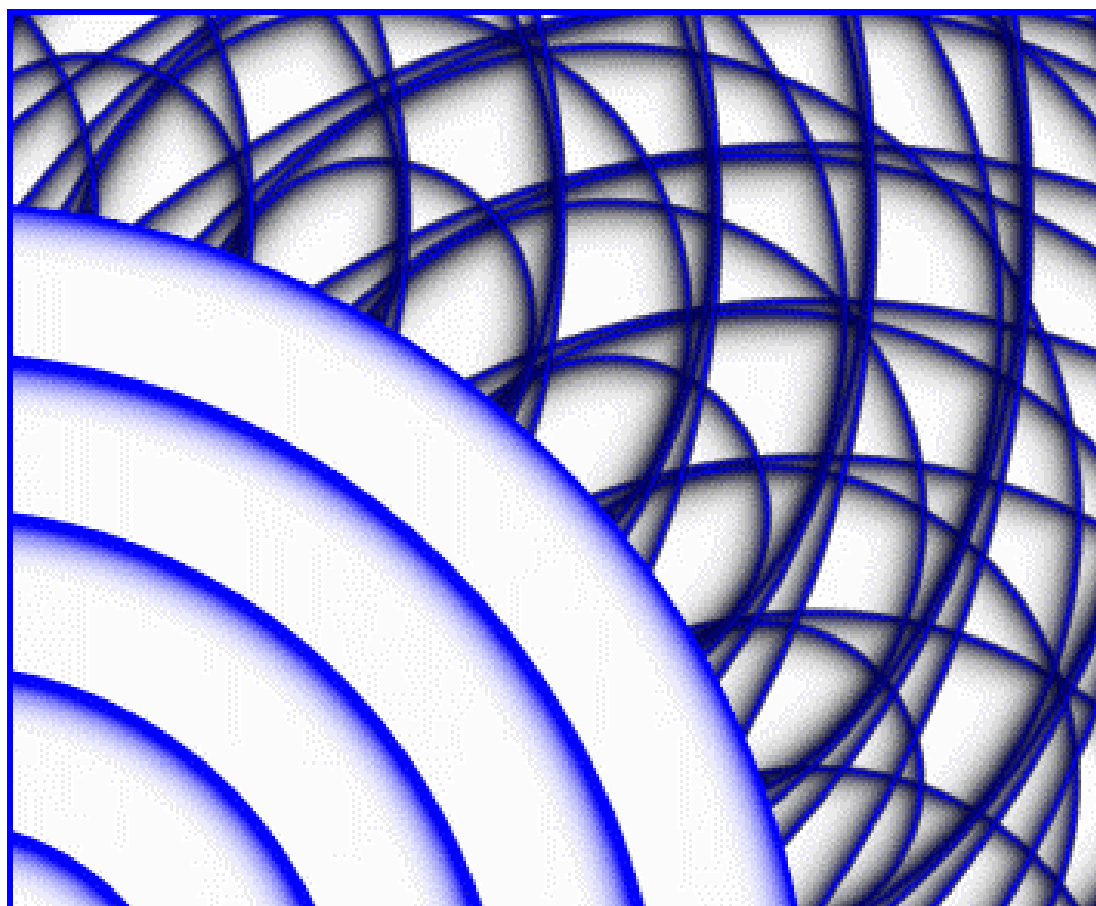


В. М. Домненко, М. В. Бурсов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2005

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

**Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики**

В.М. Домненко, М.В. Бурсов

Моделирование формирования оптического изображения

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2005

УДК 535.317.1

Домненко В.М., Бурсов М.В. Моделирование формирования оптического изображения. Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2005. - 128 с.

Рецензенты: д. т. н., профессор Сокольский М. Н.
д. т. н., профессор Путилин Э. С.

Учебное пособие подготовлено на кафедре прикладной и компьютерной оптики (П и КО) СПбГУ ИТМО и предназначено для подготовки магистров по направлению 200200 «Оптотехника». В пособии излагаются основные теоретические положения, необходимые для практического моделирования формирования оптических изображений. В конце каждой главы предлагаются вопросы для обсуждения и задачи для аналитического решения или компьютерного моделирования. Данное пособие является обобщением и развитием материалов курсов «Теория образования изображения», «Теоретические основы оценки качества оптических систем», «Компьютерное моделирование и обработка изображений», «Компьютерное моделирование и оценка качества изображений», читаемых в последние годы на кафедре П и КО при подготовке специалистов, магистров и аспирантов.

Рекомендовано к печати УМК факультета ОИСТ СПбГУ ИТМО (протокол № 6 от 14 июня 2005 года).

Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения и оптотехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 200200 – «Оптотехника» (решение № 168 от 1 июля 2005 года).

© Санкт-Петербургский государственный университет
информационных технологий, механики и оптики, 2005
© Домненко В. М., Бурсов М. В., 2005

Оглавление

Введение	5
Список основных обозначений.....	7
Глава 1. Основы электромагнитной теории света	8
1.1. Моделирование распространения света	8
1.2. Суперпозиция световых волн с учётом их когерентности	12
1.3. Моделирование дифракционных явлений.....	14
Выводы	20
Вопросы.....	20
Задачи	21
Глава 2. Дифракционная теория формирования изображения.....	22
2.1. Моделирование распространения света через оптическую систему	22
2.2. Модели формирования изображений оптической системой.....	25
2.3. Дифракционное распространение поля в пространстве предметов	27
2.4. Геометрическое распространение поля через оптическую систему.....	30
2.5. Дифракционное распространение поля в пространстве изображений..	33
2.6. Алгоритм моделирования распространения поля через оптическую систему	34
2.7. Формирование изображений самосветящихся предметов.....	35
2.8. Описание свойств освещаемых предметов.....	38
2.9. Определение когерентных свойств освещения.....	40
2.10. Формирование изображений предметов в проходящем свете	47
2.11. Алгоритмы моделирования формирования оптических изображений .	52
Выводы	55
Вопросы.....	56
Задачи	58
Глава 3. Формирование изображений как преобразование сигналов.....	59
3.1. Преобразование сигналов оптическими системами	59
3.2. Характеристики качества оптических систем.....	62
3.3. Частотное описание преобразования сигналов.....	71
3.4. Оптическая передаточная функция и её свойства	76

3.5. Формирование изображений каскадом преобразователей	80
Выводы	90
Вопросы.....	91
Задачи	92
Глава 4. Компьютерное моделирование формирования изображений.....	94
4.1. Принципы дискретизации функций	94
4.2. Шаг дискретизации и количество элементов в выборках.....	101
4.3. Использование дискретного преобразования Фурье.....	104
4.4. Особенности программной реализации моделей формирования изображений	106
Выводы	111
Вопросы.....	112
Задачи	114
Заключение	116
Приложение А. Системы канонических координат.....	118
Приложение Б. Преобразование Фурье и его свойства	120
Литература.....	124

Введение

Изображение есть подобие с отличительными свойствами первообраза, вместе с тем имеющее и некоторое в отношении к нему различие.

Иоанн Дамаскин

Формирование изображений играет важную роль в жизнедеятельности человека. Большую часть информации об окружающих предметах и их свойствах человек получает посредством изображений, формируемых его зрительной системой. Для человека изображение – это процесс мгновенного «среза» действительности, создания реального представления о ней. Ограничения зрительного аппарата (такие как ограниченные пространственное разрешение и пороговая контрастность, ограниченная спектральная чувствительность и другие), а так же удалённость одних и микроскопичность других объектов определяют потребность человека в использовании разнообразных оптических приборов, формирующих изображение для последующего наблюдения или регистрации. В настоящее время формирование изображений используется не только для преодоления ограничений зрительной системы человека, но и в процессах не связанных со зрением (например, в процессе бесконтактных оптических измерений, в процессе фотолитографической проекции и других).

Физически формирование *оптического изображения* заключается в преобразовании различными оптическими системами света, излучаемого, отражаемого или пропускаемого реальными объектами. Объекты существуют в пространстве предметов, а изображение формируется в пространстве изображений. Свет, приходящий из пространства предметов, оптическая система преобразует в распределение энергии в пространстве изображений. Обычно анализируется распределение интенсивности на некоторой поверхности в пространстве изображений, которая называется поверхностью анализа. Такое распределение называется *воздушным изображением*. Полученное распределение интенсивности может быть зарегистрировано с использованием какого-либо приёмника изображения. Зарегистрированные изображения могут иметь различную физическую природу и называться по-разному (например, фотографии, голограммы, цифровые изображения).

Сложная природа световых явлений, происходящих в процессе формирования изображения, требует для своего описания применения теорий, построенных на основе различных концепций. Выбор теории, на основе которой строится модель, определяется характером светового явления. Ряд оптических явлений, имеющих важное практическое значение, может быть описан простыми моделями *геометрической (лучевой) оптики* [3, 18], в основу которой положена концепция прямолинейного распространения света и понятие световых лучей. Например, с использованием геометрической оптики объясняются преломление и отражение света на поверхностях раздела двух сред. Интерференция, дифракция и поляризация света описываются *волновой*

оптикой [1, 3], которая основана на предположении о том, что свет является электромагнитной волной. Сложные процессы оптического излучения и взаимодействия света с веществом описываются *квантовой оптикой* [1], в которой свет представляется в виде потока фотонов – световых квантов.

Для создания модели формирования изображения оптической системой необходимо выявить основные явления, играющие определяющую роль в этом процессе. При формировании оптического изображения не происходит поглощения световой энергии с преобразованием в электрическую, химическую, тепловую или другие виды энергии. Поэтому, для описания света при анализе работы оптической системы не требуется привлечение квантовой теории. Свет, проходящий через оптическую систему, преломляется и отражается на поверхностях раздела оптических сред, а главное – претерпевает дифракцию на оправах и диафрагмах. Дифракционные явления играют определяющую роль при формировании изображения, а значит, методы волновой оптики должны быть основой для адекватного моделирования этого явления.

Глава 1 посвящена описанию света на основе электромагнитной теории. В ней вводится концепция монохроматического поля, описываются его характеристики и свойства. В главе 2 рассматриваются дифракционные явления, происходящие в оптической системе при формировании изображения. Представлена модель распространения комплексной амплитуды поля через оптическую систему, построенная на основе концепции дифракции только на апертурной диафрагме. Затем описываются модели формирования изображений самосветящихся и освещаемых предметов. Особое внимание уделяется формированию изображения при различных условиях освещения предмета.

Для описания формирования изображений и анализа их качества может использоваться альтернативный подход, основанный на теории сигналов. Этот подход рассматривается в главе 3. Оптическая система представляется в виде преобразователя сигналов, для которого входным сигналом является предмет, а выходным – изображение. Использование подхода на основе теории сигналов позволяет получить передаточные функции, напрямую связывающие предмет и изображение, не только для оптических систем, но и для других преобразователей, входящих в состав изображающей системы.

Глава 4 посвящена особенностям компьютерной реализации моделирования формирования изображений. Развитие и широкое распространение компьютерной техники сделало возможным решение задачи моделирования изображений разнообразных предметов с учётом различных факторов (условий освещения, влияния оптической системы и других). Благодаря правильному осуществлению дискретизации функций и использованию быстрых алгоритмов, можно реализовать адекватное и точное моделирование с высокой вычислительной эффективностью.

В заключение приводятся приложения с описанием систем канонических координат, приложение с описанием свойств преобразования Фурье и справочными таблицами фурье-образов некоторых функций, а так же список основной и дополнительной литературы.

Параметры в пространстве предметов и в пространстве изображений, имеющие подобный смысл обозначаются одними и теми же символами, но параметры, относящиеся к пространству изображений, отмечаются штрихом. Например, положение точки в пространстве предметов обозначается (x, y, z) , а соответствующая ей точка в пространстве изображений – (x', y', z') . Функция распределения интенсивности в пространстве предметов обозначается $I(x, y, z)$, а в пространстве изображений – $I'(x', y', z')$. Другие используемые обозначения приведены далее в списке.

Список основных обозначений

A – аналитический сигнал;	t – время;
A – обобщённая апертура;	U – комплексная амплитуда поля;
a – амплитуда;	V – скалярное возмущение;
B – яркость;	V – обобщённое увеличение;
c – скорость распространения света;	v – скорость;
D – оптическая передаточная функция;	W – волновая абберация;
E – электрическая напряжённость;	α – угол дифракции;
E – эйконал;	δ – дельта-функция Дирака;
F – оператор преобразования Фурье;	ε – диэлектрическая проницаемость;
f – зрачковая функция;	Φ – поток;
H – магнитная напряжённость;	Φ – фазово-передаточная функция;
H – обобщённая светосила;	φ – фаза;
h – функция рассеяния точки (импульсный отклик);	η – обобщённая предметная координата;
I – интенсивность;	λ – длина волны;
J_{12} – взаимная интенсивность;	μ – магнитная проницаемость;
K – дифракционная функция;	μ_{12} – степень когерентности;
k – контраст;	ν – пространственная частота;
L – изображающий оператор;	ρ – обобщённая зрачковая координата;
M – модуляционно-передаточная функция;	σ – коэффициент когерентности;
n – показатель преломления;	τ – амплитудное пропускание;
R – область определения функции;	ω – частота гармонических колебаний;
S – функция рассеяния линии;	ψ – разность фаз;
s – обобщённая пространственная частота;	ξ – каноническая координата на источнике.
T – период;	
T – комплексное пропускание предмета;	

Глава 1. Основы электромагнитной теории света

Свет является электромагнитным возмущением, распространяющимся через поле в соответствии с законами электромагнетизма.

Джеймс Максвелл

1.1. Моделирование распространения света

Задача моделирования формирования оптических изображений решается с использованием моделей и методов волновой оптики, в основу которой положено представление о распространении света в виде электромагнитных волн. Вообще, электромагнитная теория описывает взаимодействие между электрически заряженными частицами или телами. Это взаимодействие осуществляется посредством *электромагнитного поля* – особой формы материи, связывающей части в единые системы и передающей с конечной скоростью действия одних частей этой системы на другие. Для описания электромагнитного поля используются уравнения Максвелла [1, 3], которые для случая однородной среды можно записать следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (1.4)$$

где \mathbf{E} – напряжённость электрического поля, \mathbf{H} – напряжённость магнитного поля, c – электродинамическая постоянная, равная скорости распространения электромагнитных волн в вакууме, μ – магнитная проницаемость среды, ε – диэлектрическая проницаемость среды, $\partial/\partial t$ – оператор дифференцирования по времени, rot – ротор векторного поля, а div – дивергенция векторного поля. В декартовых координатах ротор и дивергенция напряжённости электрического поля (впрочем, как и магнитного) определяются следующими выражениями [4]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{k}; \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.6)$$

В теории электродинамики уравнения Максвелла имеют следующий смысл [21]. Уравнение (1.1) представляет собой обобщение закона электромагнитной индукции Фарадея и выражает идею Максвелла о том, что с переменным магнитным полем неразрывно связано вихревое индуктированное электрическое поле независимо от того, находятся в нём проводники или нет.

Уравнение (1.2) является обобщением закона полного тока и показывает, что переменное электрическое поле, так же как и электрический ток, является источником магнитного поля. Уравнение (1.3) выражает факт отсутствия статического электрического поля в вакууме. Уравнение (1.4) постулирует отсутствие магнитных зарядов. Таким образом, переменные электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом, образуя единое электромагнитное поле. Возмущение, возникшее в каком-либо месте пространства, становится источником возмущений в соседних областях пространства. От этих областей системы возмущение переходит к смежным с ними, распространяясь от точки к точке в виде *электромагнитной волны*.

Теория электромагнитного поля была разработана Максвеллом на основе анализа явлений электричества и магнетизма, но экспериментальные данные, полученные различными исследователями [1], показали, что скорость распространения электромагнитных волн и скорость света совпадают. Это позволило Максвеллу сделать заключение о том, что свет представляет собой электромагнитную волну [3].

Из системы уравнений Максвелла (1.1 – 1.4) можно вывести *волновые уравнения* [1, 3], которые описывают распространение электромагнитных волн:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \Delta \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.7)$$

где $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ – оператор Лапласа [4], $v = c / \sqrt{\epsilon \mu}$ – скорость распространения волны в среде, $\partial^2 / \partial t^2$ – вторая производная по времени. Решением этих уравнений являются функции описывающие изменения электрической напряжённости $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитной напряжённости $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ в пространстве и во времени (\mathbf{r} – радиус-вектор в некоторой декартовой системе координат, t – время).

При решении задач моделирования изображений рассматривается распространение света в однородной среде в пространстве, свободном от токов и зарядов. В этом случае каждая из декартовых компонент векторов электромагнитного поля удовлетворяет волновому уравнению [3]. Поле в каждой точке такого пространства в каждый момент времени удобно описывать скалярным возмущением $V(\mathbf{r}, t)$, которое удовлетворяет одному волновому уравнению:

$$\Delta V - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (1.8)$$

Вместо скалярной функции V в волновое уравнение (1.8) можно подставить любую составляющую векторов электрической или магнитной напряжённости и оно останется справедливым.

Для моделирования световых явлений часто используются понятие *мономатического поля* [3], в котором возмущение $V(\mathbf{r}, t)$, вызванное волной в некоторой точке пространства, зависит только от времени, и эта зависимость не произвольная, а гармоническая:

$$V(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r}) \cdot \cos(\omega t - \varphi(\mathbf{r})) = V(\mathbf{r}) \cdot \cos(kct - \varphi(\mathbf{r})), \quad (1.9)$$

где $\varphi(\mathbf{r})$ – фаза, а $\omega = kc$ – циклическая частота гармонических колебаний, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны. В этом случае вместо действительной функции $V(\mathbf{r}, t)$ удобнее использовать комплексную функцию $A(\mathbf{r}, t)$, которая называется *аналитическим сигналом* [3]. Вещественная часть этой функции представляет собой скалярное возмущение V :

$$\operatorname{Re}[A(\mathbf{r}, t)] = V(\mathbf{r}, t). \quad (1.10)$$

Мнимая часть аналитического сигнала A и скалярное возмущение V связаны через преобразование Гильберта [3, 8]:

$$\operatorname{Im}[A(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V(\mathbf{r}, t')}{t' - t} dt', \quad (1.11)$$

где t' – смещение во времени относительно t . Таким образом, монохроматическое поле описывается аналитическим сигналом, который может быть представлен в экспоненциальной форме:

$$A(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \cdot e^{-ikct}. \quad (1.12)$$

Комплексная функция $U(\mathbf{r})$ зависит только от координат рассматриваемой точки и называется *комплексной амплитудой* поля [3]. Как и любую другую комплексную функцию её можно представить в виде:

$$U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \cdot e^{i\varphi(\mathbf{r})}, \quad (1.13)$$

где $a(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|$ – амплитуда поля, а $\varphi(\mathbf{r}) = \arg[U(\mathbf{r})]$ – фаза поля. Часто вместо фазы используется понятие *эйконала* поля [3], которое определяется следующим образом:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{\varphi(\mathbf{r})}{k} = \frac{\varphi(\mathbf{r})}{2\pi} \lambda. \quad (1.14)$$

Как видно из последней части выражения (1.14), эйконал удобно измерять в длинах волн. Если изменение эйконала кратно λ , то изменение фазы кратно 2π .

При анализе распространения и состояния монохроматического поля также используется понятие волновой поверхности или *волнового фронта* [3]. Это геометрическое место точек, в которых фаза поля имеет одинаковые значения. Нормали к волновой поверхности представляют собой световые *лучи*, которые используются в качестве модели света в геометрической оптике [3, 18]. Путь l , который проходит волновой фронт в однородной среде вдоль некоторого луча, определяет значение фазы поля и связан с приращением эйконала следующим соотношением:

$$E(\mathbf{r}_2) = E(\mathbf{r}_1) + n \cdot l(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (1.15)$$

где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показатель преломления среды, в которой распространяется волна из точки с радиус-вектором \mathbf{r}_1 в \mathbf{r}_2 . Произведение показателя

преломления однородной среды и геометрической длины пути в выражении (1.15) называется *оптической длиной*.

Полученные выражения для описания монохроматических полей можно подставить в волновое уравнение. После подстановки вещественной части выражения (1.12) в уравнение (1.8) получается волновое уравнение для комплексной амплитуды, которое называется *уравнением Гельмгольца* [3]:

$$\Delta U(\mathbf{r}) + k^2 n^2 U(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.16)$$

При анализе распространения светового возмущения обычно рассматривается именно изменение комплексной амплитуды поля. Это изменение называют распространением комплексной амплитуды поля или распространением поля. Таким образом, решение уравнения Гельмгольца позволит определить состояние поля в любой точке пространства.

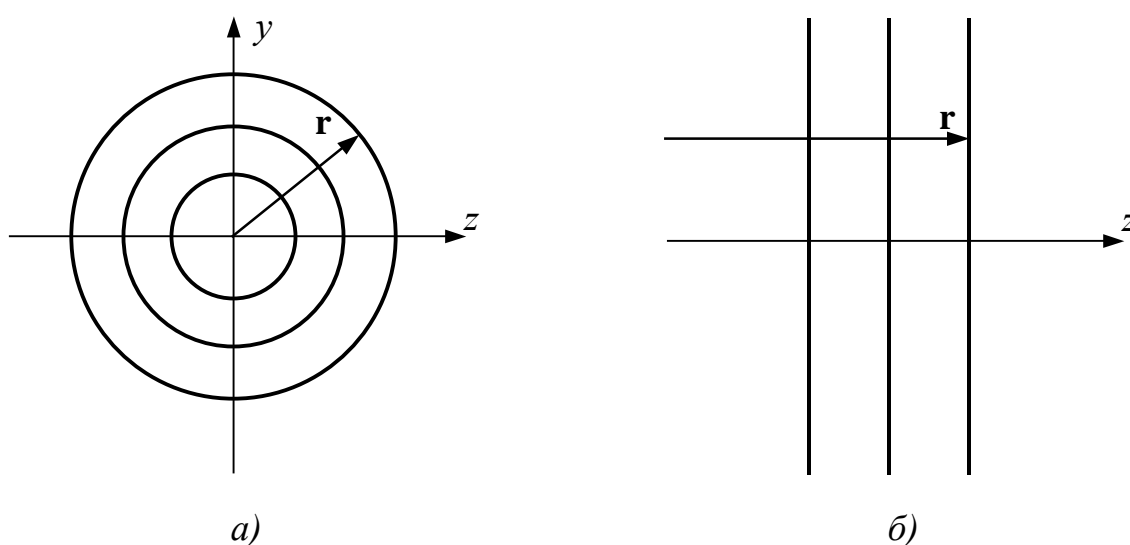


Рис. 1.1 Сечения сферического (а) и плоского (б) волнового фронта.

Хорошо известными и полезными при описании оптических явлений являются решения уравнения (1.16), которые описывают плоскую и сферическую волну [1, 16]. Например, распространение поля в однородной среде вблизи точечного источника можно описать *сферической волной* (Рис. 1.1, а). В этом случае выражение для комплексной амплитуды поля имеет следующий вид:

$$U(\mathbf{r}) = a \cdot \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (1.17)$$

где a – постоянная амплитуда волны, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – длина радиус-вектора рассматриваемой точки с координатами (x, y, z) . Распространение поля в однородной среде в бесконечности от источника можно описать *плоской волной* (Рис. 1.1, б). В этом случае при распространении вдоль оси z комплексная амплитуда поля зависит только от координаты z :

$$U(\mathbf{r}) = U(z) = a \cdot e^{ikz}. \quad (1.18)$$

Комплексная амплитуда поля – это величина, которую непосредственно наблюдать невозможно. Приёмники изображения не воспринимают комплексную амплитуду, так как они не могут регистрировать быстрые изменения поля с частотой $c/\lambda \approx 10^{15} \text{ с}^{-1}$ [1, 16]. В силу инерционности любой приёмник реагирует на средний квадрат возмущения поля за время t , которое значительно больше периода колебаний ($T = \lambda/c$). Эта усреднённая величина – *интенсивность* – пропорциональна квадрату модуля комплексной амплитуды поля $U(\mathbf{r})$:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_{-T}^T |U(\mathbf{r}, t)|^2 dt = |U(\mathbf{r})|^2 = U(\mathbf{r}) \cdot U^*(\mathbf{r}). \quad (1.19)$$

Таким образом, монохроматическое поле в пространстве полностью определено, если известна длина волны λ и комплексная амплитуда поля $U(\mathbf{r})$ в каждой точке пространства. Комплексная амплитуда монохроматического поля полностью определяет состояние поля, его интенсивность и, соответственно, реакцию приёмника.

1.2. Суперпозиция световых волн с учётом их когерентности

Необходимо напомнить, что монохроматическое поле – это математическая абстракция. Во-первых, комплексная амплитуда и фаза реального поля претерпевают нерегулярные флуктуации. Во-вторых, в поле, создаваемом реальным источником, частота волн не постоянна, а находится в некотором диапазоне $\Delta\omega$. Но поле можно считать *квазимонохроматическим*, если этот диапазон гораздо меньше среднего значения частоты ($\Delta\omega \ll \bar{\omega}$). Таким образом, для анализа поле можно представить как суперпозицию множества квазимонохроматических полей с различными длинами волн и различными комплексными амплитудами. Это возможно, так как световые волны разных частот и направлений распространяются независимо друг от друга [1, 3]. Кроме того, математически *суперпозиция* полей является следствием линейности волнового уравнения. Если комплексные амплитуды поля U_1, \dots, U_n являются решением волнового уравнения (1.16), то его решением оказывается и сумма полей:

$$U = \sum_n U_n. \quad (1.20)$$

Суперпозиция полей должна осуществляться с учётом их когерентных свойств. *Когерентность* – способность монохроматических электромагнитных волн коррелировать (интерферировать) между собой. Экспериментальным путём установлено [3], что в отличие от электромагнитных волн других типов световых волны имеют следующие особенности:

- световые волны, исходящие из двух различных источников, не интерферируют;
- световые волны, исходящие из различных точек одного источника, не интерферируют;

- световые волны, исходящие из одной точки источника, интерферируют только в том случае, когда разность их фаз не превышает некоторой небольшой величины.

В электромагнитной теории света выделяют два типа когерентности: временная и пространственная [3, 7]. *Временная когерентность* – это способность световой волны интерферировать с запаздывающим, но не смещённым в пространстве, вариантом этой волны. Поля $U(\mathbf{r}, t)$ и $U(\mathbf{r}, t + \Delta t)$, приходящее со смещением во времени Δt , когерентны, если Δt намного меньше времени когерентности, то есть $\Delta t \ll 1/\Delta\omega$. *Пространственная когерентность* – это способность световой волны интерферировать со смещённым в пространстве, но не задержанным во времени, вариантом этой волны. В этом случае, поля $U(\mathbf{r}_1, t)$ и $U(\mathbf{r}_2, t)$ когерентны, если разность временных задержек, приобретаемых ими при прохождении расстояний r_1 и r_2 от источника, намного меньше времени когерентности, то есть $(r_2 - r_1)/c \ll 1/\Delta\omega$. При моделировании формирования и регистрации изображений важен именно этот тип когерентности. В этом случае когерентные свойства полей при их интерференции учитываются следующим образом [3].

Пусть U_1 и U_2 – комплексные амплитуды поля, которые обусловлены возмущением в точке источника, находящейся в начале системы координат. Тогда, согласно принципу суперпозиции комплексная амплитуда поля в точке на конце некоторого радиус-вектора \mathbf{r} в момент времени t определяется как сумма $U(\mathbf{r}, t) = U_1(\mathbf{r}, t) + U_2(\mathbf{r}, t)$, а интенсивность поля в этой точке определяется выражением, которое называют *законом интерференции*:

$$I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r}) + 2\sqrt{I_1(\mathbf{r}) \cdot I_2(\mathbf{r})} \cdot |\mu_{12}| \cdot \cos(\psi_{12} - \psi), \quad (1.21)$$

где μ_{12} – комплексная степень когерентности двух волн [3], ψ_{12} – эффективная разность фаз колебаний, $\psi = 2\pi\bar{\omega}t_{12}$ – разность фаз, возникшая из-за разности хода интерферирующих волн от источника до рассматриваемой точки, t_{12} – время задержки одной волны относительно другой. Модуль комплексной степени когерентности колебаний (или *степень когерентности*) находится в диапазоне $0 \leq |\mu_{12}| \leq 1$.

В пространственно когерентном свете изменение амплитуды комплексных функций U_1 и U_2 происходит одновременно во всех точках. В этом случае степень когерентности $|\mu_{12}| = 1$. При этом фазы полей меняются согласованно, и их эффективная разность остаётся постоянной. Если разность фаз, возникшая из-за разности хода интерферирующих волн, и эффективная разность фаз равны, то выражение (1.21) принимает вид:

$$I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r}) + 2\sqrt{I_1(\mathbf{r}) \cdot I_2(\mathbf{r})} = |U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r})|^2. \quad (1.22)$$

В случае пространственно некогерентного света амплитуда и фаза комплексных функций U_1 и U_2 изменяются независимо во всех точках,

интерференционных эффектов не возникает, а $|\mu_{12}|=0$. Выражение (1.21) принимает вид:

$$I(\mathbf{r}) = I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r}) = |U_1(\mathbf{r})|^2 + |U_2(\mathbf{r})|^2. \quad (1.23)$$

На практике чаще всего имеют дело с промежуточным случаем, когда колебания световых волн частично когерентны. Для наглядности выражение (1.21), можно преобразовать так:

$$I(\mathbf{r}) = |\mu_{12}| \cdot (I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r}) + 2\sqrt{I_1(\mathbf{r}) \cdot I_2(\mathbf{r})} \cdot \cos(\psi_{12} - \psi)) + (1 - |\mu_{12}|) \cdot (I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r})), \quad (1.24)$$

где первое слагаемое описывает интенсивность когерентной, а второе – некогерентной суперпозиции волн. Как видим, степень когерентности характеризует долю когерентной составляющей в суперпозиции интенсивностей при частично когерентных колебаниях.

Таким образом, при моделировании распространения света можно рассмотреть распространение отдельных квазимонохроматических полей, а затем применить принцип суперпозиции с учётом их когерентных свойств.

1.3. Моделирование дифракционных явлений

При формировании изображения оптическими системами определяющее значение имеет явление дифракции. Понятие *дифракция* в оптике связано с нарушением прямолинейности распространения света [1, 3]. В теории дифракции решаются задачи описания распространения волн от одной точки пространства к другой, когда на их пути возникают различные препятствия (экраны, отверстия).



Рис. 1.2 Принцип Гюйгенса

В волновой теории под дифракцией понимают совокупность явлений, которые претерпевает поле при наличии препятствий его распространению.

Существующая теория дифракции описывает распространение поля в соответствии с *принципом Гюйгенса* [3]. Задолго до открытия электромагнитной природы света, Гюйгенс предложил трактовать распространение света с использованием понятия волновых поверхностей (Рис. 1.2).

Пусть известна какая-либо волновая поверхность. Тогда каждую точку этой поверхности можно рассматривать как вторичный источник колебаний, а затем, следующие волновые поверхности находить как огибающие сферических волн испускаемых этими точечными источниками. Френель дал математическую формулировку принципа Гюйгенса и предложил учитывать фазы колебаний, пришедших от различных точек, при их сложении [3].

Основная задача теории дифракции формулируется следующим образом. Пусть в точке M комплексная амплитуда поля $U(\mathbf{r}_M)$ известна. Необходимо найти поле в произвольной точке P , то есть комплексную амплитуду $U(\mathbf{r}_P)$ (Рис. 1.3).

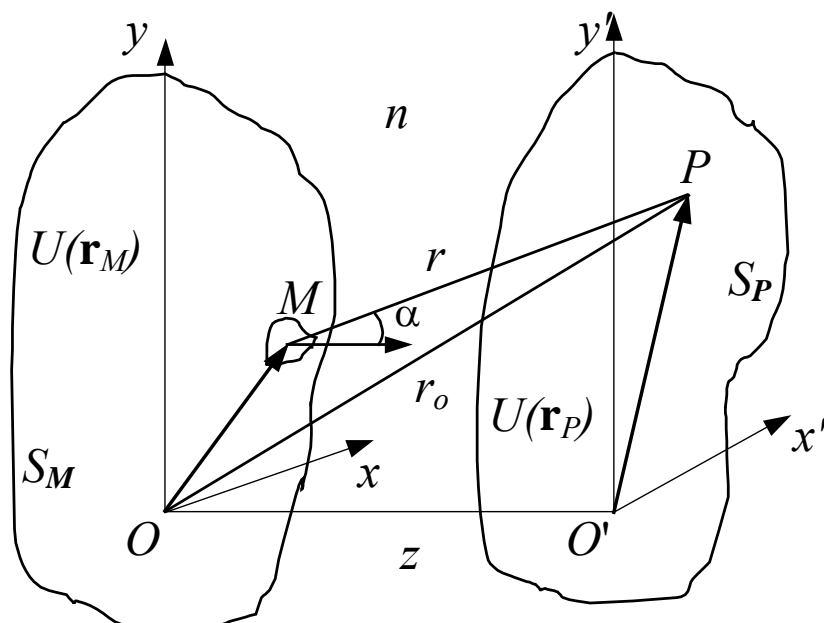


Рис. 1.3 Основная задача теории дифракции

В соответствии с принципом Гюйгенса поле в точке P находится как суперпозиция полей, приходящих в эту точку от различных точек поверхности S_M . Выделим на ней некоторую элементарную площадку dS_M . Действие поля от площадки dS_M в точке P пропорционально комплексной амплитуде поля $U(\mathbf{r}_M)$ в точке M и размеру площадки dS_M , обратно пропорционально расстоянию r между точками M и P , а также зависит от наклона площадки к направлению MP . Зависимость ориентации данного элемента поверхности от наклона описывает функция $K(\alpha)$. Эйконал в точке P будет отличаться на оптическую длину, равную произведению $n \cdot r$. Таким образом, вклад комплексной амплитуды поля в точке M в комплексную амплитуду поля в точке P определяется следующим образом:

$$dU(\mathbf{r}_P) = U(\mathbf{r}_M) \cdot \frac{e^{-iknr}}{r} \cdot K(\alpha) dS_M. \quad (1.25)$$

Для того чтобы получить полное поле в точке P , необходимо просуммировать действие всех элементарных площадок dS_M поверхности S_M . Комплексная амплитуда $U(\mathbf{r}_P)$ находится как интеграл по поверхности S_M :

$$U(\mathbf{r}_P) = \iint_{S_M} U(\mathbf{r}_M) \cdot \frac{e^{-iknr}}{r} \cdot K(\alpha) dS_M. \quad (1.26)$$

Выражение (1.26) является математической формулировкой принципа Гюйгенса и называется *дифракционным интегралом* или интегралом Гюйгенса-Френеля [3]. Множитель e^{-iknr}/r в подынтегральном выражении описывает распространение элементарной вторичной сферической волны от поверхности S_M к поверхности S_P .

Существуют различные формы дифракционных интегралов [1, 3]. Они отличаются друг от друга множителем $K(\alpha)$, который описывает зависимость вклада в комплексную амплитуду поля от *угла дифракции* α . Независимо от формы дифракционного интеграла начальное значение этой функции $K(0) = 1/i\lambda$. Френель полагал, что $K(\alpha)$ убывает от начального значения до нуля при изменении угла от 0 до $\pi/2$, но окончательное выражение не определил. Кирхгоф рассмотрел распространение сферических волн через отверстия, решая уравнение Гельмгольца (1.16) с учётом граничных условий, описывающих свойства экрана и отверстия, и пришёл к выводу, что

$$K(\alpha) = \frac{1}{i\lambda} \cdot \left(\frac{1 + \cos(\alpha)}{2} \right). \quad (1.27)$$

В формулировке Рэлея-Зоммерфельда множитель $K(\alpha)$ определяется следующим образом:

$$K(\alpha) = \frac{1}{i\lambda} \cdot \cos(\alpha). \quad (1.28)$$

Применение дифракционного интеграла (1.26) для описания распространения поля имеет свои ограничения. В частности, при решении задачи дифракции на экране с отверстием выражение (1.26) справедливо, если точка P удалена от поверхности S_M на расстояние гораздо большее длины волны. Для анализа дифракционных картин в области прилегающей к экрану с отверстием, когда $r < \lambda$, следует непосредственно искать решение волнового уравнения с учётом жёстких граничных условий, описывающих свойства экрана и отверстия. Для расчёта дифракционных картин на достаточном удалении от экрана с отверстием, когда $r \gg \lambda$, широко применяются приближённые и более простые решения задачи дифракции: приближение Френеля и приближение Фраунгофера.

Приближение Френеля описывает дифракцию слаборасходящихся световых пучков [1], когда расстояние z много больше области анализа (то есть

$z \gg x, y, x', y'$), и расстояние r (Рис. 1.3) можно определить приближённо следующим образом:

$$r = z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}. \quad (1.29)$$

В приближении Френеля полагается, что экран с отверстием находится в плоскости xu , а дифракционная картина анализируется на плоскости $x'y'$, параллельной экрану и находящейся на расстоянии z от него (Рис. 1.3). Зависимость $K(\alpha)$ полагается постоянной и равной константе $1/i\lambda$. Подставляя выражение (1.29) в (1.26) и пренебрегая отличием r от z , получаем:

$$U(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda} \cdot \frac{e^{-iknz}}{z} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) \cdot e^{-\frac{ikn}{2z} [(x-x')^2 + (y-y')^2]} dx dy. \quad (1.30)$$

Качественная особенность приближения Френеля заключается в изменении формы вторичных волновых поверхностей, которая, согласно выражению (1.30), является параболической, а не сферической. Выражение (1.30) представляет собой решение задачи дифракции в приближении Френеля, когда:

- поверхность, на которой комплексная амплитуда известна, и поверхность анализа, на которой комплексная амплитуда должна быть определена, являются плоскостями;
- расстояние между этими плоскостями много больше области, в которой осуществляется анализ комплексной амплитуды поля;
- вклад вторичных волн в комплексную амплитуду поля не зависит от угла дифракции.

Экспериментальные данные показывают [1], что, начиная с некоторого расстояния от экрана, распределение интенсивности поля перестает зависеть от координаты z . Дифракционная картина приобретает устойчивую структуру, вид которой зависит только от распределения поля в плоскости xu . Это свойство используется при решении задачи дифракции в *приближении Фраунгофера*.

В отличие от подхода Френеля в приближении Фраунгофера для определения r используется не z , а расстояние r_o (Рис. 1.3) от некоторой базовой точки O в области отверстия до точки P :

$$r_o = \sqrt{z^2 + x'^2 + y'^2}. \quad (1.31)$$

Это делается из-за того, что на большом удалении от отверстия размеры картины дифракции достаточно велики и разница между r и z становится существенной. Если расстояние r много больше области анализа, то его значение можно приближённо представить в виде следующей суммы:

$$r = r_o + \frac{x^2 + y^2}{2r_o} - \frac{xx' + yy'}{r_o}. \quad (1.32)$$

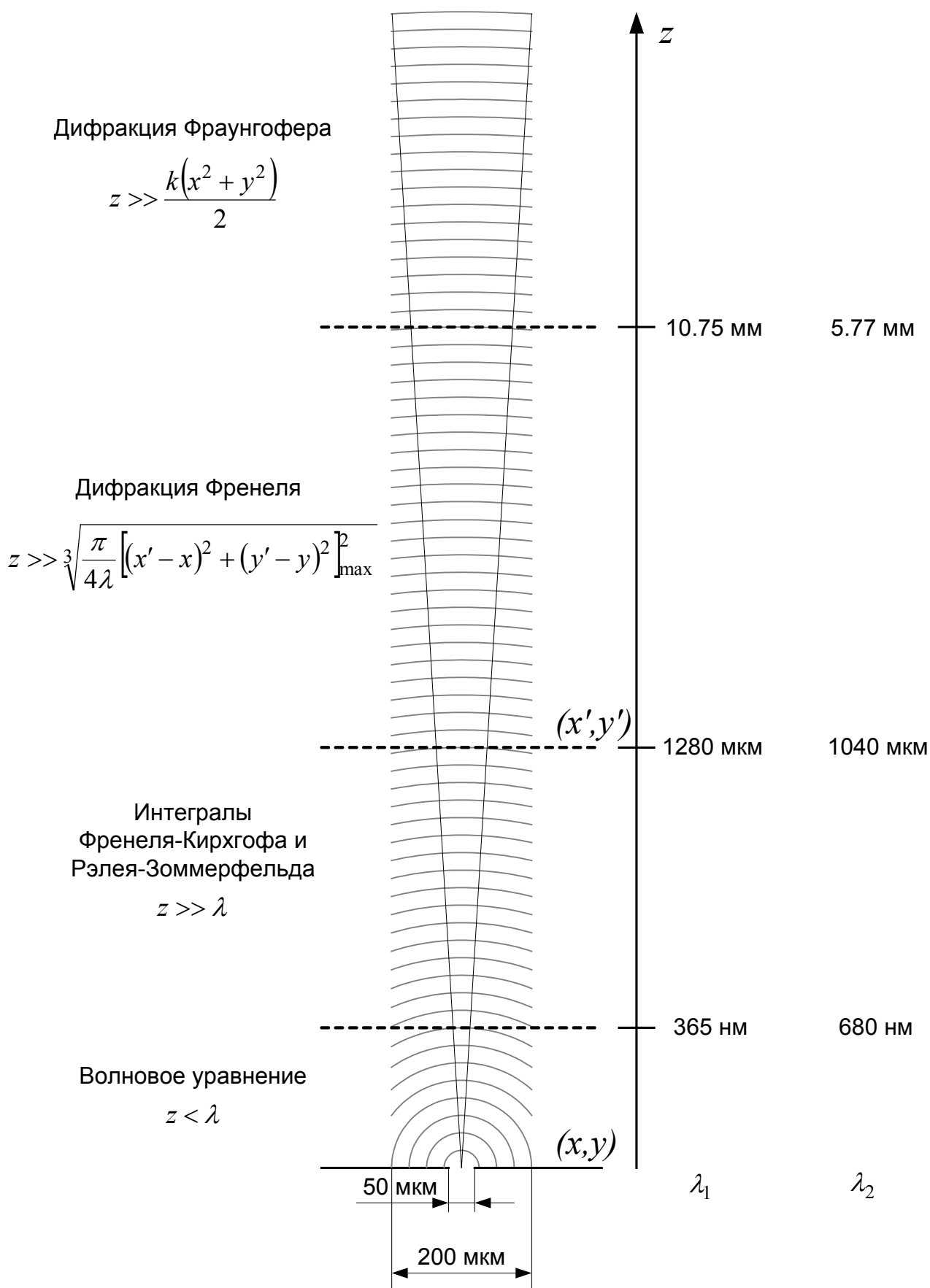


Рис. 1.4 Границы применения моделей дифракции

В приближении Фраунгофера поверхности анализа являются плоскостями, а зависимость от угла дифракции полагается равной константе $1/i\lambda$. Подставляя выражение (1.32) в (1.26) и пренебрегая отличием r от r_0 , получаем:

$$U(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda} \cdot \frac{e^{-iknr_0}}{r_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) \cdot e^{-\frac{ikn}{2r_0}(x^2+y^2)} \cdot e^{\frac{ikn}{r_0}(xx'+yy')} dx dy. \quad (1.33)$$

Выражение (1.33) представляет собой решение задачи дифракции в приближении Фраунгофера. Из него следует, что в области больших значений z , а точнее, при $kd^2/2r_0 \ll 1$, где $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ – начальный поперечный размер области анализа (светового пучка), устанавливается устойчивое угловое распределение поля. Расстояние $z_d \approx r_0 = kd^2/2$ называется *дифракционной длиной* пучка. Область пространства, где $z \gg z_d$, называется зоной Фраунгофера или *дальней зоной* дифракции [1]. Для описания дифракционной картины в этой области выражение (1.33) можно упростить:

$$U(x', y', z) = \frac{1}{i\lambda} \cdot \frac{e^{-iknr_0}}{r_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) \cdot e^{\frac{ikn}{r_0}(xx'+yy')} dx dy. \quad (1.34)$$

Согласно выражению (1.34), которое представляет собой решение задачи дифракции в дальней зоне, качественной особенностью приближения Фраунгофера является замена сферических вторичных волновых фронтов на плоские.

На рисунке 1.4 представлены области применения различных решений задачи дифракции в зависимости от расстояния z между экраном с отверстием диаметром 50 мкм и поверхностью анализа. Рассматривается распространение волн с длиной 365 нм и 680 нм (границы видимого диапазона) в воздухе. Пределы применения того или иного приближения весьма условны, но для оценки порядка величин на рисунке отмечены ключевые значения расстояний (без соблюдения масштаба). При этом для оценки границ применимости приближения Френеля принято, что анализ дифракционных картин ведётся на плоскости в области с диаметром 200 мкм, то есть в 4 раза больше отверстия.

Таким образом, выбор той или иной модели определяется размерами области анализа и расстоянием, которое проходит поле от поверхности, на которой его комплексная амплитуда известна, до поверхности анализа. Например, для моделирования интегральной оптики [25], в которой волны проходят расстояния порядка десятков длин волн, следует использовать решения задачи дифракции в более строгих формулировках Френеля-Кирхгофа или Рэлея-Зоммерфельда. Но для моделирования дифракционных явлений в большинстве оптических систем формирующих изображение вполне применимо приближение Фраунгофера. Хотя в некоторых случаях, например, при анализе дифракции в оптических системах с предельно большой апертурой, когда является существенным уже векторный характер поля, решение задачи дифракции должно быть пересмотрено [3].

Выводы

Для моделирования формирования оптических изображений используется электромагнитная теория. Электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла (1.1 – 1.4), а распространение электромагнитных волн в любой точке пространства описывается с помощью волновых уравнений (1.7) или (1.8). Монохроматическое поле в пространстве полностью определяется функцией комплексной амплитуды поля U и длиной волны λ , а распространение волн – уравнением Гельмгольца (1.16). Моделирование распространения монохроматического поля заключается в определении его комплексной амплитуды в любой момент времени в любой точке пространства. При моделировании распространения света следует рассмотреть распространение отдельных квазимонохроматических полей, а затем применить принцип суперпозиции с учётом их когерентных свойств в соответствии с законом интерференции (1.21).

Дифракция является основным явлением, которое происходит в оптических системах при формировании изображений. Существует несколько решений задачи дифракции, каждое из которых получено, исходя из определённых допущений, и имеет свои ограничения. В большинстве оптических систем рассматривается дифракция слаборасходящихся пучков в дальней дифракционной зоне, поэтому вполне применимо приближение Фраунгофера.

Вопросы

Какие свойства световых полей описывают уравнения Максвелла и волновые уравнения?

Почему для описания некоторых световых явлений достаточно одного волнового уравнения?

Какое световое поле называется монохроматическим? Какое поле можно считать квазимонохроматическим?

Что является математической моделью монохроматического поля?

Что описывают волновой фронт и эйконал поля? Как определяется оптическая длина прошедшего полем пути?

Приведите примеры решения уравнения Гельмгольца?

Какие характеристики поля могут быть зарегистрированы в физическом эксперименте?

При выполнении каких условий, возможна интерференция световых полей?

Какими характеристиками описываются когерентные свойства световых полей?

Как учитываются когерентные свойства световых полей при их суперпозиции?

Какую роль играет множитель $K(\alpha)$ в различных формулировках дифракционного интеграла?

При каких условиях для моделирования дифракционных явлений может использоваться приближение Френеля?

При каких условиях для моделирования дифракционных явлений может использоваться приближение Фраунгофера?

Задачи

- 1.1. На каком расстоянии начинается дальняя зона дифракции при рассмотрении пучка диаметром 100 мкм на длине волны 0.5 мкм.
- 1.2. В дифракционном эксперименте квадратное отверстие в непрозрачном экране освещается когерентно. Найти аналитическое выражение, описывающее распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера.
- 1.3. В дифракционном эксперименте непрозрачный квадратный экран освещается когерентно. Найти аналитическое выражение, описывающее распределение интенсивности в дифракционной картине Фраунгофера.
- 1.4. Диафрагма с диаметром отверстия 1 мм расположена за некогерентным источником. Свет, прошедший через отверстие используется в дифракционном эксперименте, в котором требуется когерентно освещать область поверхности диаметром 1 мм. Предполагая, что средняя длина волны равна 550 нм, определить минимально допустимое расстояние между диафрагмой и поверхностью анализа.
- 1.5. Диаметр солнечного диска при наблюдении с Земли приблизительно равен 32' (0.0093 рад) Предполагая, что средняя длина волны равна 550 нм и выполняются условия квазимонохроматичности, определить размеры области на поверхности Земли, в которой солнечный свет будет когерентным.
- 1.6. Точечный источник освещает две узкие параллельные щели, расположенные горизонтально на непрозрачном экране (опыт Юнга). Расстояние между щелями 2 мм. Получить выражение, описывающее распределение интенсивности на плоскости, параллельной экрану и удалённой от него на расстояние 1 м.

Глава 2. Дифракционная теория формирования изображения

Изображение можно представить в виде суперпозиции импульсных реакций на воздействие независимыми точечными источниками, распределёнными по всей плоскости предметов.

Эдвард О'Нейл

2.1. Моделирование распространения света через оптическую систему

Основной задачей теории формирования изображения является описание распространения электромагнитных волн от предмета до изображения через оптическую систему (Рис. 2.1). Для моделирования оптическую систему можно представить как совокупность оптических (прозрачных, однородных) сред n_i , разделённых оптическими поверхностями S_i (регулярными гладкими поверхностями определённой формы) [17].

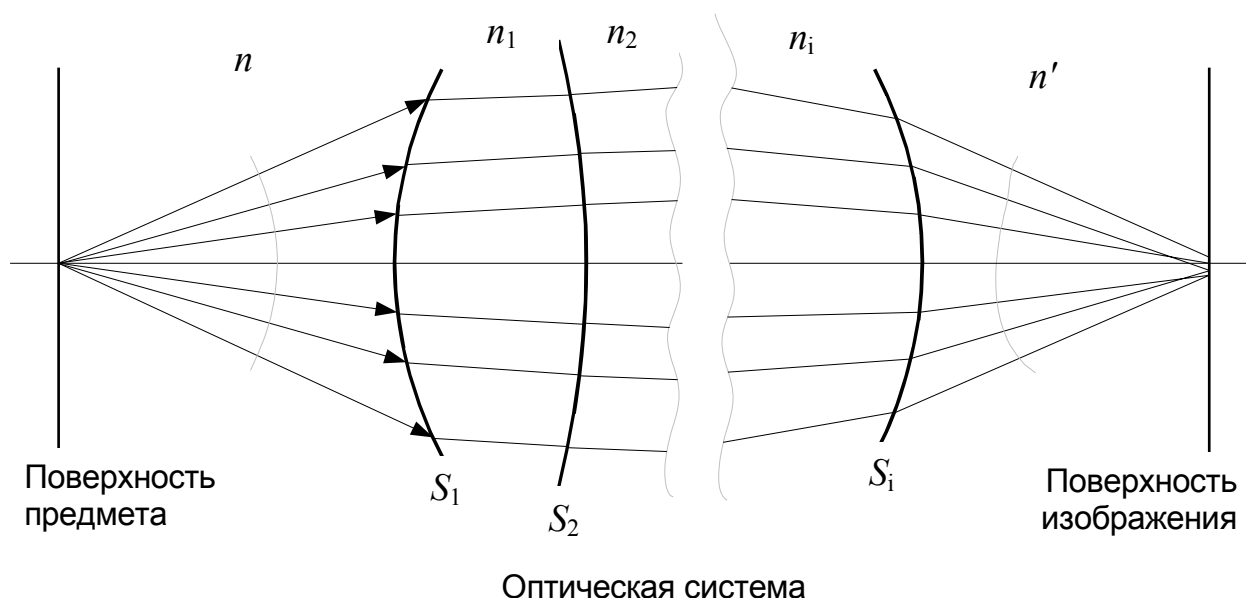


Рис. 2.1 Моделирование прохождения волнового фронта через оптическую систему

Волновой фронт, исходящий из точки предмета, преломляется (отражается) на оптических поверхностях, а затем сходится к точке изображения. В процессе этих преобразований происходит нарушение формы волнового фронта (то есть изменение фазы поля). Кроме того, волновой фронт ограничивается оправами и диафрагмами (экраны с отверстиями), на которых поле претерпевает дифракцию. При прохождении через поверхности и среды оптической системы ослабляется интенсивность поля.

Для описания распространения света через оптическую систему в уравнении Гельмгольца (1.16) показатель преломления n следует заменить функцией $N(\mathbf{r})$, описывающей влияние оптической системы на комплексную амплитуду проходящего поля:

$$\Delta U(\mathbf{r}) + k^2 \cdot N(\mathbf{r}) \cdot U(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.1)$$

Функция $N(\mathbf{r})$ описывает оптические среды, форму и расположение преломляющих и отражающих поверхностей, а также оправы и диафрагмы в виде совокупности граничных условий [17]. Частное решение уравнения Гельмгольца, соответствующее заданной функции $N(\mathbf{r})$ (то есть заданным параметрам поверхностей и сред) и заданной комплексной амплитуде поля на поверхности предмета, будет описывать поле в любой точке пространства между предметом и изображением. Однако получить такое универсальное решение для произвольной системы практически невозможно, а решение для какой-либо конкретной системы не позволяет сделать практически ценных обобщений. Поэтому, распространение поля через произвольную оптическую систему описывается частными решениями этого уравнения, полученными с использованием дополнительных приближений и допущений.

При прохождении поля через оптическую систему определяющую роль играют дифракционные явления. Дифракция происходит на оправках оптических деталей и диафрагмах, которые представляют собой отверстия обычно круглой или прямоугольной формы. Использование теории дифракции позволяет описать распространение электромагнитного поля от предмета до изображения через оптическую систему и построить адекватную модель формирования изображения.

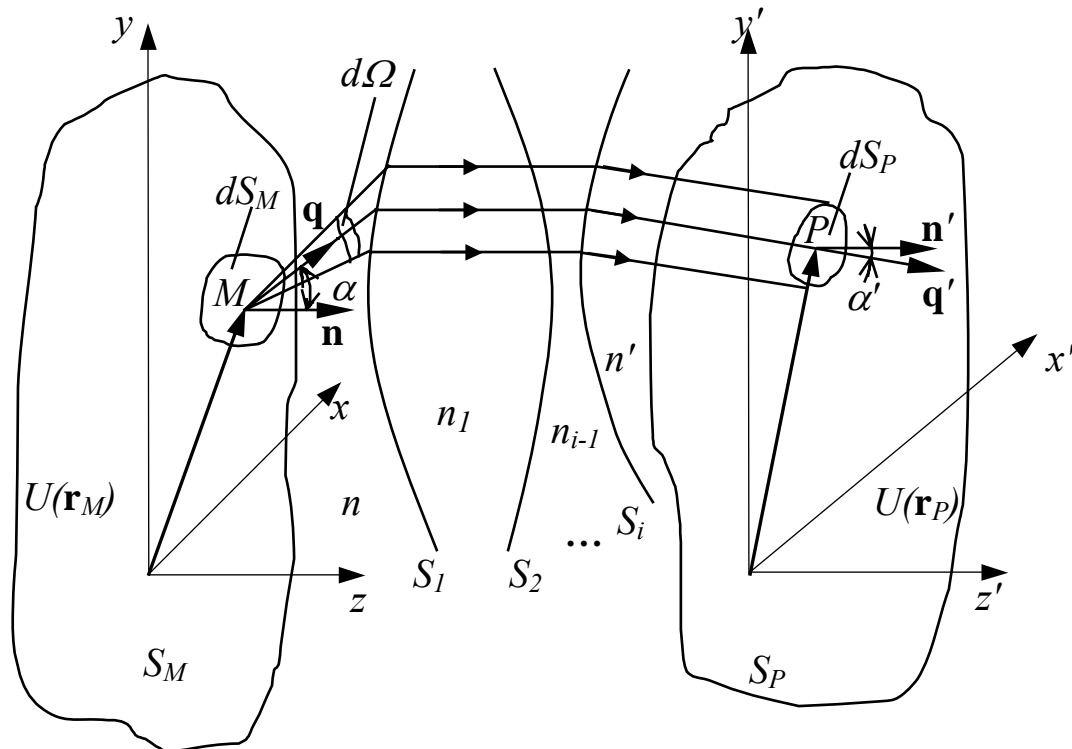


Рис. 2.2 Дифракционное распространение поля в оптической системе

Рассмотрим решение задачи дифракции, когда поверхности S_M и S_P разделены оптической системой, то есть набором последовательно расположенных оптических поверхностей S_1, \dots, S_i , между которыми среды

имеют показатели преломления n_1, \dots, n_{i-1} (Рис. 2.2). Предположим, что эти поверхности гладкие по сравнению с длиной волны λ , а показатели преломления либо постоянны, либо плавно меняются. В этом случае дифракцией на поверхностях S_1, \dots, S_i и на неоднородностях показателя преломления можно пренебречь. Предположим также, что поверхности S_M и S_P не сопряжены оптически, то есть существует не более одного луча, соединяющего любую пару точек этих поверхностей из окрестностей достаточно протяжённых по сравнению с длиной волны λ .

Сравнивая рисунки 1.3 и 2.2, легко увидеть, что расстояние r между точками M и P на рисунке 1.3, входящее в показатель экспоненты выражения (1.26), заменяется на оптический путь между этими точками, то есть координатный эйконал $E(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$. Множитель $1/r$ заменяется на $d\Omega \cdot n^2 / (dS_P \cdot \cos(\alpha'))$, где $d\Omega$ – элементарный телесный угол лучевой трубки, выходящей из точки M , dS_P – элементарная площадка, вырезаемая этой трубкой на поверхности S_P , а $\cos(\alpha')$ – проекция орта луча \mathbf{q}' на нормаль \mathbf{n}' к поверхности S_P . Кроме того, необходимо учесть возможные потери при прохождении поля через систему, введя неотрицательный коэффициент энергетического пропускания $\tau(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)$. Таким образом, общее выражение для описания дифракции при прохождении поля через оптическую систему записывается следующим образом [17]:

$$U(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{S_M} U(\mathbf{r}_M) \cdot \tau^{1/2}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \cdot e^{-ikE(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)} \cdot K(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) dS_M, \quad (2.2)$$

где множитель $K(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \cos(\alpha) \cdot \sqrt{d\Omega \cdot n^2 / (dS_P \cdot \cos(\alpha'))}$, а $\cos(\alpha)$ – проекция орта луча \mathbf{q} на нормаль к поверхности S_M .

Множители, описывающие влияние оптической системы на поле прошедшее от точки M до точки P , в подынтегральной части выражения (2.2) объединяются в коэффициент комплексного пропускания оптической системы [17]:

$$f(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) = \tau^{1/2}(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \cdot e^{-ikE(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P)}. \quad (2.3)$$

Таким образом, обобщённое выражение, описывающее распространение поля в оптической системе с учётом явления дифракции, можно записать так:

$$U(\mathbf{r}_P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{S_M} U(\mathbf{r}_M) \cdot f(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) \cdot K(\mathbf{r}_M, \mathbf{r}_P) dS_M. \quad (2.4)$$

Строгая модель формирования изображения должна учитывать действие всех диафрагм, а также оправ линз, и рассматривать распространение поля как ряд последовательных дифракций на каждой оправе и диафрагме [17]. Построение такой модели не только затруднительно, но и бесполезно: на фоне неизбежной сложности потеряются общие закономерности, описывающие связь между предметом и его изображением. Поэтому используются упрощённые, но

универсальные модели, в которых учитывается дифракция только на одной диафрагме (или её изображении, то есть зрачке).

2.2. Модели формирования изображений оптической системой

Одну из первых моделей работы оптической системы при формировании изображения сформулировал Аббе [3, 13, 19]. Он впервые использовал волновую теорию света в прикладной оптике, бывшей до этого исключительно сферой применения геометрической оптики. Исходя из результатов экспериментальных исследований объективов микроскопов при наблюдении объектов, имеющих периодическую структуру, Аббе предложил модель формирования изображения с двойной дифракцией (Рис. 2.3).

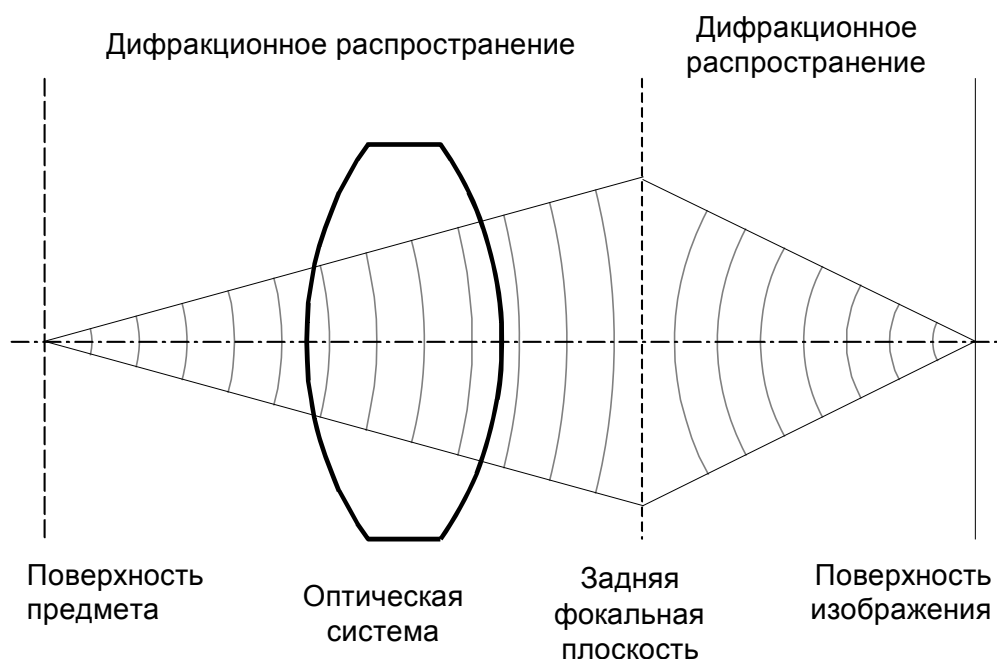


Рис. 2.3 Модель Аббе, описывающая формирование изображений

Согласно Аббе, предмет ведёт себя как дифракционная решётка, и поэтому, при анализе формирования изображения, в первую очередь, следует рассмотреть распространение дифрагированного поля от предмета до задней фокальной плоскости объектива. Опыты Аббе показали, что дифракционная картина в этой плоскости в приближении Фраунгофера, согласно выражению (1.34), представляет собой спектр плоских волн. На втором этапе так же с использованием приближения Фраунгофера рассматривается распространение поля от фокальной плоскости до плоскости изображения. Эта модель имеет ряд недостатков. В частности, она описывает преобразование поля между поверхностями предмета и изображения, но не учитывает влияние оптической системы на амплитуду и фазу проходящих волн. Адекватная модель формирования изображения также требует учёта ограничения размеров волнового фронта, проходящего через оптическую систему.

В модификациях модели Аббе рассмотрение дифракции переносится в пространство предметов или изображений, а ограничение волнового фронта не связывается с реальным положением диафрагм в системе. Такой подход позволяет получить достаточно простые и универсальные модели [18], отличие

которых заключается в выборе поверхности интегрирования в дифракционном интеграле. С целью получения наиболее простых и удобных выражений часто выбирается поверхность сферической формы. Исходя из различных соображений, поверхность интегрирования помещается в бесконечность или в зрачок, положение которого в общем случае не определяется однозначно.

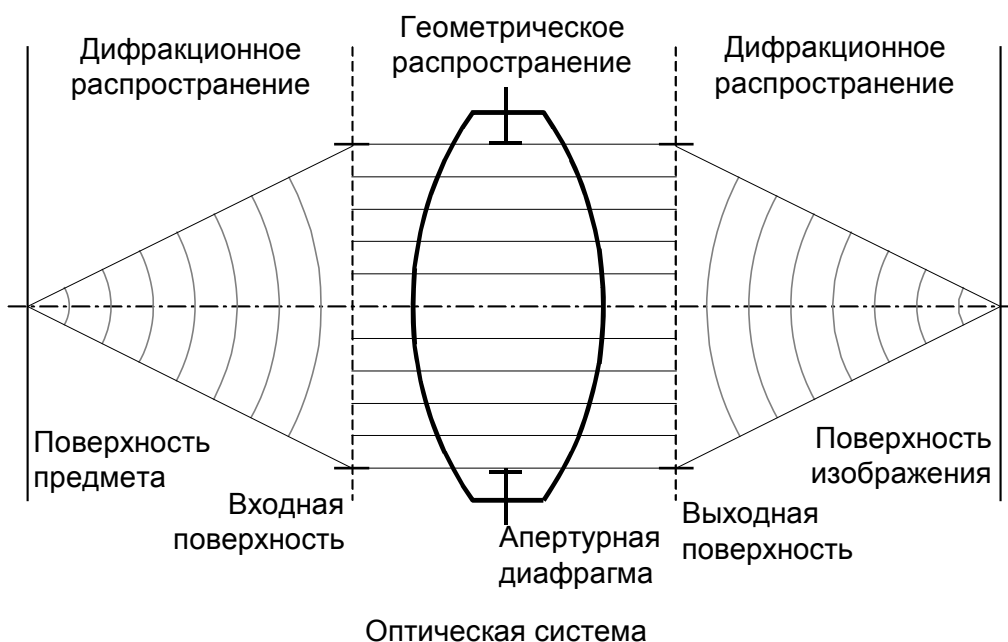


Рис. 2.4 Модель формирования изображения с учётом дифракции на апертурной диафрагме

Наиболее близкой к реальным процессам, происходящим в оптической системе, является модель, построенная на основе концепции *апертурной диафрагмы* [17]. Эта модель основана на предположении о том, что в оптической системе световой пучок, исходящий из любой точки предмета ограничивается одной апертурной диафрагмой, а размеры всех других диафрагм настолько больше размеров проходящего через них пучка, что влиянием дифракции на них можно пренебречь. Другими словами, все диафрагмы системы заменяются одной эквивалентной им по ограничению пучка апертурной диафрагмой. Дифракция в этой модели выносится за пределы оптической системы в пространство предметов и пространство изображений. Роль оптической системы в процессе формирования изображения сводится к переносу поля от входной поверхности, которая находится в пространстве предметов, до выходной поверхности в пространстве изображений (Рис. 2.4).

Таким образом, процесс распространения поля через оптическую систему в этой модели разбивается на три этапа:

1. Дифракционное распространение поля от предмета до входной поверхности.
2. Прохождение поля от входной до выходной поверхности.
3. Дифракционное распространение поля в пространстве изображений.

Рассмотрим этапы распространения поля через оптическую систему более подробно.

2.3. Дифракционное распространение поля в пространстве предметов

Решение задачи дифракции в пространстве предметов осуществляется следующим образом [17]. Пусть S_M – поверхность предмета, M_o – центр некоторой зоны на поверхности предмета, M – произвольная точка в окрестности M_o , S_P – некоторая входная поверхность, P – произвольная точка на этой поверхности, \mathbf{r}_o – вектор с началом в точке M_o и концом в точке P , а \mathbf{r} – вектор с началом в точке M и концом в точке P (Рис. 2.5).

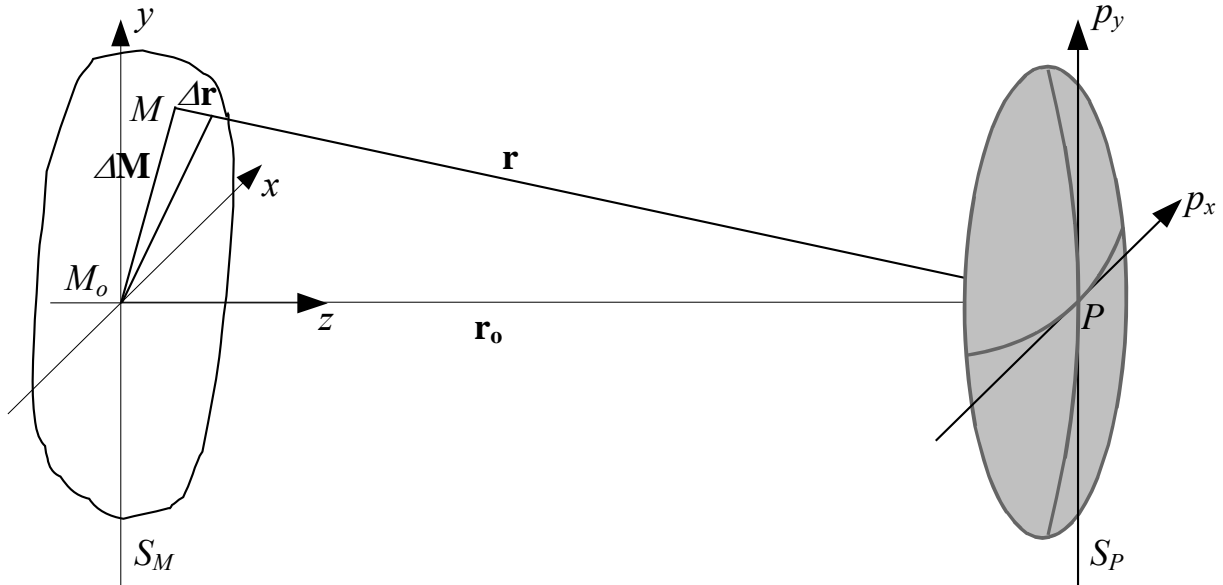


Рис. 2.5 Дифракционное распространение поля в пространстве предметов

Предположим, что входная поверхность S_P удалена от поверхности предмета S_M , так что выполняется неравенство: $r \gg \Delta M$. Тогда, угол между вектором \mathbf{r} и нормалью к поверхности S_P в точке P будет достаточно мал, и зависимость от него можно считать постоянной. Это возможно, если телесный угол, в котором распространяется поле, не слишком велик, то есть, угловая апертура оптической системы невелика [17].

Согласно (1.26) полное поле в точке P с точностью до постоянной величины c_0 описывается следующим выражением:

$$U(\mathbf{r}_P) = c_0 \iint_{S_M} U(\mathbf{r}_M) \cdot \frac{e^{-iknr}}{r} dS_M. \quad (2.5)$$

Заменим расстояние r между точками M и P суммой $r_o + \Delta r$, где Δr – длина проекции вектора $\Delta \mathbf{M}$ на вектор \mathbf{r} , которая определяется их скалярным произведением $\Delta r = \Delta \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}$, и преобразуем выражение (2.5):

$$U(\mathbf{r}_P) = c_0 \iint_{S_M} U(\mathbf{r}_M) \cdot \frac{e^{-iknr_o}}{(r_o + \Delta r)} \cdot e^{-ikn \cdot \Delta r} dS_M. \quad (2.6)$$

Так как $r \gg \Delta M$, то $r_o \gg \Delta r$, то $r_o + \Delta r = r_o \cdot (1 + \Delta r/r_o) \approx r_o$. Таким образом, множитель $e^{-iknr_o}/(r_o + \Delta r)$ не зависит от переменной интегрирования и может быть вынесен за знак интеграла. В общем случае он зависит от положения точки P , причём эта зависимость определяется формой поверхности, по которой осуществляется интегрирование. Для упрощения выражения выбирают входную поверхность таким образом, чтобы зависимость r_o от точки P была как можно более простой. Если в качестве этой поверхности выбрать сферу с центром в точке M_o , то зависимость $r_o(\mathbf{r}_P) = const$ и выражение можно переписать, объединив все постоянные в c_1 :

$$U(\mathbf{r}_P) = c_1 \iint_{S_M} U(\mathbf{r}_M) \cdot e^{-ikn \cdot \Delta r} dS_M. \quad (2.7)$$

Это выражение описывает дифракцию в пространстве предметов, то есть распространение поля от поверхности предмета до входной поверхности, которая имеет форму сферы концентричной точке M_o .

Для получения простых выражений необходимо перейти к декартовым координатам на предмете и входной сфере (Рис. 2.5). На предмете декартову систему удобно выбрать таким образом, чтобы координаты вектора $\Delta \mathbf{M}$ были равны обобщённым координатам на предмете (x, y) [15]. Тогда, для предмета близкого типа начало координат будет находиться в точке M_o , а ось z направлена перпендикулярно поверхности предмета. В случае удалённого предмета начало координат помещается в центре зрачка P_o , а ось z проходит через точку M_o . Положение входного зрачка определяется как положение изображения апертурной диафрагмы в пространстве предметов. Зрачковую систему координат удобно установить так, чтобы координаты вектора \mathbf{r} были пропорциональны предметным направляющим косинусам $X = \cos(\alpha_x)$ и $Y = \cos(\alpha_y)$. В этом случае зрачковые координаты определяются как произведение показателя преломления на направляющий косинус ($p_x = nX, p_y = nY$). Таким образом, скалярное произведение векторов $\Delta \mathbf{M}$ и \mathbf{r} определяется суммой произведений их координат:

$$\Delta r = \Delta \mathbf{M} \cdot \mathbf{r} = xX + yY = \frac{xp_x + yp_y}{n}. \quad (2.8)$$

Подставляя выражение (2.8) в (2.7) и переходя от интеграла по поверхности к интегрированию по координатной плоскости, получаем:

$$U(p_x, p_y) = c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y) \cdot e^{-ik(xp_x + yp_y)} dx dy. \quad (2.9)$$

Итак, распространение поля в пространстве предметов описывается преобразованием Фурье [6, 12], в котором интегрирование производится по плоскости предмета, а поле определяется на входной поверхности. В качестве входной поверхности выбрана сфера, которая проходит через центр входного зрачка, а её центр располагается в центре рассматриваемой зоны предмета.

2.3. Дифракционное распространение поля в пространстве предметов

Для получения универсального выражения, описывающего дифракцию в пространстве предметов различных оптических систем, воспользуемся системой канонических координат [15, 26] (Приложение А). *Зрачковые канонические координаты* определяют относительное положение на зрачке:

$$\rho_x = \frac{p_x}{A_x}; \rho_y = \frac{p_y}{A_y}, \quad (2.10)$$

где A_x и A_y – передние обобщённые апертуры. *Предметные канонические координаты* являются приведёнными и определяются следующим образом:

$$\eta_x = x \cdot \frac{A_x}{\lambda}; \eta_y = y \cdot \frac{A_y}{\lambda}. \quad (2.11)$$

Таким образом, при подстановке (2.10) и (2.11) в выражение (2.9) степень экспоненциального множителя видоизменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} k \cdot (xp_x + yp_y) &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(\eta_x \frac{\lambda}{A_x} \cdot \rho_x A_x + \eta_y \frac{\lambda}{A_y} \cdot \rho_y A_y \right) = \\ &= 2\pi \cdot (\eta_x \rho_x + \eta_y \rho_y). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Теперь выражение (2.9) можно переписать, заменив переменные интегрирования и объединив все постоянные множители в c_2 :

$$U(\rho_x, \rho_y) = c_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\eta_x, \eta_y) \cdot e^{-2\pi i(\eta_x \rho_x + \eta_y \rho_y)} d\eta_x d\eta_y. \quad (2.13)$$

Замена декартовых координат каноническими позволила описать дифракцию в пространстве предметов преобразованием Фурье без масштабных множителей. Простое и универсальное выражение (2.13) справедливо для предметов как ближнего, так и дальнего типа.

Преобразуем и рассмотрим подынтегральную часть выражения (2.13):

$$U(\eta_x, \eta_y) d\eta_x d\eta_y \cdot e^{-2\pi i(\eta_x \rho_x + \eta_y \rho_y)} = U_0 \cdot e^{-2\pi i(\eta_x \rho_x + \eta_y \rho_y)}. \quad (2.14)$$

Это выражение представляет собой частное решение уравнения Гельмгольца (1.16) для плоской волны. Оно описывает комплексную амплитуду волны, фронт которой является плоским и перпендикулярным вектору распространения. Следовательно, согласно выражению (2.13) исходное поле рассматривается как сумма (суперпозиция) полей, образованных в точке (η_x, η_y) элементарными плоскими волнами. В силу линейности волнового уравнения Гельмгольца распространение поля от плоскости предмета можно представить в виде независимого распространения множества таких плоских волн. На входной поверхности их комплексные амплитуды складываются. Таким образом, выражение (2.13) описывает разложение поля на плоскости предмета в спектр плоских волн и сборку прошедших волн в поле на входной поверхности оптической системы.

2.4. Геометрическое распространение поля через оптическую систему

Рассмотрим модель прохождения поля от входной до выходной поверхности оптической системы. Если размеры апертурной диафрагмы несравнимо больше длины волны, то дифракционными явлениями, происходящими в узкой области вблизи её краёв, можно пренебречь и считать, что внутри оптической системы дифракции не происходит [17]. Размеры поля проходящего через систему ограничивает только апертурная диафрагма. В области апертурной диафрагмы поле проходит, а за её пределами поле не проходит (обрезается). В этом случае можно пользоваться геометрическим приближением, в котором полагается, что поле распространяется через оптическую систему вдоль лучей, соединяющих входную и выходную поверхности.

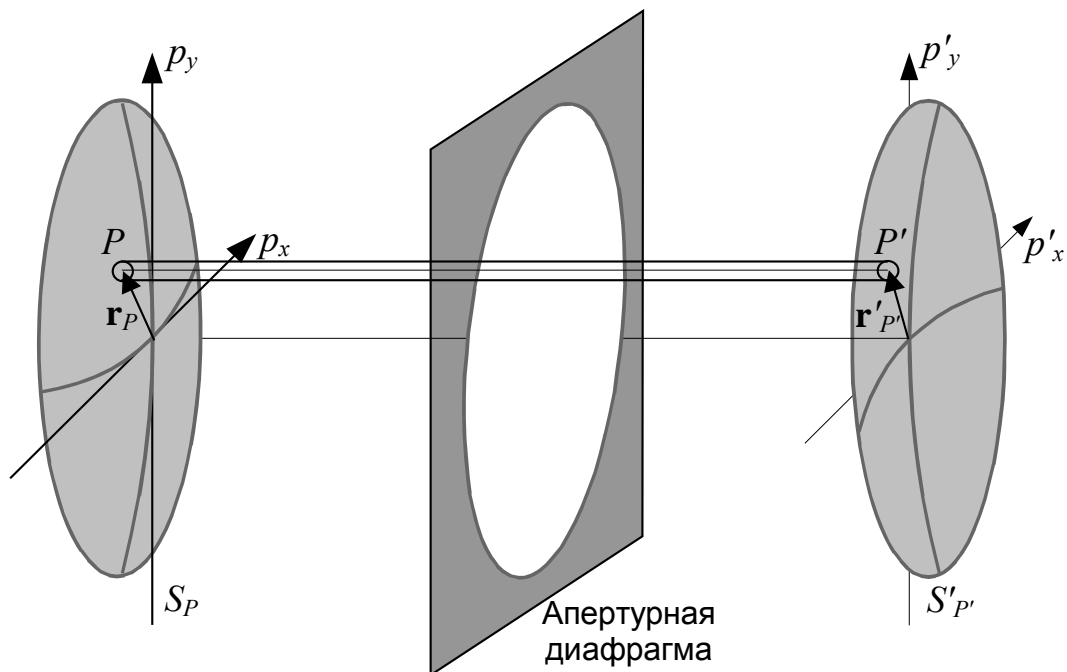


Рис. 2.6 Геометрическое распространение поля через оптическую систему

Пусть поверхности S_P и S'_P являются входной и выходной сферой соответственно (Рис. 2.6). Луч входит в систему через точку P на входной сфере, проходит через оптическую систему и выходит через точку P' на выходной сфере. Зная комплексную амплитуду поля $U(\mathbf{r}_P)$, необходимо найти комплексную амплитуду поля $U'(\mathbf{r}'_{P'})$. В геометрическом приближении полагают, что поле распространяется вдоль лучей внутри узких световых трубок, соединяющих элементарные площадки dS_P и $dS'_{P'}$ волнового фронта.

Световые потоки $d\Phi_P$ и $d\Phi'_{P'}$, прошедшие через площадки dS_P и $dS'_{P'}$ соответственно, отличаются только множителем $\tau(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}'_{P'})$, который характеризует пропускание среды вдоль луча PP' :

$$d\Phi'_{P'} = d\Phi_P \cdot \tau(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}'_{P'}). \quad (2.15)$$

Световой поток, прошедший через некоторую площадку, пропорционален её площади, квадрату амплитуды поля a и показателю преломления оптической среды [1]:

$$d\Phi_P = n \cdot a^2(\mathbf{r}_P) \cdot dS_P, \quad d\Phi_{P'} = n' \cdot a'^2(\mathbf{r}_{P'}) \cdot dS_{P'}. \quad (2.16)$$

Таким образом, изменение амплитуды поля можно описать следующим образом:

$$a'(\mathbf{r}_{P'}) = a(\mathbf{r}_P) \cdot \tau^{1/2}(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_{P'}) \cdot \left(\frac{n}{n'} \cdot \frac{dS_P}{dS_{P'}} \right)^{1/2}. \quad (2.17)$$

В свою очередь, эйконал поля в точке P будет отличаться от эйконала в точке P' на величину $\Delta E(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_{P'})$:

$$E'(\mathbf{r}_{P'}) = E(\mathbf{r}_P) + \Delta E(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_{P'}). \quad (2.18)$$

Объединим выражения (2.17) и (2.18) в соответствии с (1.13). После преобразования получаем выражение, описывающее распространение комплексной амплитуды поля в геометрическом приближении:

$$U'(\mathbf{r}_{P'}) = U(\mathbf{r}_P) \cdot \tau^{1/2}(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_{P'}) \cdot e^{-ik \cdot \Delta E(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_{P'})} \cdot \left(\frac{n}{n'} \cdot \frac{dS_P}{dS_{P'}} \right)^{1/2} \quad (2.19)$$

или

$$U'(\mathbf{r}_{P'}) = U(\mathbf{r}_P) \cdot f(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_{P'}) \cdot \left(\frac{n}{n'} \cdot \frac{dS_P}{dS_{P'}} \right)^{1/2}, \quad (2.20)$$

где $f(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_{P'}) = \tau^{1/2}(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_{P'}) \cdot e^{-ik \cdot \Delta E(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_{P'})}$ – комплексное пропускание, которое описывает изменение амплитуды и эйконала при прохождении полем пространства от точки P до точки P' . После перехода к декартовым координатам и выделения всех постоянных множителей в константу c_0 это выражение примет вид:

$$U'(p'_x, p'_y) = c_0 \cdot U(p_x, p_y) \cdot f(p_x, p_y) \cdot \left(\frac{dp_x dp_y}{dp'_x dp'_y} \right)^{1/2}, \quad (2.21)$$

где $f(p_x, p_y) = \tau^{1/2}(p_x, p_y) \cdot e^{-ik \cdot \Delta E(p_x, p_y)}$ – функция комплексного пропускания оптической системы или *зрачковая функция*. В общем случае координаты на входной и выходной поверхности связаны преобразованиями $p'_x = p'_x(p_x, p_y)$ и $p'_y = p'_y(p_x, p_y)$. Но в пределах небольших зон они пропорциональны, и последний множитель в выражении (2.21) можно считать постоянным. После объединения всех постоянных множителей в константу c_1 получаем:

$$U'(p'_x, p'_y) = c_1 \cdot U(p_x, p_y) \cdot f(p_x, p_y). \quad (2.22)$$

Таким образом, зрачковая функция играет роль передаточной характеристики оптической системы в процессе преобразования комплексной

амплитуды поля. Если бы оптическая система не влияла на проходящее поле, то зрачковая функция $f(p_x, p_y)$ была бы равна единице и комплексная амплитуда поля на выходной поверхности была бы равна комплексной амплитуде поля на входной поверхности. Изображение было бы в точности подобно предмету, но это невозможно по ряду причин. Во-первых, размеры оптической системы ограничены, а значит, поле на выходной поверхности будет обрезано по сравнению с полем на входной поверхности. Во-вторых, в области своего существования зрачковая функция может отличаться от единицы из-за неравномерности влияния на амплитуду поля в различных его точках. Непостоянство, которое вызывается различием в оптическом пути, проходимом лучами, а так же различием в углах падения лучей на поверхности раздела сред (и соответственно неодинаковостью френелевского отражения и поглощения), описывает функция амплитудного пропускания $\tau(p_x, p_y)$. В-третьих, в области своего существования зрачковая функция может отличаться от единицы из-за непостоянства оптической длины хода лучей и, соответственно, неравномерности влияния на эйконал поля в различных его точках. Изменение эйконала поля описывает функция $\Delta E(p_x, p_y)$, равная оптической длине луча, который проходит от предмета через входную сферу в точке (p_x, p_y) , всю оптическую систему до изображения:

$$\Delta E(p_x, p_y) = \sum_{i=0}^n n_i l_i(p_x, p_y), \quad (2.23)$$

где n – количество сред, через которые проходит поле в оптической системе.

Таким образом, зрачковая функция в общем случае определяется выражением:

$$f(p_x, p_y) = \begin{cases} \tau^{1/2}(p_x, p_y) \cdot e^{-ik \cdot \Delta E(p_x, p_y)}, & (p_x, p_y) \in \Omega; \\ 0, & (p_x, p_y) \notin \Omega, \end{cases} \quad (2.24)$$

где Ω – область существования зрачковой функции, которая определяется формой апертурной диафрагмы.

Фазовая компонента зрачковой функции может быть преобразована:

$$k \cdot \Delta E(p_x, p_y) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sum_{i=0}^n n_i l_i(p_x, p_y) = 2\pi W(p_x, p_y), \quad (2.25)$$

где $W(p_x, p_y)$ – функция волновой аберрации, выраженная в единицах длин волн и описывающая разность оптических длин хода произвольного луча и главного луча пучка.

После перехода к каноническим координатам зрачковая функция оптической системы с круглым зрачком принимает следующий вид:

$$f(\rho_x, \rho_y) = \begin{cases} \tau^{1/2}(\rho_x, \rho_y) \cdot e^{-2\pi i W(\rho_x, \rho_y)}, & \rho_x^2 + \rho_y^2 \leq 1; \\ 0, & \rho_x^2 + \rho_y^2 > 1. \end{cases} \quad (2.26)$$

Это выражение используется для описывания влияния оптической системы на проходящее поле при формировании изображения данной точки предмета на данной длине волны.

Итак, комплексная амплитуда $U'(\rho'_x, \rho'_y)$ поля на выходной поверхности с точностью до постоянного множителя равна произведению комплексной амплитуды поля на входной поверхности на зрачковую функцию оптической системы для данной точки поля:

$$U'(\rho'_x, \rho'_y) = U(\rho_x, \rho_y) \cdot f(\rho_x, \rho_y). \quad (2.27)$$

Геометрическое приближение отличается крайней простотой, но справедливо только при соблюдении следующего существенного требования: амплитуда поля и амплитудное пропускание оптической системы не должны иметь резких изменений, размеры которых сравнимы с длиной волны. Это требование не соблюдается вблизи поверхности предмета и изображения, а также вблизи краёв диафрагм, где функция пропускания претерпевает резкое изменение до 0. Распространение поля в этих условиях обязательно должно учитывать явление дифракции.

2.5. Дифракционное распространение поля в пространстве изображений

При рассмотрении дифракции в пространстве изображений в качестве выходной поверхности выбирается сфера, которая проходит через центр выходного зрачка P' , а её центр располагается в точке M'_o – центре рассматриваемой зоны изображения (Рис. 2.7). Положение выходного зрачка определяется как положение изображения апертурной диафрагмы в пространстве изображений оптической системы.

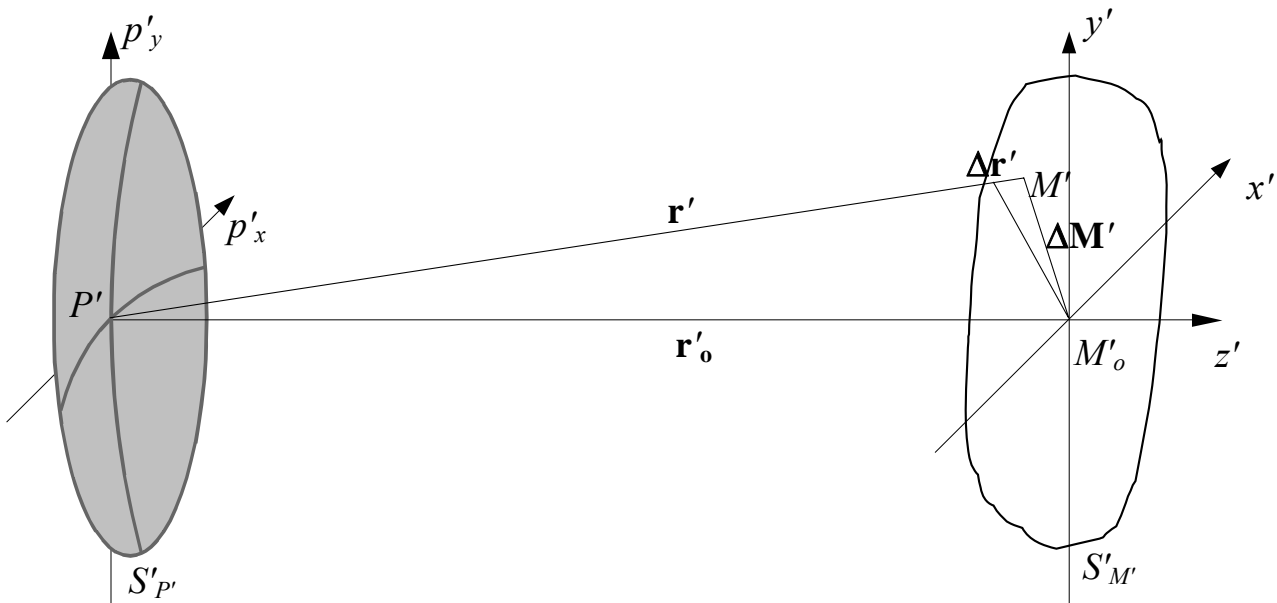


Рис. 2.7 Дифракционное распространение поля в пространстве изображений

Распространение поля в пространстве изображений, то есть от выходной поверхности $S'_{P'}$ до поверхности изображения $S'_{M'}$, описывается

дифракционным интегралом. По аналогии с выводом выражения (2.6), описывающего дифракцию в пространстве предметов, получим выражение для дифракционного распространения поля от выходной сферы до изображения:

$$U'(\mathbf{r}'_{M'}) = \iint_{S'_{P'}} U'(\mathbf{r}'_{P'}) \cdot e^{-ikn\Delta r'} dS'_{P'} . \quad (2.28)$$

В случае конечного расстояния до изображения начало декартовой системы координат помещают в точку M'_o , а ось z – нормальна поверхности. В случае бесконечно удалённого изображения начало системы координат помещается в точку P' – центр выходного зрачка, а ось z направляется в точку M'_o – центр зоны изображения. В декартовых координатах скалярное произведение векторов $\Delta \mathbf{M}'$ и \mathbf{r}' определяется следующим выражением:

$$\Delta r' = \Delta \mathbf{M}' \cdot \mathbf{r}' = -x'X' - y'Y' = -\frac{x'p'_x + y'p'_y}{n'} . \quad (2.29)$$

Подставляя выражение (2.29) в (2.28) и переходя от интеграла по поверхности к интегрированию по координатной плоскости, с точностью до постоянного множителя получаем:

$$U'(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U'(p'_x, p'_y) \cdot e^{ik(p'_x x' + p'_y y')} dp'_x dp'_y . \quad (2.30)$$

После перехода к каноническим координатам пренебрегая постоянным множителем, получаем окончательное выражение для описания дифракции в пространстве изображений:

$$U'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U'(\rho'_x, \rho'_y) \cdot e^{2\pi i(\rho'_x \eta'_x + \rho'_y \eta'_y)} d\rho'_x d\rho'_y . \quad (2.31)$$

Таким образом, распространение поля в пространстве изображений описывается обратным преобразованием Фурье, в котором интегрирование осуществляется по выходной поверхности, а поле определяется на поверхности изображения. Так же как и (2.13) выражение (2.31) показывает разложение поля на выходной поверхности в спектр плоских волн и сборку прошедших волн в поле на поверхности изображения.

2.6. Алгоритм моделирования распространения поля через оптическую систему

Полученные выражения пригодны для осуществления численной реализации моделирования распространения поля через оптические системы. Входными данными для моделирования являются $U(\eta_x, \eta_y)$ – комплексная амплитуда поля на предмете и $f(\rho_x, \rho_y)$ – зрачковая функция, описывающая влияние оптической системы на проходящее поле. Алгоритм распространения поля от предмета через оптическую систему до изображения с точностью до постоянных множителей можно описать следующим образом:

2.6. Алгоритм моделирования распространения поля через оптическую систему

1) Дифракционное распространение поля от плоскости предмета до входной сферы:

$$U(\rho_x, \rho_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\eta_x, \eta_y) \cdot e^{-2\pi i(\eta_x \rho_x + \eta_y \rho_y)} d\eta_x d\eta_y = F[U(\eta_x, \eta_y)]. \quad (2.32)$$

2) Геометрическое распространение поля от входной до выходной сферы:

$$U'(\rho'_x, \rho'_y) = U(\rho_x, \rho_y) \cdot f(\rho_x, \rho_y). \quad (2.33)$$

3) Дифракционное распространение поля от выходной сферы до плоскости изображения:

$$U'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U'(\rho'_x, \rho'_y) \cdot e^{2\pi i(\eta'_x \rho'_x + \eta'_y \rho'_y)} d\rho'_x d\rho'_y = F^{-1}[U'(\rho'_x, \rho'_y)]. \quad (2.34)$$

4) Вычисление распределения интенсивности на изображении:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = |U'(\eta'_x, \eta'_y)|^2. \quad (2.35)$$

Объединяя выражения (2.32 – 2.35), можно получить общее выражение для вычисления распределения интенсивности на плоскости изображения по заданной комплексной амплитуде поля на плоскости предмета:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \left| F^{-1} \left[F[U(\eta_x, \eta_y)] \cdot f(\rho_x, \rho_y) \right] \right|^2. \quad (2.36)$$

В канонических координатах эта схема моделирования справедлива и идентична для любых типов оптических систем, для любых точек поля и длин волн.

2.7. Формирование изображений самосветящихся предметов

Основное свойство оптических систем заключается в способности формировать изображение, преобразуя поле, идущее из пространства предметов. Рассмотрим формирование изображения предмета, который представляет собой светящуюся точку (точечный источник). В этом случае, комплексную амплитуду поля на предмете можно описать дельта-функцией Дирака [6]:

$$U(\eta_x, \eta_y) = \delta(\eta_x, \eta_y) = \begin{cases} \infty, & \eta_x = \eta_y = 0; \\ 0, & \eta_x \neq 0, \eta_y \neq 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Распределение интенсивности на плоскости изображения определяется согласно выражению (2.36). Зная, что фурье-образ дельта-функции равен 1, можно записать:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \left| F^{-1} \left[F[\delta(\eta_x, \eta_y)] \cdot f(\rho_x, \rho_y) \right] \right|^2 = \left| F^{-1} [f(\rho_x, \rho_y)] \right|^2. \quad (2.38)$$

Распределение интенсивности в изображении светящейся точки обычно обозначается $h(\eta'_x, \eta'_y)$ и называется *функцией рассеяния точки (ФРТ)*. Таким образом, ФРТ определяется выражением:

$$h(\eta'_x, \eta'_y) = \left| F^{-1} [f(\rho_x, \rho_y)] \right|^2. \quad (2.39)$$

Характер распределения интенсивности в изображении точки или, как говорят, форму *пятна рассеяния*, определяют только характеристики оптической системы [3, 9, 14].

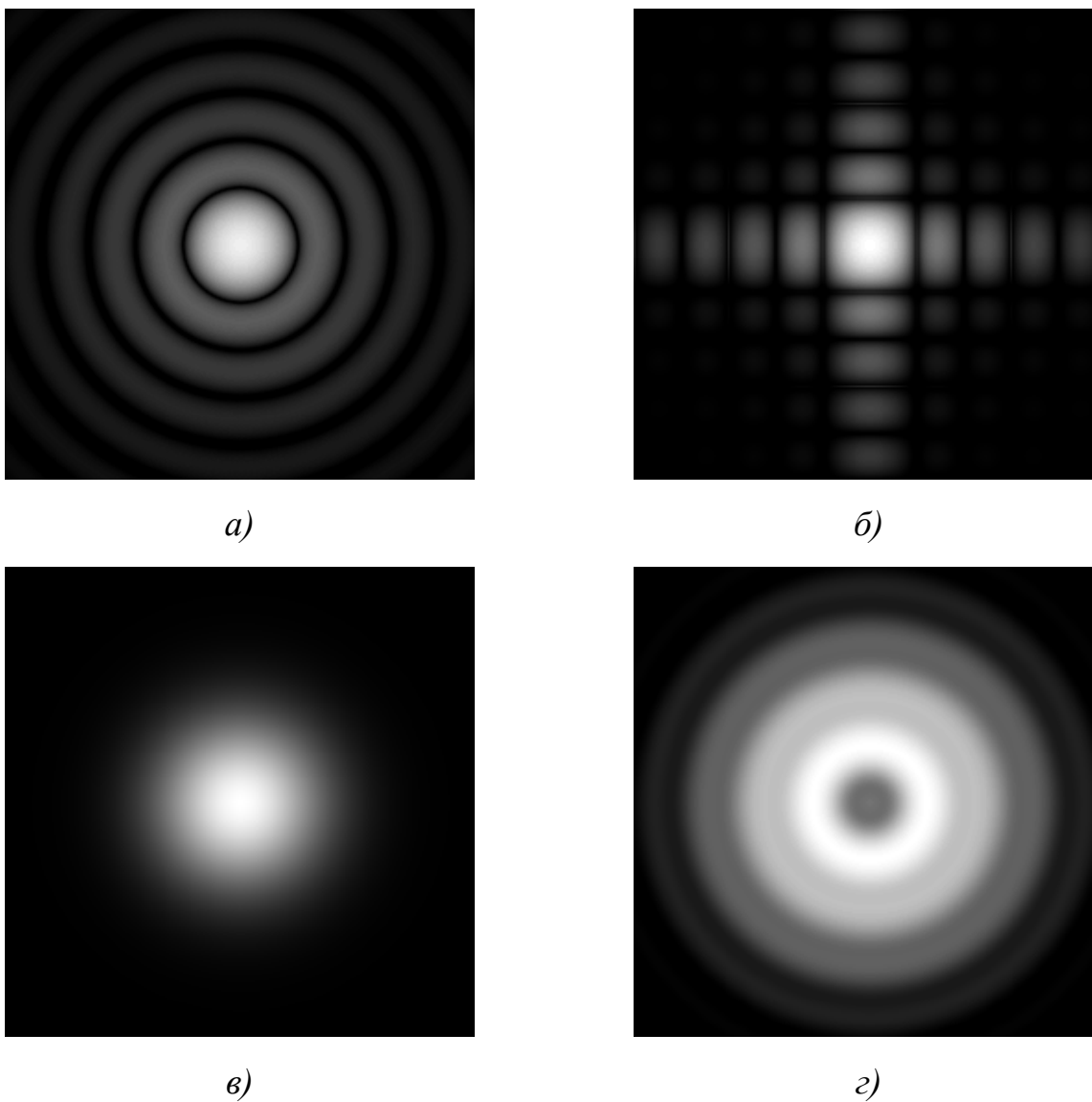


Рис. 2.8 Изображение светящейся точки, создаваемое различными оптическими системами

На рисунке 2.8 (а) представлено распределение интенсивности в изображении светящейся точки сформированное безаберрационной оптической системой с апертурной диафрагмой круглой формы. Это изображение точечного источника также называют *дифракционной картиной Эйри*, а центральную область до первого минимума – *диск Эйри* [3]. Распределение интенсивности в изображении точки, полученное с помощью оптической системы с квадратной апертурной диафрагмой, представлено на рисунке 2.8 (б). Существенное влияние на распределение интенсивности оказывают неравномерность пропускания и aberrации оптической системы. На рисунке 2.8 (в) представлено пятно рассеяния оптической системы с экспоненциальным

падением функции амплитудного пропускания $\tau(\rho_x, \rho_y)$. Распределение интенсивности на изображении, сформированное оптической системой при наличии расфокусировки, представлено на рисунке 2.8 (г). Таким образом, характерное изменение пятна рассеяния позволяет использовать ФРТ для анализа свойств и качества оптической системы.

Реальные источники излучения имеют протяжённые размеры и состоят из большого числа элементарных излучателей. Рассмотрим формирование изображения предмета, который представляет собой источник произвольных размеров и формы. Светящийся предмет можно описать функцией распределения яркости $B(\eta_x, \eta_y)$ и представить в виде совокупности взаимно некогерентных точечных излучателей:

$$B(\eta_x, \eta_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_o(\eta_{sx}, \eta_{sy}) \cdot \delta(\eta_x - \eta_{sx}, \eta_y - \eta_{sy}) d\eta_{sx} d\eta_{sy}, \quad (2.40)$$

где $B_o(\eta_{sx}, \eta_{sy})$ – функция, описывающая область существования и распределение яркости в системе координат источника. Таким образом, (η_{sx}, η_{sy}) – величина смещения рассматриваемой точки источника относительно центра координат на плоскости предмета.

Для моделирования формирования изображения такого предмета необходимо рассмотреть изображение каждой точки источника в отдельности, а затем представить изображение как сумму интенсивностей изображений этих точек. Определим распределение интенсивности в изображении отдельной точки светящегося предмета, смещённой относительно центра на небольшую величину (η_{sx}, η_{sy}) . Комплексная амплитуда поля, приходящего от этой точки источника на входную поверхность оптической системы, пропорциональна значению яркости в данной точке источника и находится по теореме о сдвиге преобразования Фурье [6, 12] (Приложение Б):

$$U(\eta_{sx}, \eta_{sy}, \rho_x, \rho_y) = B_o(\eta_{sx}, \eta_{sy}) \cdot e^{2\pi i(\eta_{sx}\rho_x + \eta_{sy}\rho_y)}. \quad (2.41)$$

Комплексная амплитуда поля после прохождения оптической системы определяется согласно выражению (2.33):

$$U'(\eta_{sx}, \eta_{sy}, \rho'_x, \rho'_y) = B_o(\eta_{sx}, \eta_{sy}) \cdot f(\rho_x, \rho_y) \cdot e^{2\pi i(\eta_{sx}\rho_x + \eta_{sy}\rho_y)}. \quad (2.42)$$

Используя выражения (2.34) и (2.35), распределение интенсивности изображения отдельной точки предмета можно определить следующим образом:

$$I'(\eta_{sx}, \eta_{sy}, \eta'_x, \eta'_y) = \left| B_o(\eta_{sx}, \eta_{sy}) \cdot \tilde{f}(\eta'_x - \eta_{sx}, \eta'_y - \eta_{sy}) \right|^2, \quad (2.43)$$

где \tilde{f} – фурье-образ зрачковой функции, который смещён относительно центра координат на изображении на величину (η_{sx}, η_{sy}) . Если система координат, описывающая источник, совмещена с системой координат предмета, то вместо обозначения (η_{sx}, η_{sy}) можно использовать непосредственно (η_x, η_y) , и,

раскрывая скобки модуля, выражение (2.43) можно переписать следующим образом:

$$I'(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y) = B_o^2(\eta_x, \eta_y) \cdot h(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y). \quad (2.44)$$

Итоговое изображение источника произвольной формы можно найти как сумму изображений всех его точек.

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_o^2(\eta_x, \eta_y) \cdot h(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) d\eta_x d\eta_y. \quad (2.45)$$

Интеграл такого вида называется свёрткой [6, 12], и для его обозначения используется символ \otimes :

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = B_o^2(\eta_x, \eta_y) \otimes h(\eta_x, \eta_y). \quad (2.46)$$

Таким образом, изображение светящегося предмета произвольных размеров и формы определяется свёрткой квадрата функции распределения яркости $B_o(\eta_x, \eta_y)$ с функцией рассеяния точки $h(\eta_x, \eta_y)$ оптической системы.

Следует отметить, что влияние, оказываемое оптической системой на поле приходящее из разных точек, будет различным и должно описываться различными зрачковыми функциями $f(\eta_x, \eta_y, \rho_x, \rho_y)$ [3, 17]. Каждой точке предмета соответствует своё распределение интенсивности на изображении $h(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y)$, то есть своя ФРТ. Таким образом, в общем случае для определения интенсивности на изображении используется следующее выражение:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_o^2(\eta_x, \eta_y) \cdot h(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y) d\eta_x d\eta_y. \quad (2.47)$$

Впрочем, как показывает практика, для хорошо скорректированной (дифракционно-ограниченной [6, 15]) оптической системы при изменении координат на предмете ФРТ изменяется незначительно. При анализе формирования изображения на поверхности предмета следует выделить области, в пределах которых функция $h(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y)$ инвариантна к сдвигу, то есть:

$$h(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y) = h(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y). \quad (2.48)$$

Области, обладающие таким свойством, называются *изопланатическими зонами*. Если размеры области предмета меньше изопланатической зоны, то для моделирования формирования изображения вместо выражения (2.47) можно использовать выражение (2.45).

2.8. Описание свойств освещаемых предметов

Большинство предметов не являются источниками, а освещаются. Непрозрачные для оптического излучения предметы рассматриваются в отражённом свете, а прозрачные предметы – в проходящем свете. Предмет ослабляет амплитуду падающего на него света, а также может изменять его

фазу [3]. Если изучается отражённый от предмета свет, то для описания влияния предмета используется функция отражения. При изучении света прошедшего сквозь предмет используется функция пропускания. Если предмет считать бесконечно-тонким, то независимо от свойств предмета его влияние на прошедшее поле можно описать отношением комплексной амплитуды поля $U(\eta_x, \eta_y)$ после прохождения предмета и комплексной амплитуды поля $U_o(\eta_x, \eta_y)$, падающего на предмет:

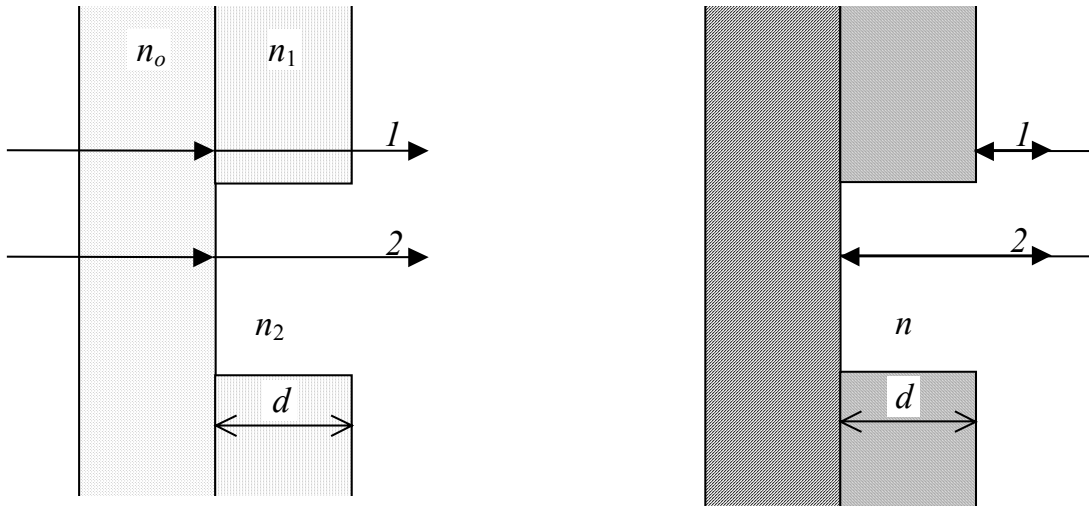
$$T(\eta_x, \eta_y) = \frac{U(\eta_x, \eta_y)}{U_o(\eta_x, \eta_y)}. \quad (2.49)$$

Эта функция называется *комплексным пропусканием предмета* и полностью описывает действие предмета на проходящее или отражённое поле. Как любую комплексную функцию её можно представить в виде:

$$T(\eta_x, \eta_y) = \tau(\eta_x, \eta_y) \cdot e^{i\varphi(\eta_x, \eta_y)}, \quad (2.50)$$

где $\tau(\eta_x, \eta_y) = |T(\eta_x, \eta_y)|$ – функция амплитудного пропускания предмета, а $\varphi(\eta_x, \eta_y) = \arg[T(\eta_x, \eta_y)]$ – функция изменения фазы на предмете.

Амплитудный предмет представляет собой бесконечно-тонкий экран, который изменяет только амплитуду падающей волны, не изменяя её фазу (то есть $\varphi(\eta_x, \eta_y) = 0$). При этом в одних областях предмета амплитуда поля не меняется (свет проходит как сквозь отверстие), а после прохождения других областей амплитуда поля уменьшается до 0 (предмет действует как непрозрачный экран).



а) Разность фаз в проходящем свете б) Разность фаз в отражённом свете
 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + kd(n_2 - n_1)$ $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + 2kdn$

Рис. 2.9 Изменение фазы после прохождения освещаемого предмета

Фазовые предметы изменяют только фазу падающей волны, а амплитуду оставляют неизменной (то есть $\tau(\eta_x, \eta_y) = 1$). Например, если предмет представляет собой слоистую структуру с разными показателями преломления

(Рис. 2.9), то проходящее его поле из-за разности оптических путей приобретает разность фаз $\Delta\varphi$.

В общем случае, предмет представляет собой сложную структуру, в разных точках изменяет и амплитуду, и фазу падающей волны, то есть является *амплитудно-фазовым*. Таким образом, при моделировании формирования изображения для описания предмета необходимо сформировать функцию комплексного пропускания (отражения) предмета $T(\eta_x, \eta_y)$.

Выражение, которое описывает влияние предмета на проходящее поле можно записать исходя из (2.49):

$$U(\eta_x, \eta_y) = U_o(\eta_x, \eta_y) \cdot T(\eta_x, \eta_y). \quad (2.51)$$

Следует отметить, что влияние предмета на проходящее поле описывается с использованием геометрического приближения по аналогии с прохождением поля через оптическую систему. Это справедливо только при соблюдении требования о том, что амплитуда поля и амплитудное пропускание предмета не должны иметь резких изменений, размеры которых сравнимы с длиной волны. В большинстве случаев это требование выполняется, и модель позволяет получать адекватные результаты.

2.9. Определение когерентных свойств освещения

При моделировании формирования освещаемых предметов следует учитывать когерентные свойства освещения, то есть волн, проходящих от источника до освещаемого предмета. В целом протяжённый источник не является монохроматическим, но свет, исходящий от отдельных излучателей большинства реальных источников, можно считать квазимонохроматическим [3]. После прохождения через оптическую систему в плоскости изображения свет, дошедший от каждого отдельного излучателя (точечного источника), распределяется на изображении по площадке конечных размеров (пятну рассеяния). Если расстояние между отдельными излучателями источника мало по сравнению со средней длиной волны ($\bar{\lambda} = \nu / \bar{\omega}$) квазимонохроматического излучения, то световые возмущения, создаваемые ими на изображении, будут коррелировать в области перекрывающихся пятен рассеяния. Световые возмущения, которые создаются на изображении излучателями источника расположенными на расстоянии гораздо большем $\bar{\lambda}$, коррелировать не будут. Таким образом, в интенсивность изображения предметов, освещаемых протяжённым источником, вносится как когерентный, так и некогерентный вклад. Для оценки и учёта этого вклада при моделировании необходимо определить характеристики когерентности волн, дошедших от источника до изображения.

При рассмотрении распространения квазимонохроматических полей используется целое семейство характеристик для описания их когерентных свойств [3]. Одной из таких характеристик является *взаимная интенсивность* J_{12} , которая описывает корреляцию колебаний U_1 и U_2 в двух произвольных точках и зависит только от их взаимного положения:

$$J_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U_1(\mathbf{r}_1, t) \cdot U_2^*(\mathbf{r}_2, t). \quad (2.52)$$

Комплексная степень когерентности представляет собой нормированную взаимную интенсивность (приведённую к диапазону от 0 до 1):

$$\mu_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{J_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}{\sqrt{I_1(\mathbf{r}_1) \cdot I_2(\mathbf{r}_2)}}, \quad (2.53)$$

где $I_1(\mathbf{r}_1)$ и $I_2(\mathbf{r}_2)$ – интенсивность в рассматриваемых точках.

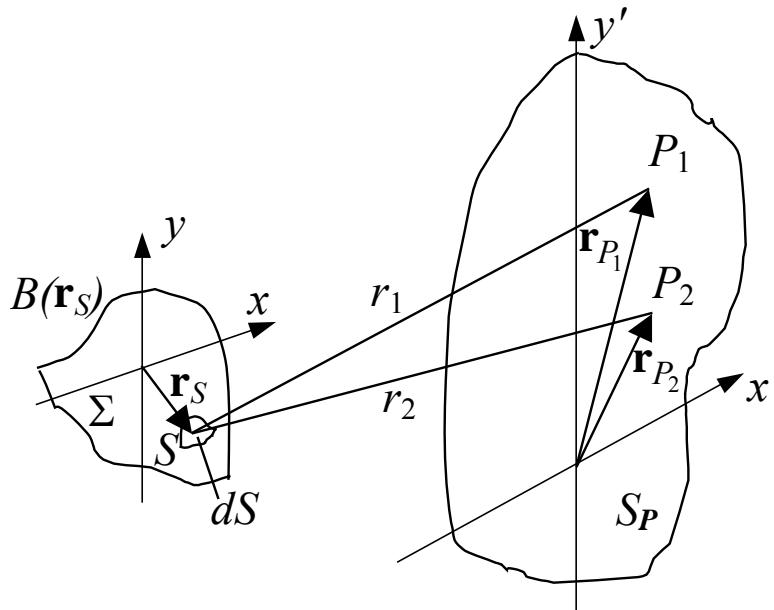


Рис. 2.10 Определение когерентных свойств освещения

Для моделирования формирования изображений освещённых предметов необходимо рассмотреть взаимную интенсивность и степень когерентности света пришедшего от протяжённого некогерентного квазимонохроматического источника. Решить эту задачу можно с использованием *теоремы Ван-Циттерта – Цернике* [3], в которой определяется взаимная интенсивность для точек P_1 и P_2 на поверхности S_P , освещаемой протяжённым квазимонохроматическим источником Σ с плоской поверхностью и яркостью $B(\mathbf{r}_S)$ (Рис. 2.10). Для этого некогерентный источник разделяется на элементы dS с линейными размерами, малыми по сравнению со средней длиной волны $\bar{\lambda}$. Тогда, световые колебания, создаваемые различными элементами dS , можно считать взаимно некогерентными. Общее возмущение, возникающее в точках на поверхности S_P , определяется суммой всех возмущений, обусловленных каждым элементом источника.

Согласно теореме Ван-Циттерта – Цернике, элемент источника dS заменяется дифракционным отверстием такого же размера и формы, которое заполняется сферической волной. Таким образом, по аналогии с (1.26) взаимная интенсивность на поверхности S_P определяется следующим выражением:

$$J_{12}(\mathbf{r}_{P_1}, \mathbf{r}_{P_2}) = \iint_{\Sigma} B(\mathbf{r}_S) \cdot \frac{e^{-i\bar{k}(r_1 - r_2)}}{r_1 r_2} dS, \quad (2.54)$$

где $\bar{k} = 2\pi/\bar{\lambda}$, а r_1 и r_2 – расстояния между точкой S источника Σ и точками P_1 и P_2 соответственно. Для выполнения нормировки при определении степени когерентности понадобятся значения интенсивности в точках P_1 и P_2 . Интенсивность в любой точке поверхности S_P можно определить согласно (2.54):

$$I(\mathbf{r}_P) = J_{12}(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}_P) = \iint_{\Sigma} \frac{B(\mathbf{r}_S)}{r^2} dS. \quad (2.55)$$

Если линейные размеры источника и расстояние между точками мало по сравнению с расстоянием от этих точек до источника, то после перехода к декартовым координатам выражение, описывающее взаимную интенсивность с точностью до постоянного множителя c_0 , примет следующий вид:

$$J_{12}(x'_1, y'_1, x'_2, y'_2) = c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x, y) \cdot e^{-i\bar{k}(x(x'_1 - x'_2) + y(y'_1 - y'_2))} dx dy. \quad (2.56)$$

Последнее выражение показывает, что взаимная интенсивность зависит только от разности координат $(\Delta x', \Delta y')$ между рассматриваемыми точками и определяется преобразованием Фурье функции распределения яркости на источнике $B(x, y)$:

$$J_{12}(\Delta x', \Delta y') = c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x, y) \cdot e^{-i\bar{k}(x\Delta x' + y\Delta y')} dx dy. \quad (2.57)$$

Модуль комплексной степени когерентности равен результату нормированного преобразования Фурье от функции распределения яркости по источнику:

$$|\mu_{12}(\Delta x', \Delta y')| = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x, y) \cdot e^{-i\bar{k}(x\Delta x' + y\Delta y')} dx dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x, y) dx dy}. \quad (2.58)$$

Фазой комплексной степени когерентности $\arg[\mu_{12}(\Delta x', \Delta y')] = \bar{k} \cdot (r_1 - r_2)$ можно пренебречь [3], так как при сделанных допущениях разность расстояний от рассматриваемых точек до источника возмущения мала по сравнению со средней длиной волны (то есть $(r_1 - r_2) \ll \bar{\lambda}$).

Таким образом, взаимная интенсивность и степень когерентности света, пришедшего от протяжённого некогерентного квазимонохроматического источника, определяется размерами, формой и распределением яркости по источнику. Если размеры источника совсем невелики (практически точечный источник), а распределение яркости по источнику может быть описано как $B(x, y) = \delta(x, y)$, то степень когерентности для любой пары точек P_1 и P_2 будет оставаться постоянной ($|\mu_{12}(\Delta x', \Delta y')| = 1$), то есть освещение поверхности S_P

является когерентным. Если источник достаточно протяжённый, а яркость по источнику практически постоянна ($B(x, y) = const$), то степень когерентности резко падает даже при небольшом удалении пары точек P_1 и P_2 ($|\mu_{12}(\Delta x', \Delta y')| = \delta(\Delta x', \Delta y')$), то есть освещение является некогерентным. В общем случае, когда степень когерентности заметно изменяется в пределах рассматриваемой области имеем дело с частично когерентным освещением.

Для получения достаточной и равномерной освещённости предмета часто используют вспомогательную осветительную оптическую систему. В этом случае, для определения степени когерентности на входной поверхности осветительной оптической системы используется выражение (2.57), полученное согласно теореме Ван-Циттерта – Цернике. В канонических координатах взаимная интенсивность на входной поверхности оптической системы находится как преобразование Фурье функции распределения яркости по источнику:

$$J_{12}(\rho_{x_1}, \rho_{x_2}, \rho_{y_1}, \rho_{y_2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\eta_x, \eta_y) \cdot e^{-2\pi i(\eta_x \Delta \rho_y + \eta_y \Delta \rho_x)} d\eta_x d\eta_y. \quad (2.59)$$

Согласно (2.51) взаимная интенсивность представляет собой произведение комплексных амплитуд $U_1(\rho_{x_1}, \rho_{y_1})$ и $U_2^*(\rho_{x_2}, \rho_{y_2})$. Можно рассмотреть распространение этих комплексных амплитуд через оптическую систему и определить взаимную интенсивность на выходной поверхности. В соответствии с выражением (2.33):

$$J'_{12}(\rho'_{x_1}, \rho'_{y_1}, \rho'_{x_2}, \rho'_{y_2}) = U_1(\rho_{x_1}, \rho_{y_1}) \cdot f_1(\eta_x, \eta_y, \rho_{x_1}, \rho_{y_1}) \times \\ \times U_2^*(\rho_{x_2}, \rho_{y_2}) \cdot f_2^*(\eta_x, \eta_y, \rho_{x_2}, \rho_{y_2}). \quad (2.60)$$

где $f_1(\eta_x, \eta_y, \rho_{x_1}, \rho_{y_1})$ и $f_2(\eta_x, \eta_y, \rho_{x_2}, \rho_{y_2})$ – функции комплексного пропускания, которые описывают влияние оптической системы на поля $U_1(\rho_{x_1}, \rho_{y_1})$ и $U_2(\rho_{x_2}, \rho_{y_2})$, обусловленные возмущением в точке (η_x, η_y) источника. Интенсивность на выходной поверхности, обусловленная этим возмущением, равна:

$$I'(\rho'_x, \rho'_y) = I(\rho_x, \rho_y) \cdot f(\eta_x, \eta_y, \rho_x, \rho_y) \cdot f^*(\eta_x, \eta_y, \rho_x, \rho_y) = \\ = I(\rho_x, \rho_y) \cdot |f(\eta_x, \eta_y, \rho_x, \rho_y)|^2. \quad (2.61)$$

Выражения (2.60) и (2.61) позволяют определить комплексную степень когерентности на выходной поверхности оптической системы:

$$\mu'_{12}(\rho'_{x_1}, \rho'_{y_1}, \rho'_{x_2}, \rho'_{y_2}) = \frac{J_{12}(\rho_{x_1}, \rho_{y_1}, \rho_{x_2}, \rho_{y_2})}{\sqrt{I_1(\rho_{x_1}, \rho_{y_1})} \cdot \sqrt{I_2(\rho_{x_2}, \rho_{y_2})}} \times \\ \times \frac{f_1(\eta_x, \eta_y, \rho_{x_1}, \rho_{y_1}) \cdot f_2^*(\eta_x, \eta_y, \rho_{x_2}, \rho_{y_2})}{|f_1(\eta_x, \eta_y, \rho_{x_1}, \rho_{y_1})| \cdot |f_2^*(\eta_x, \eta_y, \rho_{x_2}, \rho_{y_2})|}. \quad (2.62)$$

Последнее выражение преобразуется следующим образом:

$$\mu'_{12}(\rho'_{x_1}, \rho'_{y_1}, \rho'_{x_2}, \rho'_{y_2}) = \mu_{12}(\rho_{x_1}, \rho_{y_1}, \rho_{x_2}, \rho_{y_2}) \times e^{-i\bar{k}(E_1(\eta_x, \eta_y, \rho_{x_1}, \rho_{y_1}) - E_2(\eta_x, \eta_y, \rho_{x_2}, \rho_{y_2}))} \quad (2.63)$$

Таким образом, степень когерентности для любых двух точек выходной поверхности равна степени когерентности сопряжённых точек входной поверхности, а фаза комплексной степени когерентности отличается на разность эйконалов. Можно показать [3], что в типовых условиях некогерентный квазимонохроматический источник будет когерентно освещать на выходном зрачке площадки, размеры которых малы по сравнению с самим зрачком, то есть в целом выходной зрачок освещается некогерентно. Это значит, что комплексная степень когерентности для пар точек в плоскости изображения будет совпадать со степенью когерентности, обусловленной некогерентным источником, расположенным там же, где и выходной зрачок, обладающий тем же размерами, формой и распределением яркости. Тогда, для определения степени когерентности на изображении можно применить выражение (2.58), в котором вместо распределения яркости по источнику использовать распределение интенсивности на выходном зрачке:

$$|\mu_{12}(\Delta\eta'_x, \Delta\eta'_y)| = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\rho'_x, \rho'_y) \cdot e^{-i\bar{k}(\rho'_x \Delta\eta'_x + \rho'_y \Delta\eta'_y)} d\rho'_x d\rho'_y}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\rho'_x, \rho'_y) d\rho'_x d\rho'_y} \quad (2.64)$$

Распределение интенсивности на выходном зрачке $I'(\rho'_x, \rho'_y)$ рассчитывается в соответствии с выражением (2.61). Поскольку, в это соотношение не входит фаза функции комплексного пропускания, можно сделать важный вывод о том, что степень когерентности на поверхности изображения не зависит от aberrаций оптической системы, формирующей изображение источника. Полученную степень когерентности можно использовать при определении итогового распределения интенсивности на изображении в соответствии с законом интерференции (1.21).

Для наблюдения предметов в проходящем свете используются схемы критического освещения и освещения по Кёлеру [3, 7].

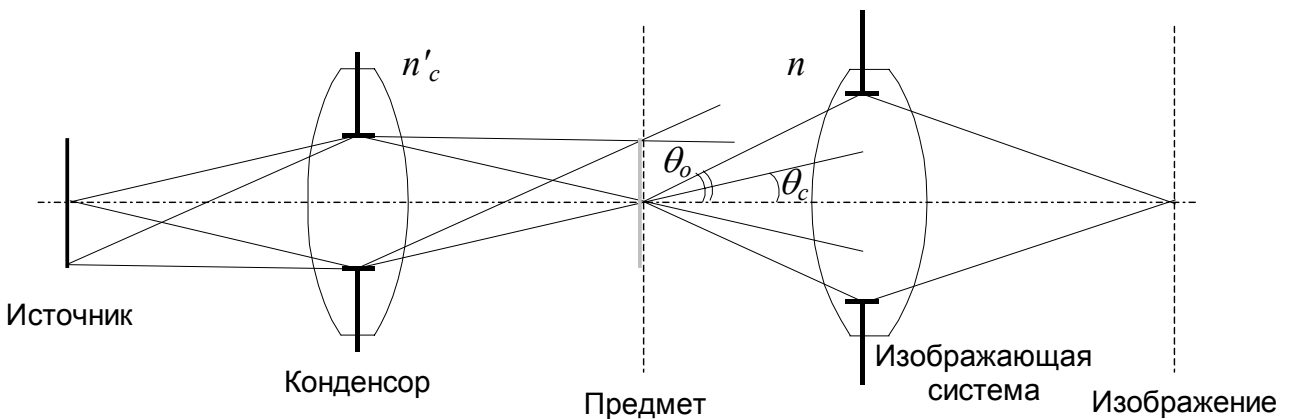


Рис. 2.11 Критическое освещение

Критическое освещение (Рис. 2.11) применяют в том случае, когда некогерентный источник относительно однороден. Тогда осветительная оптическая система, которую также называют *конденсор*, формирует изображение источника в плоскости объекта. *Освещение по Кёлеру* (Рис. 2.12) применяют, когда некогерентный источник неоднороден и для достижения однородности поля освещения конденсор формирует изображение источника в плоскости входного зрачка изображающей системы или на бесконечном расстоянии от объекта. В этом случае неравномерность в распределении яркости по источнику не вызывает неравномерности в освещённости поверхности предмета.

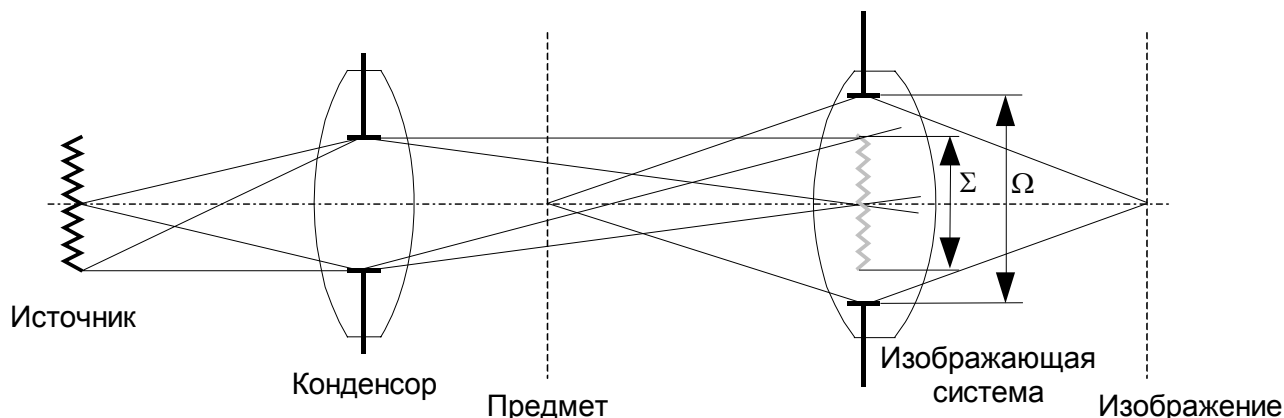


Рис. 2.12 Освещение по Кёлеру

В любом случае, при моделировании осветительной системы, согласно сделанным ранее выводам, реальный источник и конденсор можно заменить *эквивалентным источником*, расположенным в выходном зрачке конденсора, имеющем соответствующую форму, размеры и распределение яркости. В качестве канонических координат на эквивалентном источнике используются выходные зрачковые координаты конденсора, но в масштабе входных зрачковых координат изображающей системы:

$$\xi'_x = \rho'_x = \frac{p'_x}{A_x}; \quad \xi'_y = \rho'_y = \frac{p'_y}{A_y}, \quad (2.65)$$

где A_x и A_y – передние обобщённые апертуры изображающей системы.

В соответствии с выражением (2.58) степень когерентности на поверхности освещаемого предмета определяется следующим образом:

$$|\mu_{12}(\Delta\eta_x, \Delta\eta_y)| = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_c(\xi_x, \xi_y) \cdot e^{-ik(\xi_x \Delta\eta_x + \xi_y \Delta\eta_y)} d\xi_x d\xi_y}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_c(\xi_x, \xi_y) d\xi_x d\xi_y}. \quad (2.66)$$

где $B_c(\xi_x, \xi_y)$ – эквивалентное распределение яркости в выходном зрачке конденсора.

Для оценки влияния когерентных свойств освещения рассмотрим формирование изображения предмета, который представляет собой два точечных отверстия с координатами $(\eta'_{x_1}, \eta'_{y_1})$ и $(\eta'_{x_2}, \eta'_{y_2})$. Предмет в виде двух точечных отверстий можно описать как сумму двух смещённых дельта-функций. Если точечные отверстия находятся в пределах изопланатической зоны, то изображение каждого из них описывается одинаковыми, но смещёнными функциями рассеяния точки, распределение интенсивности на изображении определяется как интерференционная суперпозиция в соответствии с выражением (1.21), в котором степень когерентности в изображении точечных объектов определяется условиями освещения.

Пусть в качестве конденсора используется центрированная оптическая система, у которой круглый выходной зрачок единичного радиуса, и применяется схема критического освещения. Если распределение интенсивности в области зрачка равномерно, то математически его можно описать функцией: $B_c(\xi_x, \xi_y) = \text{circ}(\xi)$, где $\xi = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}$. Для определения фурье-образа осесимметричных функций используется преобразование Ганкеля [6, 12]. Тогда комплексная степень когерентности света, достигающего отверстий в плоскости предмета, описывается выражением:

$$\mu_{12}(\Delta\eta'_c) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{J_1(2\pi\Delta\eta'_c)}{\Delta\eta'_c}, \quad (2.67)$$

где J_1 – функция Бесселя 1-го порядка [4], а $\Delta\eta'_c = \sqrt{(\eta'_{x_1} - \eta'_{x_2})^2 + (\eta'_{y_1} - \eta'_{y_2})^2}$ – радиальная разность в системе канонических координат на изображении, формируемом конденсором, которые связаны с предметными каноническими координатами изображающей системы следующим соотношением:

$$\eta'_c = \eta \cdot \frac{A'_c}{A_o} = \eta \cdot \sigma, \quad (2.68)$$

где A'_c – задняя обобщённая апертура конденсора, а A_o – передняя обобщённая апертура изображающей системы. С учётом (2.68) выражение (1.21) для итогового распределения интенсивности в изображении двух точечных отверстий можно записать:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = h(\eta'_x - \eta'_{x_1}, \eta'_y - \eta'_{y_1}) + h(\eta'_x - \eta'_{x_2}, \eta'_y - \eta'_{y_2}) + \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{J_1(2\pi\Delta\eta \cdot \sigma)}{\Delta\eta \cdot \sigma} \cdot \sqrt{h(\eta'_x - \eta'_{x_1}, \eta'_y - \eta'_{y_1})} \cdot \sqrt{h(\eta'_x - \eta'_{x_2}, \eta'_y - \eta'_{y_2})}. \quad (2.69)$$

В этом выражении важную роль играет коэффициент σ . Когда размеры выходного зрачка конденсора настолько меньше по сравнению с размерами входного зрачка изображающей системы, что эквивалентный источник может считаться точечным ($\sigma \rightarrow 0$), то $J_1(2\pi\Delta\eta \cdot \sigma) / \pi^2 \Delta\eta \cdot \sigma \approx 1$. В этом случае имеем когерентную суперпозицию, освещение считается когерентным, и говорят, что изображающая система формирует *когерентное изображение*. Если выходной зрачок конденсора равен или больше входного зрачка изображающей системы

($\sigma > 1$), то третье слагаемое в выражении (2.69) равно 0. Освещение можно считать некогерентным, и говорят, что изображающая оптическая система формирует *некогерентное изображение*. В остальных случаях необходимо рассматривать промежуточные свойства освещения и формирование *частично когерентного изображения*.

Коэффициент σ часто используется в качестве характеристики когерентных свойств освещения и называется *коэффициентом когерентности* (или коэффициентом заполнения зрачка). При критическом освещении коэффициент когерентности σ определяется соотношением числовых апертур конденсора и изображающей системы: $\sigma = n'_c \cdot \sin(\theta'_c) / n \cdot \sin(\theta_o)$. В схеме освещения по Кёлеру коэффициент когерентности определяется соотношением размеров изображения источника и зрачка: $\sigma = \Sigma / \Omega$ (Рис. 2.12).

Таким образом, для моделирования формирования изображений предметов, освещаемых протяжённым квазимонохроматическим источником, необходимо определить степень когерентности каждой пары точек на предмете, а затем рассмотреть распространение волн от каждой пары до изображения. Итоговое распределение интенсивности на изображении определяется как сумма интенсивностей изображения каждой пары точек предмета. Когда источник и предмет имеют произвольную форму и размеры, а оптическая система не является идеальной, такой подход является весьма трудоёмким и мало пригодным для эффективной численной реализации. Требуется альтернативный подход, который бы обеспечил быстрое компьютерное моделирование, универсальность использования и адекватность результата.

2.10. Формирование изображений предметов в проходящем свете

Для моделирования формирования изображения освещаемых предметов рассмотрим *метод интегрирования по источнику* [7, 27]. Этот метод обладает высокой эффективностью при численной реализации, обеспечивает универсальность и адекватность при моделировании. В основу метода положено понятие *эффективного источника*, которое ввёл Гопкинс [27]. Для определения этого понятия рассмотрим подынтегральную часть выражения (2.59), которая в случае освещения предмета эквивалентным источником выглядит следующим образом:

$$B_c(\xi_x, \xi_y) d\xi_x d\xi_y \cdot e^{2\pi i(\xi_y \Delta \eta_x + \xi_x \Delta \eta_y)} = B_c \cdot e^{2\pi i(\xi_y \Delta \eta_x + \xi_x \Delta \eta_y)}. \quad (2.70)$$

Выражение (2.70) показывает, что освещение на поверхности предмета создаётся угловым спектром отдельных когерентных волн, исходящих от отдельных областей источника с постоянной амплитудой B_c , пропорциональной их площади и яркости источника. Следовательно, любые физически реализуемые условия освещения на плоскости предмета можно создать эффективным источником, представляющим собой совокупность точек, каждая из которых создаёт полностью когерентное освещение предмета, а оптическая система – соответствующее ему когерентное изображение. Итоговое изображение можно найти как суперпозицию изображений,

полученных при освещении предмета отдельными точками эффективного источника.

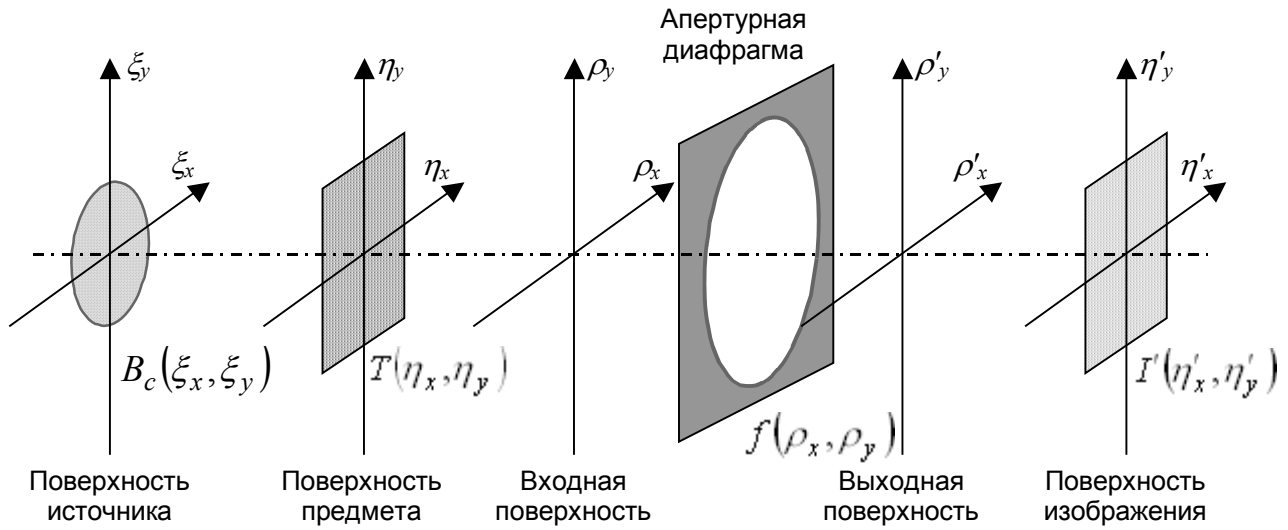


Рис. 2.13 Модель формирования изображения предмета в проходящем свете

Рассмотрим модель формирования изображения в проходящем свете с учётом когерентных свойств освещения (Рис. 2.13). Для этого необходимо, во-первых, знать функцию распределения яркости по эквивалентному источнику $B_c(\xi_x, \xi_y)$, которая описывает форму и размеры источника, а также распределение яркости по его поверхности. Во-вторых, сформировать функцию комплексного пропускания предмета $T(\eta_x, \eta_y)$, которая определяется выражением (2.50) и описывает амплитудное и фазовое пропускание предмета. В-третьих, в соответствии с выражением (2.26) сформировать зрачковую функцию $f(\rho_x, \rho_y)$, которая опишет влияние оптической системы на проходящее поле.

Согласно концепции эффективного источника функцию $B_c(\xi_x, \xi_y)$ следует представить в виде совокупности дельта-функций, каждая из которых соответствует отдельной точке источника:

$$B_c(\xi_x, \xi_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_c(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot \delta(\xi_x - \xi_{sx}, \xi_y - \xi_{sy}) d\xi_{sx} d\xi_{sy}, \quad (2.71)$$

где (ξ_{sx}, ξ_{sy}) – величина смещения относительно начала канонической системы координат на эквивалентном источнике.

Рассмотрим распространение электромагнитного поля от отдельной точки источника, через предмет и оптическую систему до поверхности изображения. От отдельной точки источника (ξ_{sx}, ξ_{sy}) на предмет падает наклонная плоская волна с комплексной амплитудой $U_o(\eta_x, \eta_y)$:

$$U_o(\eta_x, \eta_y) = B_c(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot e^{2\pi i(\eta_x \xi_{sx} + \eta_y \xi_{sy})}. \quad (2.72)$$

Согласно выражению (2.51) действие амплитудно-фазового предмета на проходящее поле описывается произведением комплексной амплитуды поля на

функцию комплексного пропускания предмета. Таким образом, комплексная амплитуда поля за предметом $U(\eta_x, \eta_y)$ определяется как:

$$\begin{aligned} U(\eta_x, \eta_y) &= U_o(\eta_x, \eta_y) \cdot T(\eta_x, \eta_y) = \\ &= B_c(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot e^{2\pi i(\eta_x \xi_{sx} + \eta_y \xi_{sy})} \cdot T(\eta_x, \eta_y). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Распространение дифрагированного поля от предмета до входной поверхности в канонических координатах описывается преобразованием Фурье. Таким образом, комплексную амплитуду поля на входной поверхности $U(\rho_x, \rho_y)$ можно описать следующим выражением:

$$\begin{aligned} U(\rho_x, \rho_y) &= F \left[T(\eta_x, \eta_y) \cdot B_c(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot e^{2\pi i(\eta_x \xi_{sx} + \eta_y \xi_{sy})} \right] = \\ &= B_c(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot \tilde{T}(\rho_x - \xi_{sx}, \rho_y - \xi_{sy}). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Согласно выражению (2.27) действие оптической системы на проходящее поле определяется как произведение комплексной амплитуды поля $U(\rho_x, \rho_y)$ на зрачковую функцию $f(\rho_x, \rho_y)$. Распространение дифрагированного поля от выходной поверхности до поверхности изображения описывается обратным преобразованием Фурье и комплексная амплитуда поля на поверхности изображения $U'(\eta'_x, \eta'_y)$ определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} U'(\eta'_x, \eta'_y) &= F^{-1} \left[U(\rho_x, \rho_y) \cdot f(\rho_x, \rho_y) \right] = \\ &= F^{-1} \left[B_c(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot \tilde{T}(\rho_x - \xi_{sx}, \rho_y - \xi_{sy}) \cdot f(\rho_x, \rho_y) \right]. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Таким образом, распределение интенсивности изображения, обусловленного освещением отдельной точкой источника с координатами (ξ_{sx}, ξ_{sy}) , можно определить следующим образом:

$$I'(\xi_{sx}, \xi_{sy}, \eta'_x, \eta'_y) = \left| F^{-1} \left[B_c(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot \tilde{T}(\rho_x - \xi_{sx}, \rho_y - \xi_{sy}) \cdot f(\rho_x, \rho_y) \right] \right|^2. \quad (2.76)$$

Итоговое распределение интенсивности изображения полученного от источника произвольной формы определяется суммой интенсивностей изображений, полученных от каждой точки источника. Таким образом, модель формирования изображения методом интегрирования по источнику можно записать следующим образом:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B_c(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot I'(\xi_{sx}, \xi_{sy}, \eta'_x, \eta'_y) d\xi_{sx} d\xi_{sy}. \quad (2.77)$$

Рассмотрим предельные случаи полностью когерентного и некогерентного освещения. В случае когерентного освещения предмета алгоритм моделирования формирования изображения существенно упрощаются. При когерентном освещении эквивалентный источник является практически точечным и распределение яркости по источнику можно описать дельта-функцией, то есть $B_c(\xi_x, \xi_y) = \delta(\xi_x, \xi_y)$. Выражение (2.77) можно записать в виде с двумя преобразованиями Фурье:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \left| F^{-1} \left[F \left[T(\eta_x, \eta_y) \right] \cdot f(\rho_x, \rho_y) \right] \right|^2. \quad (2.78)$$

Это выражение подобно (2.36), в котором роль комплексной амплитуды поля играет функция комплексного пропускания предмета. Таким образом, при когерентном освещении оптическая система линейна по амплитуде.

При некогерентном освещении размеры эквивалентного источника гораздо больше зрачка изображающей системы, а распределение яркости по источнику можно считать постоянным, то есть $B_c(\xi_x, \xi_y) = const$. Выражение (2.77) с точностью до постоянного множителя можно переписать:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F^{-1} \left[\tilde{T}(\rho_x - \xi_x, \rho_y - \xi_y) \cdot f(\rho_x, \rho_y) \right] \right|^2 d\xi_x d\xi_y. \quad (2.79)$$

Применяя теоремы о свёртке и о сдвиге преобразования Фурье [6, 12], а затем, раскрывая скобки, получим следующее выражение:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\eta_x, \eta_y) \cdot e^{2\pi i(\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y)} \cdot \tilde{f}(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) d\eta_x d\eta_y \right] \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T^*(\eta_x, \eta_y) \cdot e^{-2\pi i(\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y)} \cdot \tilde{f}^*(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) d\eta_x d\eta_y \right] d\xi_x d\xi_y. \quad (2.80)$$

Последнее выражение можно переписать, меняя порядок интегрирования и перегруппируя множители:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\eta_x, \eta_y) \cdot T^*(\eta_x, \eta_y) \cdot \tilde{f}(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) \cdot \tilde{f}^*(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y)} \cdot e^{-2\pi i(\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y)} d\xi_x d\xi_y \right] d\eta_x d\eta_y. \quad (2.81)$$

При любых η_x и η_y интеграл в квадратных скобках равен 1, и выражение (2.81) можно переписать следующим образом:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| T(\eta_x, \eta_y) \right|^2 \cdot \left| \tilde{f}(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) \right|^2 d\eta_x d\eta_y. \quad (2.82)$$

Если вместо $\left| T(\eta_x, \eta_y) \right|^2$ записать $I(\eta_x, \eta_y)$ и вспомнить, что $\left| \tilde{f}(\eta'_x, \eta'_y) \right|^2 = h(\eta'_x, \eta'_y)$, то окончательное выражение для интенсивности изображения предмета при некогерентном освещении принимает вид:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta_x, \eta_y) \cdot h(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) d\eta_x d\eta_y = \\ = I(\eta_x, \eta_y) \otimes h(\eta_x, \eta_y). \quad (2.83)$$

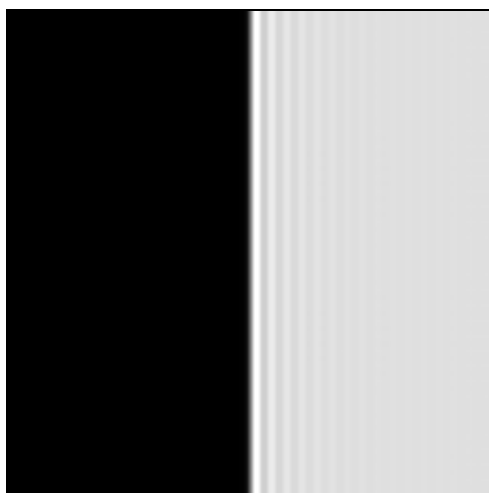
Это выражение показывает, что взаимно некогерентные точечные источники, составляющие протяжённый источник, дают в итоге некогерентное

изображение, которое представляет собой сумму интенсивностей изображений, полученных освещением каждым точечным источником. Выражение (2.83) подобно выражению (2.45), в котором роль обобщённой интенсивности предмета играет квадрат модуля функции его комплексного пропускания.

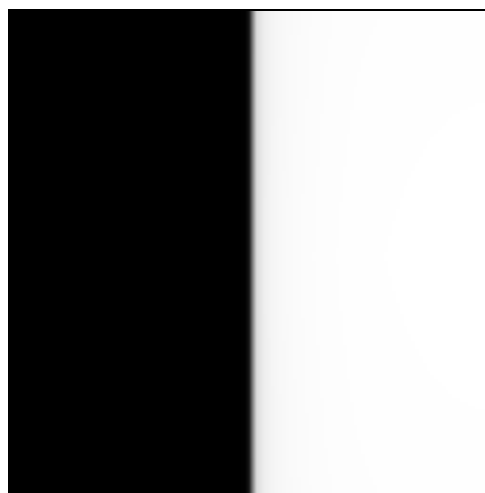
Математическую модель формирования некогерентного изображения можно записать в виде выражения с четырьмя преобразованиями Фурье:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = F^{-1} \left[F \left[|T(\eta_x, \eta_y)|^2 \right] \cdot F \left[|F^{-1} [f(\rho_x, \rho_y)]|^2 \right] \right]. \quad (2.84)$$

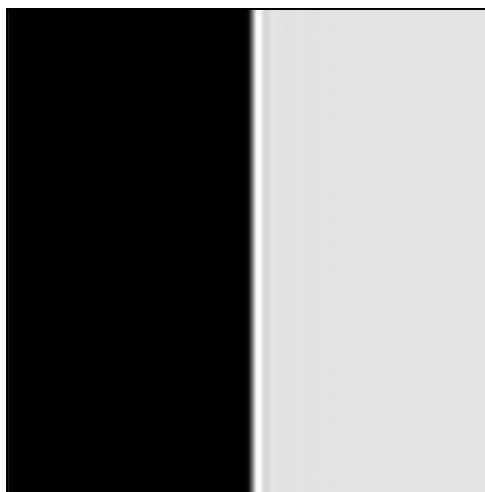
Таким образом, при некогерентном освещении оптическая система линейна относительно интенсивности.



а) Когерентное освещение



б) Некогерентное освещение



в) Частично когерентное освещение

Рис. 2.14 Изображение края при различных условиях освещения

Когерентные свойства освещения проявляются на изображении предметов по-разному. Например, характерный вид имеет распределение интенсивности на изображении предмета, который легко создать, если поле прозрачного предмета наполовину закрыть непрозрачным экраном. Такой предмет называется полуплоскостью или краем [3, 6]. На рисунке 2.14 приведено

распределение интенсивности в изображении края при когерентном освещении (а), некогерентном (б) и частично когерентном освещении. Видно, что в случае когерентного освещения резко выражены осцилляции интенсивности на светлой части изображения, а в случае некогерентного освещения распределение интенсивности изменяется плавно. При частично когерентном освещении на границе светлой и темной частей изображения наблюдается резкий максимум, как в случае когерентного освещения, но на остальной части изображения интенсивность меняется плавно, как в случае некогерентного освещения.

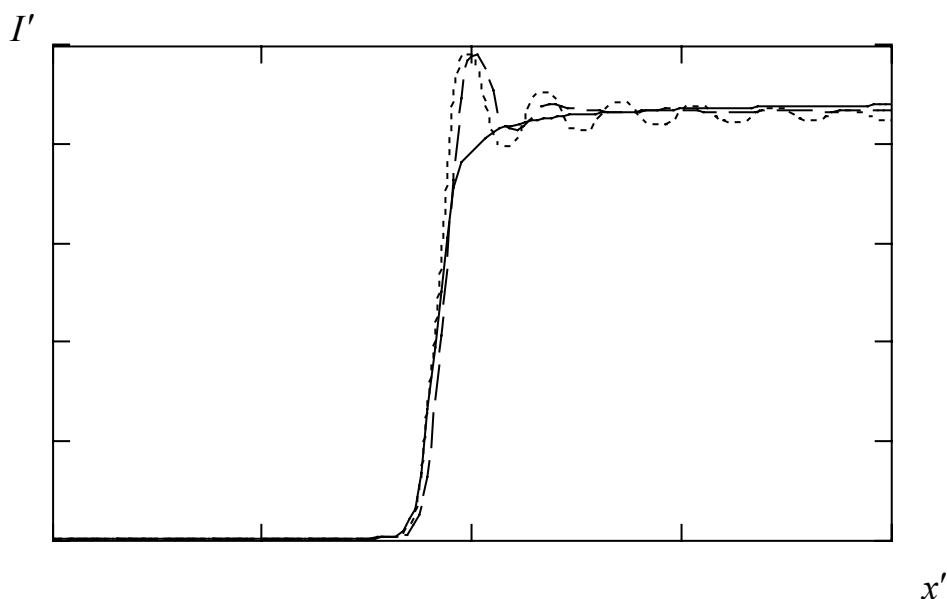


Рис. 2.15 Сечения изображения края при когерентном (.....), некогерентном (—) и частично когерентном (— — —) освещении

Описанные особенности хорошо заметны в центральном сечении распределения интенсивности на изображении (Рис. 2.15). Таким образом, изображение полуплоскости можно использовать при моделировании в качестве тест-объекта для контроля адекватности построенной модели.

2.11. Алгоритмы моделирования формирования оптических изображений

Полученные выражения пригодны для реализации численного моделирования формирования изображений. Представим их в виде алгоритмов, то есть в виде последовательностей действий, которые нужно выполнить для вычисления распределения интенсивности на изображении. Следует рассмотреть алгоритмы моделирования формирования самосветящихся и освещаемых предметов. Очевидно, что алгоритмы моделирования формирования изображения при когерентном и некогерентном освещении существенно проще алгоритма моделирования формирования изображения при частично когерентном освещении, рассмотрим их отдельно. Коэффициент когерентности освещения σ можно использовать в качестве критерия выбора метода вычисления. В предельном случае когерентного освещения ($\sigma \rightarrow 0$) для

моделирования формирования изображения можно пользоваться упрощённым алгоритмом вычислений согласно выражению (2.78). В предельном случае некогерентного освещения ($\sigma > 1$) для моделирования формирования изображения можно пользоваться упрощённым алгоритмом вычислений согласно выражению (2.84).

В любом случае, входными данными для моделирования являются $B(\xi_x, \xi_y)$ – функция, описывающая форму, размеры и распределение яркости по источнику, $T(\eta_x, \eta_y)$ – функция, описывающая форму, размеры и комплексное пропускание предмета и $f(\rho_x, \rho_y)$ – зрачковая функция, описывающая влияние оптической системы на комплексную амплитуду проходящего поля.

Алгоритм моделирования формирования изображения самосветящегося предмета

Алгоритм моделирования формирования изображения самосветящегося предмета можно построить на основе выражения (2.46). Для повышения эффективности вычисления интеграла свёртки обычно используют теорему о том, что свёртка двух функций полностью эквивалентна произведению их фурье-образов [6, 12]. Таким образом, алгоритм вычисления распределения интенсивности изображения в этом случае состоит из следующих этапов:

1) Вычисление фурье-образа квадрата распределения яркости по источнику:

$$\tilde{B}(\rho_x, \rho_y) = F[B^2(\eta_x, \eta_y)]. \quad (2.85)$$

2) Вычисление фурье-образа функции рассеяния точки:

$$\tilde{h}(\rho_x, \rho_y) = F\left[\left|F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)]\right|^2\right]. \quad (2.86)$$

3) Вычисление фурье-образа распределения интенсивности на изображении:

$$\tilde{I}'(\rho'_x, \rho'_y) = \tilde{B}(\rho_x, \rho_y) \cdot \tilde{h}(\rho_x, \rho_y). \quad (2.87)$$

4) Вычисление распределения интенсивности на изображении:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = F^{-1}[\tilde{I}'(\rho'_x, \rho'_y)]. \quad (2.88)$$

Алгоритм моделирования формирования изображения освещаемого предмета

Алгоритм моделирования формирования изображения произвольных предметов с учётом когерентных свойств освещения состоит из следующих этапов:

1) Представление источника в виде совокупности точек:

$$B(\xi_x, \xi_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot \delta(\xi_x - \xi_{sx}, \xi_y - \xi_{sy}) d\xi_{sx} d\xi_{sy}. \quad (2.89)$$

2) Выделение наклонной плоской волны, падающей на предмет от отдельной точки (ξ_{sx}, ξ_{sy}) :

$$U_o(\eta_x, \eta_y) = B(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot e^{2\pi i(\eta_x \xi_{sx} + \eta_y \xi_{sy})}. \quad (2.90)$$

3) Прохождение поля через предмет:

$$U(\eta_x, \eta_y) = U_o(\eta_x, \eta_y) \cdot T(\eta_x, \eta_y). \quad (2.91)$$

4) Дифракционное распространение поля в пространстве предметов:

$$U(\rho_x, \rho_y) = F[U(\eta_x, \eta_y)]. \quad (2.92)$$

5) Распространение поля через оптическую систему:

$$U'(\rho'_x, \rho'_y) = U(\rho_x, \rho_y) \cdot f(\rho_x, \rho_y). \quad (2.93)$$

6) Дифракционное распространение поля в пространстве изображений:

$$U'(\eta'_x, \eta'_y) = F^{-1}[U'(\rho'_x, \rho'_y)]. \quad (2.94)$$

7) Вычисление распределения интенсивности на изображении, полученном при освещении отдельной точкой источника (ξ_{sx}, ξ_{sy}) :

$$I'(\xi_{sx}, \xi_{sy}, \eta'_x, \eta'_y) = |U'(\eta'_x, \eta'_y)|^2. \quad (2.95)$$

Этапы 2 – 7 необходимо повторить для каждой точки источника.

8) Интегрирование изображений, полученных при освещении от каждой точки (ξ_{sx}, ξ_{sy}) источника:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} B(\xi_{sx}, \xi_{sy}) \cdot I'(\xi_{sx}, \xi_{sy}, \eta'_x, \eta'_y) d\xi_{sx} d\xi_{sy}. \quad (2.96)$$

Таким образом, в основе этого алгоритма лежит модель распространения комплексной амплитуды поля через оптическую систему (этапы 4 – 7), но чтобы её применить источник представляется в виде совокупности точек, каждая из которых создает когерентное освещение предмета (этапы 1 – 2). Для моделирования прохождения поля через прозрачный предмет используется модель геометрического распространения поля (этап 3). Итоговое распределение интенсивности на изображении $I'(\eta'_x, \eta'_y)$, которое и является результатом работы алгоритма, находится как сумма интенсивностей изображений, полученных при освещении каждой точкой источника (этап 8).

Алгоритм моделирования формирования изображения при когерентном освещении

Моделирование формирования изображения предмета при когерентном освещении осуществляется на основе выражения (2.78). В этом случае, алгоритм вычисления распределения интенсивности на изображении состоит из следующих этапов:

1) Дифракционное распространение поля от предмета до оптической системы:

$$U(\rho_x, \rho_y) = F[T(\eta_x, \eta_y)]. \quad (2.97)$$

2) Распространение поля через оптическую систему:

$$U'(\rho'_x, \rho'_y) = U(\rho_x, \rho_y) \cdot f(\rho_x, \rho_y). \quad (2.98)$$

3) Дифракционное распространение поля в пространстве изображений:

$$U'(\eta'_x, \eta'_y) = F^{-1}[U'(\rho'_x, \rho'_y)]. \quad (2.99)$$

4) Вычисление распределения интенсивности на изображении:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = |U'(\eta'_x, \eta'_y)|^2. \quad (2.100)$$

Алгоритм моделирования формирования изображения при некогерентном освещении

Для моделирования формирования изображения предмета при некогерентном освещении используется выражения (2.78). Алгоритм вычисления распределения интенсивности на изображении состоит из следующих этапов:

1) Вычисление фурье-образа распределения интенсивности на предмете:

$$\tilde{I}(\rho_x, \rho_y) = F\left[|T(\eta_x, \eta_y)|^2\right]. \quad (2.101)$$

2) Вычисление фурье-образа функции рассеяния точки:

$$\tilde{h}(\rho_x, \rho_y) = F\left[F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)]^2\right]. \quad (2.102)$$

3) Вычисление фурье-образа распределения интенсивности на изображении:

$$\tilde{I}'(\rho'_x, \rho'_y) = \tilde{B}(\rho_x, \rho_y) \cdot \tilde{h}(\rho_x, \rho_y). \quad (2.103)$$

4) Вычисление распределения интенсивности на изображении:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = F^{-1}[\tilde{I}'(\rho'_x, \rho'_y)]. \quad (2.104)$$

Благодаря использованию системы канонических координат представленные алгоритмы справедливы и идентичны для любых типов предмета и изображения, а вычисления реализуются с использованием универсального алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Выводы

Основная цель моделирования формирования изображения – описать распространение электромагнитных волн от предмета через оптическую систему до поверхности анализа. Строгая модель формирования изображения должна учитывать действие всех диафрагм и экранов в оптической системе, и рассматривать распространение поля как ряд последовательных дифракций на каждом препятствии. Но для получения универсальных и практически полезных выражений используются упрощённые модели. Наиболее близкой к реальным процессам, происходящим в оптической системе, является модель с апертурной диафрагмой. В этой модели процесс распространения поля через оптическую систему разбивается на три этапа. Дифракционное распространение поля от предмета до входной поверхности и от выходной поверхности до изображения в канонических координатах описывается прямым и обратным преобразованием Фурье соответственно. Для описания распространения поля от входной до выходной поверхности оптической

системы используется геометрический подход. Зрачковая функция $f(\rho_x, \rho_y)$, которая описывает ограничение и ослабление поля, а также изменение фазы из-за аберраций. Дифракция в этой модели вынесена за пределы оптической системы.

При рассмотрении формирования изображения самосветящихся предметов можно сделать следующие выводы. Отдельные источники, составляющие протяжённый источник, являются взаимно некогерентными и дают в итоге некогерентное изображение, которое представляет собой сумму интенсивностей изображений каждой точки.

Большинство предметов не являются источниками освещения, а освещаются. При этом для освещения часто используется дополнительная оптическая система. Когерентные свойства освещения таковы, что источник и осветительную оптическую систему можно заменить эквивалентным источником, который размещен в выходном зрачке осветителя. Когерентные свойства освещения определяют итоговое распределение интенсивности на изображении. Для моделирования формирования изображений освещённых объектов необходимо сформировать функцию распределения яркости по источнику $B(\xi_{sx}, \xi_{sy})$, которая так же описывает его форму и размеры, функцию комплексного пропускания (отражения) предмета $T(\eta_x, \eta_y)$ и зрачковую функцию $f(\rho_x, \rho_y)$, описывающую действие оптической системы. Вычисление распределения интенсивности на изображении можно выполнить с использованием метода интегрирования по источнику. Источник представляется в виде совокупности точек, каждая из которых создает полностью когерентное освещение предмета, а оптическая система – соответствующее ему когерентное изображение. Итоговое изображение определяется как суперпозиция изображений, полученных при освещении предмета отдельными точками эффективного источника.

В предельных случаях когерентного и некогерентного освещения для моделирования формирования изображения можно пользоваться упрощёнными алгоритмами вычислений. При когерентном освещении оптическая система линейна по амплитуде, а при некогерентном освещении – по интенсивности.

Вопросы

Что представляет собой математическая модель оптической системы в теории формирования изображения?

Какие преобразования претерпевает волновой фронт при прохождении через оптическую систему?

При выполнении каких условий можно использовать геометрическую модель распространения поля в однородном пространстве?

Какие факторы влияния оптической системы на проходящее поле должны учитываться при моделировании формирования изображений?

Как изменяется амплитуда и эйконал поля при его прохождении через оптическую систему?

Какие факторы влияния оптической системы на проходящее поле описывает зрачковая функция? Какие факторы, влияющие на поле, проходящее через оптическую систему, зрачковая функция не учитывает?

При выполнении каких условий геометрическая модель распространения поля через оптическую систему и сквозь прозрачный предмет будет адекватной?

В чём заключается модель формирования изображений Аббе? В чём заключаются ограничения и недостатки модели Аббе?

В чём заключается модель прохождения поля через оптическую систему, построенная на основе концепции апертурной диафрагмы?

Каким образом при рассмотрении дифракционного распространения поля в пространстве предметов и в пространстве изображений оптической системы дифракционный интеграл сводится к преобразованию Фурье?

Каким образом описываются самосветящиеся и освещаемые предметы и их изображения?

Как будет выглядеть изображение, если функция комплексного пропускания предмета постоянна?

Как будет выглядеть изображение, если зрачковая функция бесконечна и постоянна?

Почему при моделировании формирования изображения следует учитывать когерентные свойства освещения?

Какие положения доказываются в теореме Ван-Циттерта – Цернике?

Каким образом определяется взаимная интенсивность поля создаваемого протяжённым некогерентным источником в пространстве изображения после прохождения через оптическую систему?

Каким образом описывается распространение взаимной интенсивности поля через оптическую систему?

Каким образом аберрации и другие свойства осветительной системы влияют на передачу взаимной интенсивности и степени когерентности поля?

В каких случаях используется метод критического освещения, а в каких – освещение по Кёлеру? В каких случаях используется внеосевое освещение и как оно создаётся?

Каким образом определяется коэффициент когерентности σ ? Какой он имеет смысл?

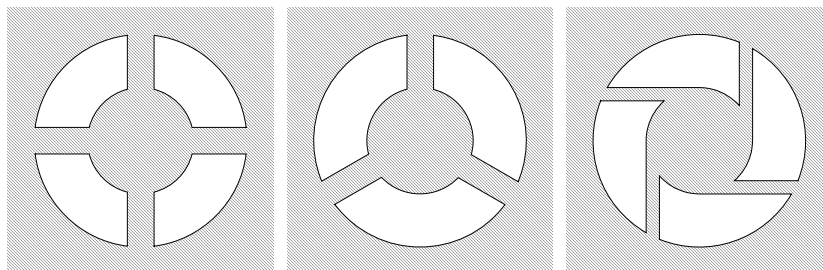
Каким образом канонические координаты на источнике связаны со зрачковыми каноническими координатами изображающей оптической системы?

В чём заключается концепция эффективного источника и метод интегрирования по источнику?

Как при когерентном освещении получить амплитудное изображение фазового объекта?

Задачи

- 2.1. Аналитически описать предметы, имеющие вид бесконечно тонкой светящейся щели и щели конечного размера, повернутые вокруг осевой точки на угол α .
- 2.2. Описать аналитическим выражением форму зрачка оптической системы с центральным экранированием и спайдерами, следующей формы:



- 2.3. Найти функцию рассеяния точки оптической системы с круглым зрачком и центральным экранированием. Построить график ФРТ оптической системы с коэффициентом экранирования $\varepsilon = 0.5$.
- 2.4. Изображение формируется безабберационной оптической системой с круглым зрачком. Найти распределение интенсивности в изображении предмета, который представляет собой две светящихся точки, расположенные на расстоянии b . Определить минимальное расстояние между точками b_{\min} , при котором они изображаются раздельно.
- 2.5. Изображение формируется безабберационной оптической системой с круглым зрачком. Найти распределение интенсивности в изображении предмета, который представляет собой черную точку на прозрачном экране при когерентном и некогерентном освещении.
- 2.6. Найти аналитическое выражение, описывающее комплексную степень когерентности μ_{12} света, создаваемого квазимонохроматическим источником кольцевой формы, на плоскости, находящейся на расстоянии z от источника.
- 2.7. Пусть в качестве конденсора используется центрированная оптическая система, с круглым выходным зрачком, и применяется схема критического освещения. Найти распределение интенсивности в изображении предмета, который представляет собой два отверстия в экране.
- 2.8. Найти распределение интенсивности в изображении квадратного предмета при освещении источником, который представляет собой две точки, находящиеся на расстоянии b .
- 2.9. Найти распределение интенсивности в изображении периодического предмета с синусоидальным пропусканием при освещении некогерентным источником.
- 2.10. Найти распределение интенсивности в изображении квадратного фазового предмета, расположенного на прозрачном экране, при освещении когерентным источником. Как получить амплитудное изображение фазового предмета?

Глава 3. Формирование изображения как преобразование сигналов

В теории систем преобразование сигнала есть описание связи входа с выходом, представляемое часто просто в виде «чёрного ящика».

Льюис Фрэнкс

3.1. Преобразование сигналов оптическими системами

Важную роль в развитии теории формирования изображений сыграло применение идей из теории связи и методов анализа электрических сигналов. Такой подход впервые использовал Дюфье [3, 19], который предложил провести аналогию между преобразователями электрических сигналов и оптическими системами и использовать преобразование Фурье для анализа их работы. Одним из наиболее важных результатов такого подхода является получение передаточной функции, напрямую связывающей предмет и изображение. Взгляд на решение оптических задач с позиций другой области знаний взаимно обогатил оптику и электротехнику и, в свою очередь, привёл к созданию обобщённой теории сигналов.

Если в дифракционной теории формирования изображения строится внутренняя функциональная модель оптической системы, отражающая физические процессы формирования изображения, то в данном подходе имеют дело с внешней функциональной моделью, которая описывает оптическую систему как преобразователь сигналов общего вида [5, 15]. С точки зрения теории сигналов работа изображающей системы заключается в преобразовании входного сигнала I в выходной сигнал I' . Для систем, формирующих изображение, входной сигнал (предмет) и выходной сигнал (изображение) обычно являются оптическими пространственными двумерными сигналами обобщённых координат на плоскостях предмета и изображения. Преобразование входного сигнала $I(\eta_x, \eta_y)$ в выходной сигнал $I'(\eta'_x, \eta'_y)$ можно представить некоторым *изображающим оператором* L :

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = L[I(\eta_x, \eta_y)]. \quad (3.1)$$

В общем случае оператор L является нелинейным и должен удовлетворять целому комплексу условий. Анализ работы изображающих устройств показывает, что изображающий оператор L удовлетворяет двум условиям: линейности и изопланатичности. *Условие линейности* для изображающего оператора выражается следующим образом:

$$L\left[\sum_k I_k(\eta_x, \eta_y)\right] = \sum_k L[I_k(\eta_x, \eta_y)]. \quad (3.2)$$

Как видно из выражения (3.2), изображающую систему можно считать линейной, если сформированное ей изображение суммы предметов равно

сумме их изображений. Условие изопланатичности для изображающего оператора выражается следующим образом:

$$I'(\eta'_x - \eta'_{mx}, \eta'_y - \eta'_{my}) = L[I(\eta_x - \eta_{mx}, \eta_y - \eta_{my})], \quad (3.3)$$

где (η_{mx}, η_{my}) – смещение предмета, а (η'_{mx}, η'_{my}) – соответствующее смещение изображения. Согласно выражению (3.3) условие изопланатичности выполняется, если при смещении предмета изображение только смещается, но не изменяет своей структуры.

Вид изображающего оператора может быть определен следующим образом. Представим предмет $I(\eta_x, \eta_y)$ в виде совокупности бесконечно большого количества бесконечно малых площадок, расположенных бесконечно близко друг к другу. Рассмотрим интенсивность площадки в окрестности некоторой точки M с координатами (η_{mx}, η_{my}) . Будем считать, что эта площадка настолько мала, что интенсивность предмета в её пределах можно считать постоянной и равной интенсивности в её центре $I(\eta_{mx}, \eta_{my})$. Заменяем площадку светящейся точкой, расположенной в её центре, так, что энергия этой точки и площадки объекта равны. Тогда предмет, как совокупность таких точек, описывается следующим выражением:

$$I(\eta_x, \eta_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta_{mx}, \eta_{my}) \cdot \delta(\eta_x - \eta_{mx}, \eta_y - \eta_{my}) d\eta_{mx} d\eta_{my}. \quad (3.4)$$

Применим к выражению (3.4) изображающий оператор L , то есть представим изображение в виде совокупности изображений точек предмета:

$$\begin{aligned} I'(\eta'_x, \eta'_y) &= L[I(\eta_x, \eta_y)] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta_{mx}, \eta_{my}) \cdot L[\delta(\eta_x - \eta_{mx}, \eta_y - \eta_{my})] d\eta_{mx} d\eta_{my}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) показывает, что для определения изображения произвольного предмета необходимо знать изображение эталонного предмета в виде точки. Распределение интенсивности в изображении точки описывается в обобщённых координатах на изображении, но в общем случае зависит и от положения точки на поверхности предмета. Вместо обозначения (η_{mx}, η_{my}) для координат на предмете можно использовать непосредственно (η_x, η_y) . Таким образом, итоговое выражение, описывающее связь предмета и изображения, выглядит следующим образом:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta_x, \eta_y) \cdot h(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y) d\eta_x d\eta_y. \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) представляет собой изображающий оператор, который является интегральным. Ядро этого преобразования составляет функция $h(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y)$, описывающая распределение интенсивности в изображении точки, в теории сигналов называется *импульсным откликом* (или импульсной

реакцией). Если структура импульсного отклика не изменяется при перемещении точки предмета по его поверхности, а происходит лишь перемещение её изображения, то выполняется условие изопланатизма. В общем случае оптическая система не является изопланатическим преобразователем, но при анализе её работы можно выделить зоны на предмете и изображении, в которых преобразование сигналов считается изопланатическим. Тогда выражение (3.6), можно переписать следующим образом:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta_x, \eta_y) \cdot h(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) d\eta_x d\eta_y = I(\eta_x, \eta_y) \otimes h(\eta_x, \eta_y). \quad (3.7)$$

В различных изображающих системах физический смысл обобщённых сигналов или *обобщённых интенсивностей* предмета $I(\eta_x, \eta_y)$ и изображения $I'(\eta'_x, \eta'_y)$, а также импульсного отклика $h(\eta_x, \eta_y)$ могут быть различными. Определим смысл этих функций при формировании изображений светящихся и освещаемых предметов (Таблица 3.1).

Таблица 3.1 Интерпретация импульсного отклика, входного и выходного сигналов при различных условиях формирования изображения

	Входной сигнал	Выходной сигнал	Импульсный отклик
Светящийся предмет	Яркость предмета $B_o^2(\eta_x, \eta_y)$	Интенсивность поля на изображении $I'(\eta'_x, \eta'_y)$	Функция рассеяния точки $h(\eta_x, \eta_y)$
Предмет при когерентном освещении	Комплексное пропускание предмета $T(\eta_x, \eta_y)$	Комплексная амплитуда поля на изображении $U'(\eta'_x, \eta'_y)$	Фурье-спектр зрачковой функции $F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)]$
Предмет при некогерентном освещении	Яркость на предмете $ T(\eta_x, \eta_y) ^2$	Интенсивность поля на изображении $I'(\eta'_x, \eta'_y)$	Функция рассеяния точки $h(\eta_x, \eta_y)$

При формировании изображений светящихся предметов согласно выражению (2.46) в качестве входного сигнала рассматривается квадрат распределения яркости на предмете. Выходной сигнал представляет собой интенсивность поля на изображении. Импульсным откликом оптической системы является функция рассеяния точки, которая в дифракционной теории формирования оптических изображений определяется выражением (2.39).

Формирование изображений при когерентном освещении описывается выражением (2.78), которое можно записать следующим образом:

$$U'(\eta'_x, \eta'_y) = T(\eta_x, \eta_y) \otimes \tilde{f}(\eta_x, \eta_y), \quad (3.8)$$

где $\tilde{f}(\eta_x, \eta_y)$ – результат обратного преобразования Фурье зрачковой функции. В этом случае входным сигналом является комплексное пропускание предмета, импульсным откликом – фурье-образ зрачковой функции, а выходным сигналом – комплексная амплитуда поля на изображении. При когерентном освещении предмета оптическая система выполняет преобразование сигналов линейное по амплитуде.

Формирование изображений при некогерентном освещении предметов описывается выражением (2.83) из которого видно, что входной сигнал представляет собой квадрат модуля комплексного пропускания или яркость на предмете. Выходным сигналом является интенсивность поля на изображении, а импульсным откликом – функция рассеяния точки. Таким образом, преобразование сигналов, которое выполняет оптическая система при некогерентном освещении предмета и при формировании изображений светящихся предметов, является линейным по интенсивности.

При анализе работы оптических систем рассматривают предметы и изображения двух типов: ближнего и дальнего [15]. Смысл обобщённых интенсивностей в зависимости от типа предмета и изображения конкретизируется в таблице 3.2.

Таблица 3.2 Интерпретация обобщённой интенсивности в зависимости от типа предмета и изображения

	<i>Предмет</i>	<i>Изображение</i>
<i>Ближний тип</i>	<i>Яркость на предмете</i>	<i>Освещённость поверхности изображения</i>
<i>Дальний тип</i>	<i>Яркость на предмете</i>	<i>Сила света выходного зрачка</i>

Таким образом, если абстрагироваться от конкретного физического смысла предмета и изображения и рассматривать их как функции обобщённых интенсивностей, то выражение (3.7) становится универсальным и может использоваться для моделирования формирования некогерентных и когерентных изображений. При частично когерентном освещении связь двумерных сигналов, описывающих предмет и изображение, является нелинейной, и применение теории линейных систем невозможно.

3.2. Характеристики качества оптических систем

В большинстве случаев оптические системы формируют изображение при некогерентном освещении. Рассмотрим характеристики, описывающие преобразование структуры предмета при формировании оптической системой его некогерентного изображения, более подробно.

В общем случае при формировании изображения оптическая система осуществляет преобразование масштаба, энергии и структуры предмета. При анализе работы оптической системы удобно было бы выделить структурные передаточные характеристики так, чтобы передачу структуры можно было анализировать отдельно от передачи масштаба и энергии. Для этого весь процесс преобразования следует разбить на три независимых этапа и представить, что он осуществляется тремя независимыми приборами [17].

Пусть первый прибор осуществляет только *масштабные преобразования*, не изменяя структуры и энергии предмета по сравнению с изображением. Тогда его импульсную реакцию можно определить так:

$$h_V(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y) = \delta(\eta'_x - V_x \eta_x, \eta'_y - V_y \eta_y), \quad (3.9)$$

где V_x и V_y – обобщённые увеличения, которые при использовании канонических координат равны 1. Таким образом, использование системы канонических координат позволяет исключить из рассмотрения масштабные преобразования.

Пусть второй прибор осуществляет только *энергетические преобразования*, не изменяя масштаба и структуры. Импульсная реакция такого прибора определяется следующим выражением:

$$h_H(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y) = H' \cdot \delta(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y), \quad (3.10)$$

где H' – обобщённая задняя светосила, которая определяется отношением обобщённых энергий изображения и предмета:

$$H' = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\eta'_x, \eta'_y) d\eta'_x d\eta'_y}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta_x, \eta_y) d\eta_x d\eta_y}. \quad (3.11)$$

В данном случае, когда масштабные и структурные преобразования исключаются, можно показать [17], что обобщённая светосила определяется выражением:

$$H' = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^{1/2}(\rho'_x, \rho'_y) d\rho'_x d\rho'_y \right)^2, \quad (3.12)$$

где $\tau(\rho'_x, \rho'_y)$ – функция амплитудного пропускания прибора.

Преобразование структуры, которое выполняет третий прибор, заключается в том, что он заменяет каждую точку предмета пятном рассеяния на изображении. При выполнении условия изопланатизма импульсная реакция зависит только от разности координат на изображении и предмете и определяется следующим выражением:

$$h(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y) = h(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y). \quad (3.13)$$

Таким образом, для получения импульсной реакции, описывающей только структурные преобразования, необходимо, во-первых, использовать

канонические координаты, чтобы обобщённые увеличения были равны 1, и, во-вторых, выполнить нормировку, руководствуясь тем, что энергия, содержащаяся в импульсной реакции структурного преобразователя, должна равняться единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta_x, \eta_y, \eta'_x, \eta'_y) d\eta'_x d\eta'_y = 1. \quad (3.14)$$

Согласно выражениям (2.39) и (3.11) *нормированная импульсная реакция* определяется следующим образом:

$$h(\eta'_x, \eta'_y) = \frac{1}{H'} \cdot \left| F^{-1} [f(\rho_x, \rho_y)] \right|^2. \quad (3.15)$$

В дальнейшем при анализе формирования изображения и сравнении качества оптических систем будем использовать именно нормированную импульсную реакцию (то есть нормированную ФРТ), из которой исключены масштабные и энергетические преобразования. Нормированная ФРТ является основной характеристикой, описывающей передачу структуры при формировании изображения.

Проанализируем изменения функции рассеяния точки под влиянием основных факторов, определяющих качество формируемого изображения. К таким факторам относятся форма апертурной диафрагмы (размеры в канонической системе координат несущественны), неравномерность амплитудного пропускания и аберрации оптической системы.

Рассмотрим функции рассеяния точки идеальных оптических систем с апертурной диафрагмой различной формы. Под идеальной оптической системой понимается безаберрационная система ($W(\rho) = 0$) с равномерным по зрачку амплитудным пропусканием ($\tau(\rho) = 1$). Пусть апертурная диафрагма имеет форму круга. Тогда зрачковая функция удобнее всего выражается в полярных координатах: $f(\rho) = \text{circ}(\rho)$. Для определения фурье-образа такой функции можно воспользоваться преобразованием Ганкеля [6, 12]. В результате ФРТ определяется следующим выражением:

$$h(\eta') = \frac{1}{\pi^2} \cdot \left(\frac{J_1(2\pi\eta')}{\eta'} \right)^2 = \text{Bessinc}^2(2\pi\eta'), \quad (3.16)$$

где J_1 – функция Бесселя 1-го порядка [4].

Если форма апертурной диафрагмы представляет собой кольцо с относительным коэффициентом центрального экранирования ε , то зрачковая функция в полярных координатах имеет вид: $f(\rho) = \text{circ}(\rho) - \text{circ}(\rho/\varepsilon)$. ФРТ оптической системы с экранированием определяется выражением:

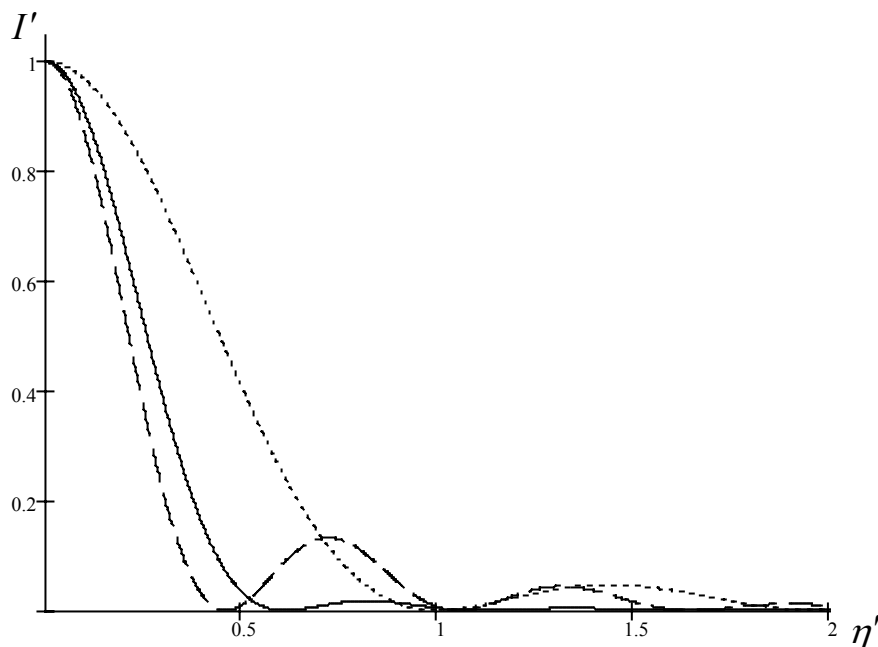
$$h(\eta') = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^2} \cdot \left(\text{Bessinc}^2(2\pi\eta') - \varepsilon^2 \cdot \text{Bessinc}^2(2\pi\varepsilon\eta') \right). \quad (3.17)$$

Если апертурная диафрагма имеет форму квадрата, то зрачковая функция определяется так: $f(\rho_x, \rho_y) = \text{rect}(\rho_x/2) \cdot \text{rect}(\rho_y/2)$, а распределение интенсивности в изображении точки будет иметь иной характер:

$$h(\eta'_x, \eta'_y) = (\text{sinc}(2\pi\eta'_x) \cdot \text{sinc}(2\pi\eta'_y))^2, \quad (3.18)$$

где функция $\text{sinc}(2\pi\eta') = \sin(2\pi\eta')/2\pi\eta'$.

а) Сечения ФРТ



б) Сечения ФРТ в логарифмическом масштабе

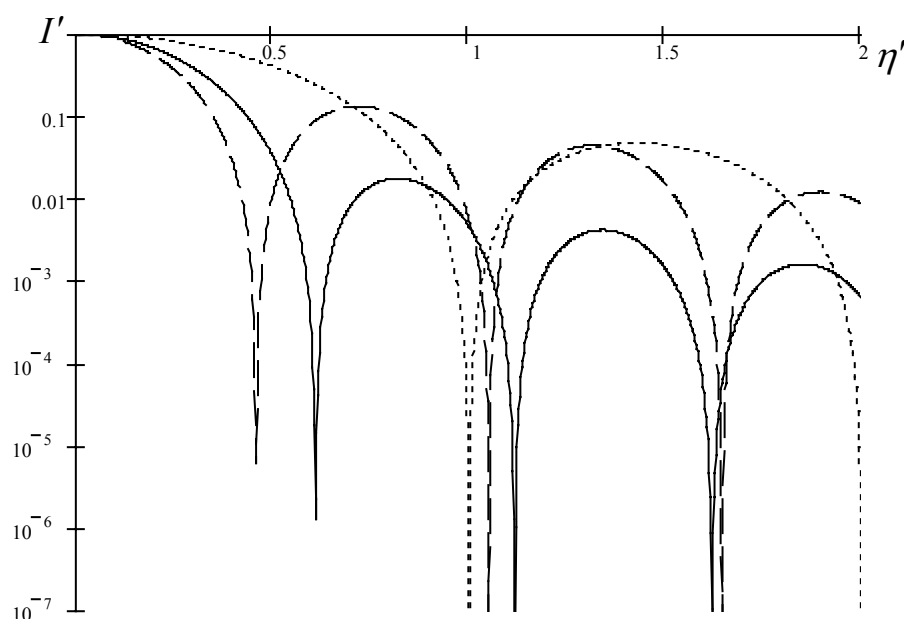


Рис. 3.1 ФРТ оптической системы с апертурной диафрагмой в форме круга (—), кольца (— —) и квадрата (· · · · ·)

На рисунке 3.1 представлены сечения ФРТ для оптических систем с апертурной диафрагмой различной формы. Из рисунка видно, что изображение точки представляет собой пятно, распределение интенсивности в котором определяется дифракцией на апертурной диафрагме. Центральное пятно

оказывают вторичные максимумы, интенсивность которых быстро убывает. Поэтому для более наглядного отображения ФРТ на графиках для оси интенсивности иногда используется логарифмический масштаб (Рис. 3.1,б).

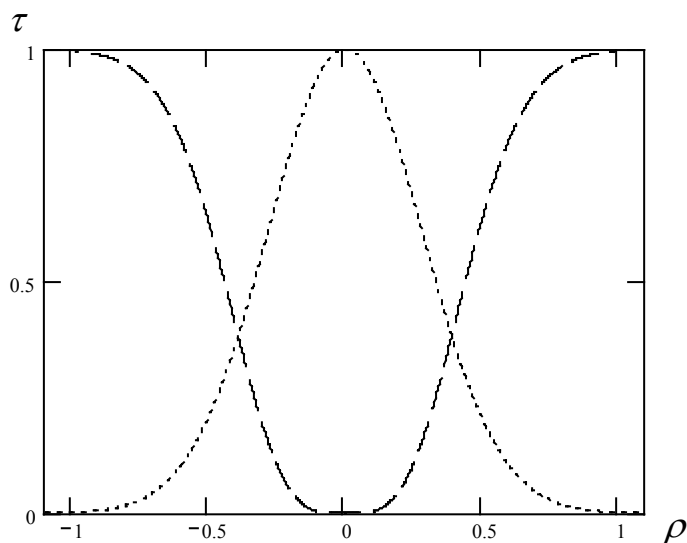


Рис. 3.2 Сечения функции амплитудного пропускания $\tau(\rho)$ с увеличением (— —) и уменьшением (.....) значений от центра к периферии

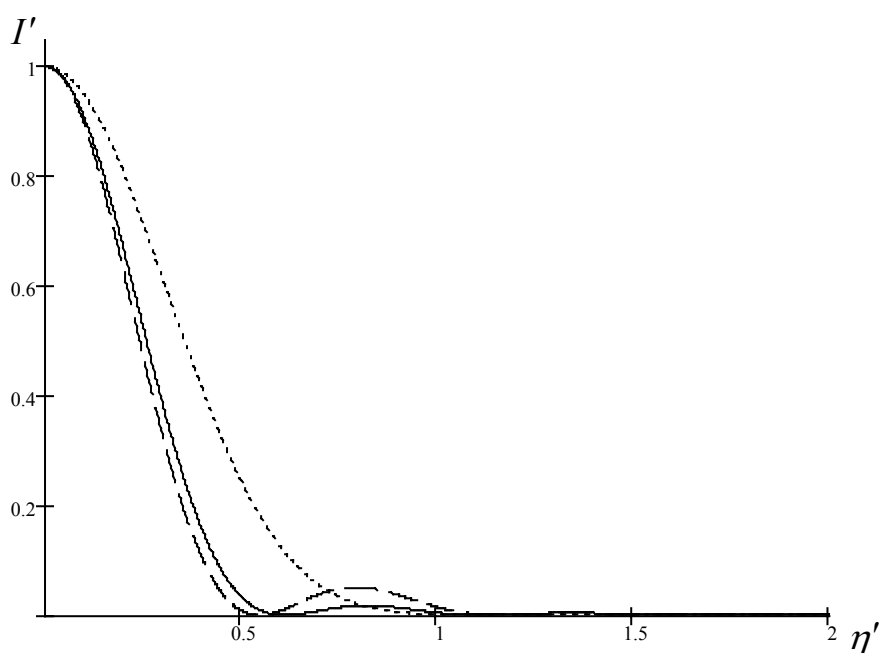


Рис. 3.3 Сечения ФРТ оптических систем с равномерным пропусканием (—), с радиальным увеличением (— —) и уменьшением (.....) пропускания

Второй фактор, влияние которого следует рассмотреть, – неравномерность амплитудного пропускания оптической системы. Рассмотрим ФРТ оптической системы с круглым зрачком в случаях, когда неравномерность пропускания увеличивается от центра к периферии и описывается функцией $\tau(\rho) = \left(1 - e^{-2\pi\rho^2}\right)^2$, и когда неравномерность пропускания уменьшается и

описывается функцией $\tau(\rho) = e^{-2\pi\rho^2}$ (Рис. 3.2). В этом случае зрачковая функция определяется произведением: $f(\rho) = \text{circ}(\rho) \cdot \tau(\rho)$.

На рисунке 3.3 представлены сечения ФРТ для оптической системы с апертурной диафрагмой круглой формы с равномерным и неравномерным пропусканием, полученные численными методами. Характер ФРТ оптической системы, в которой неравномерность пропускания увеличивается от центра к периферии, подобен ФРТ при наличии в оптической системе центрального экранирования. В случае, когда неравномерность пропускания описывается гауссоидой, ФРТ оптической системы так же становится подобна гауссоиде. В изображении точки наблюдается увеличение энергии, содержащейся в центральном максимуме, и полное исчезновение дифракционных колец. Таким образом, неравномерность пропускания может оказать существенное влияние на перераспределение энергии в дифракционном изображении.

Основным фактором, с которым приходится бороться для получения необходимых и теоретически возможных характеристик для данной оптической системы, являются aberrации. Рассмотрим влияние aberrаций на распределение интенсивности в изображении точки.

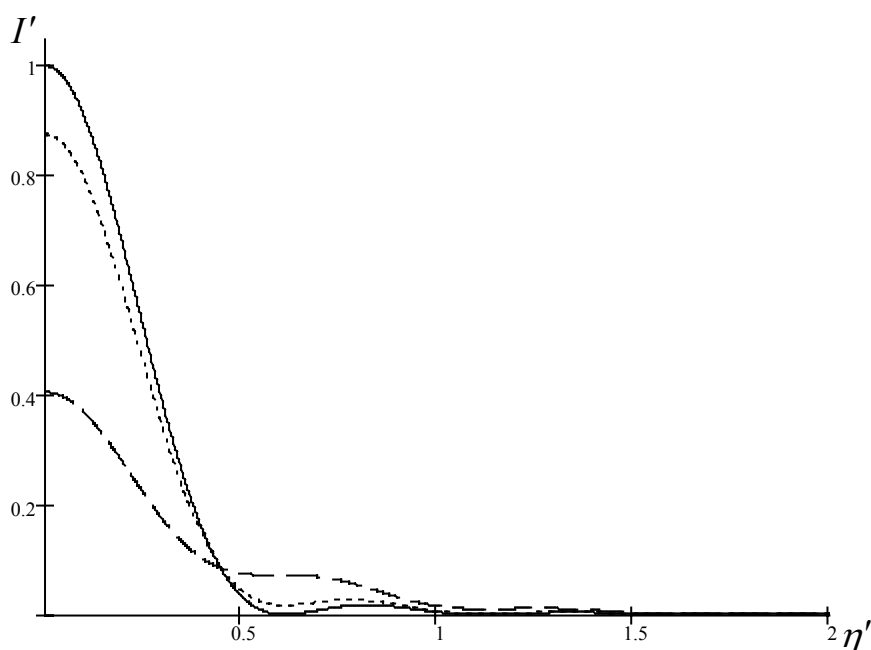


Рис. 3.4 Сечения ФРТ оптических систем без aberrаций (—), с расфокусировкой при $c_{20} = 0.1\lambda$ (---) и при $c_{20} = 0.25\lambda$ (.....)

Для описания aberrаций часто используется представление функции волновой aberrаций в виде разложения по базису в виде системы ортогональных полиномов Цернике [3]. Рассмотрим ФРТ оптической системы с круглым зрачком, равномерным пропусканием и расфокусировкой, которая описывается функцией волновой aberrации в следующем виде: $W(\rho) = c_{20}(2\rho^2 - 1)$. Тогда, зрачковая функция определяется произведением: $f(\rho) = \text{circ}(\rho) \cdot e^{-2\pi i c_{20}(2\rho^2 - 1)}$. Распределение интенсивности в изображении

точки полученное численным моделированием для такой ситуации представлено на рисунке 3.4.

На рисунке 3.5 представлены ФРТ оптической системы с круглым зрачком при наличии сферической aberrации. В этом случае зрачковая функция определяется следующим образом: $f(\rho) = \text{circ}(\rho) \cdot e^{-2\pi i c_{40}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)}$.

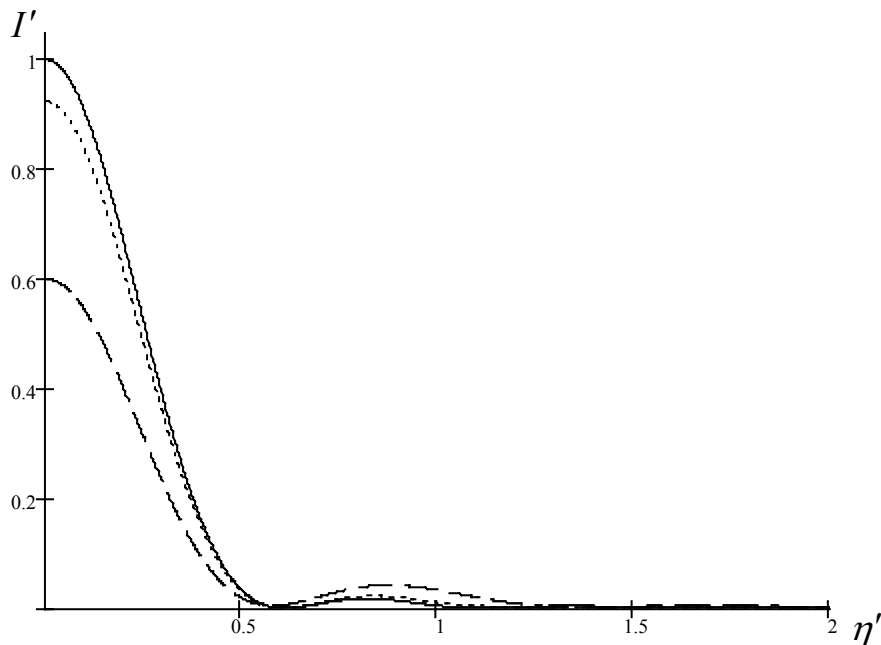


Рис. 3.5 Сечения ФРТ оптических систем без aberrаций (—), со сферической aberrацией при $c_{40} = 0.1\lambda$ (— —) и при $c_{40} = 0.25\lambda$ (.....)

Если величина aberrаций невелика, то форма дифракционного пятна сохраняется, но происходит перераспределение энергии. В случае симметричных aberrаций (расфокусировка, сферическая aberrация) кольца становятся ярче. В случае несимметричных aberrаций (кома, астигматизм) наблюдается несимметричное перераспределение энергии. Если aberrации велики, дифракционный узор (кольца с периодом 0.5 канонических единиц) сохраняется, но практически вся энергия перекачивается в кольца. В этом случае распределение интенсивности полностью определяется aberrациями.

При анализе качества оптических систем в некоторых случаях удобнее использовать более наглядные функции, чем функция рассеяния точки, или вообще характеризовать передачу структуры предмета одним числом. Например, для оценки влияния aberrаций на качество изображения применяется число Штреля:

$$St = \frac{h(0)}{h_o(0)}, \quad (3.19)$$

где $h(0)$ — высота ФРТ реальной оптической системы, $h_o(0)$ — высота ФРТ идеальной оптической системы. Эта характеристика условно описывает величину энергии, которая перекачалась в кольца. Как показывает практика [9, 14], если $St \geq 0.8$, то что влияние aberrаций несущественно.

Наглядную картину перераспределения энергии в пятне рассеяния даёт функция концентрации энергии. Она показывает, какая часть общей интенсивности ФРТ укладывается в круге диаметром d' :

$$E(d') = \iint_{d'} h(\eta'_x, \eta'_y) d\eta'_x d\eta'_y. \quad (3.20)$$

Функция концентрации энергии используется при оценке качества оптических систем, для которых важно относительное распределение энергии в изображении точечных предметов (например, астрономические приборы, для которых предметом являются звезды). На рисунке 3.6 представлены графики функции концентрации энергии для безабберационной оптической системы и при наличии расфокусировки.

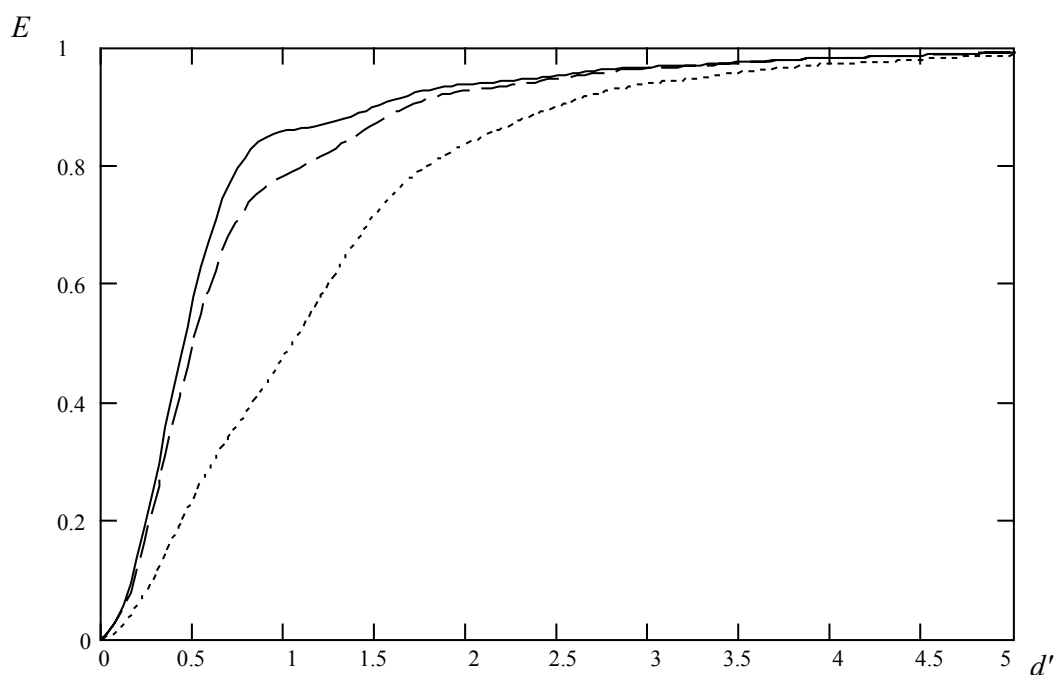


Рис. 3.6 ФКЭ оптических систем без аббераций (—), с расфокусировкой при $c_{20} = 0.1\lambda$ (— —) и при $c_{20} = 0.25\lambda$ (.....)

Для анализа качества изображений квазиодномерных предметов, интенсивность которых постоянна в каком-либо направлении, вместо ФРТ удобно использовать одномерную функцию рассеяния линии (ФРЛ). Эта функция представляет собой распределение интенсивности в изображении бесконечно длинной и тонкой линии. Если предмет представляет собой линию, которая совпадает с осью y , то выражение для распределения интенсивности в сечении изображения можно записать следующим образом:

$$S(\eta'_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\eta_x) \cdot h(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) d\eta'_x d\eta'_y = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta'_x, \eta'_y) d\eta'_y. \quad (3.21)$$

Таким образом, в каждой точке η'_x ФРЛ равна площади сечения ФРТ плоскостью перпендикулярной плоскости xu и параллельной оси y . На

рисунке 3.7 представлены графики функции рассеяния линии для безабберационной оптической системы и при наличии расфокусировки.

Изображение квазиодномерного предмета при соблюдении условий линейности и изопланатичности также квазиодномерно и может быть найдено с использованием следующего выражения:

$$I'(\eta'_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\eta_x) \cdot S(\eta'_x - \eta_x) d\eta_x = I(\eta_x) \otimes S(\eta_x). \quad (3.22)$$

Для анализа качества оптических систем иногда используется предмет, который описывается функцией Хевисайда [6, 12]:

$$B(\eta_x) = \begin{cases} 1, & \eta_x \geq 0; \\ 0, & \eta_x < 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

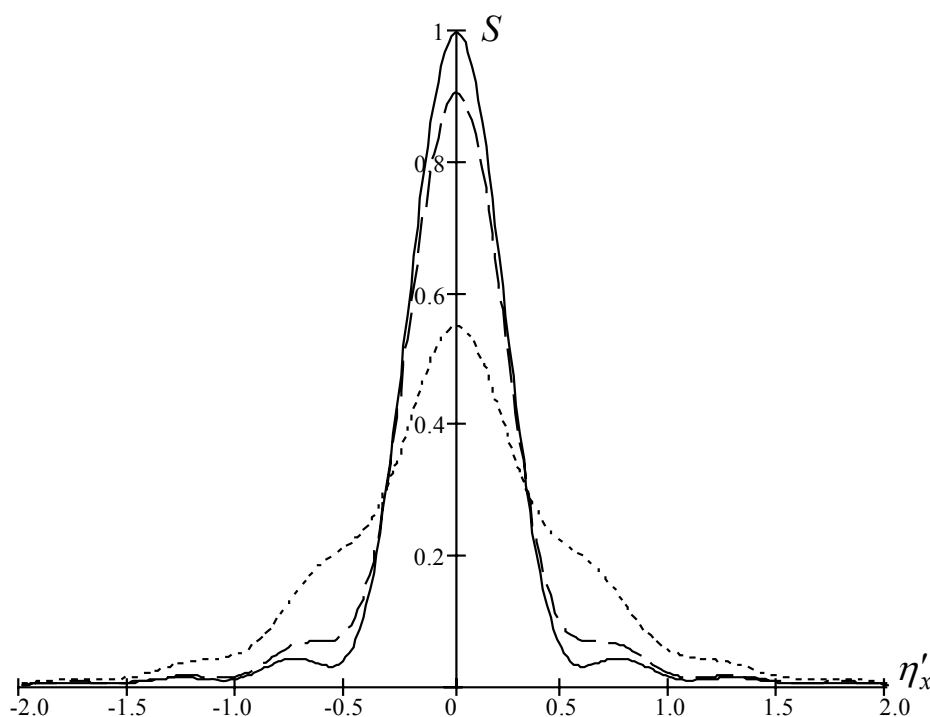


Рис. 3.7 ФРЛ оптических систем без аббераций (—), с расфокусировкой при $c_{20} = 0.1\lambda$ (— —) и $c_{20} = 0.25\lambda$ (.....)

Изображение такого предмета называется *пограничной кривой*. Согласно выражению (3.22) пограничная кривая определяется свёрткой функции Хевисайда [12] с функцией рассеяния линии. Если изменить пределы интегрирования, то пограничная кривая описывается следующим интегралом:

$$I'_B(\eta'_x) = \int_0^{+\infty} S(\eta'_x - \eta_x) d\eta_x = \int_{-\infty}^{\eta'_x} S(\eta_x) d\eta_x. \quad (3.24)$$

Таким образом, пограничная кривая может быть найдена как интеграл ФРЛ с переменной верхней границей интегрирования. На рисунке 3.8 представлена пограничная кривая безабберационной оптической системы с круглой апертурной диафрагмой.

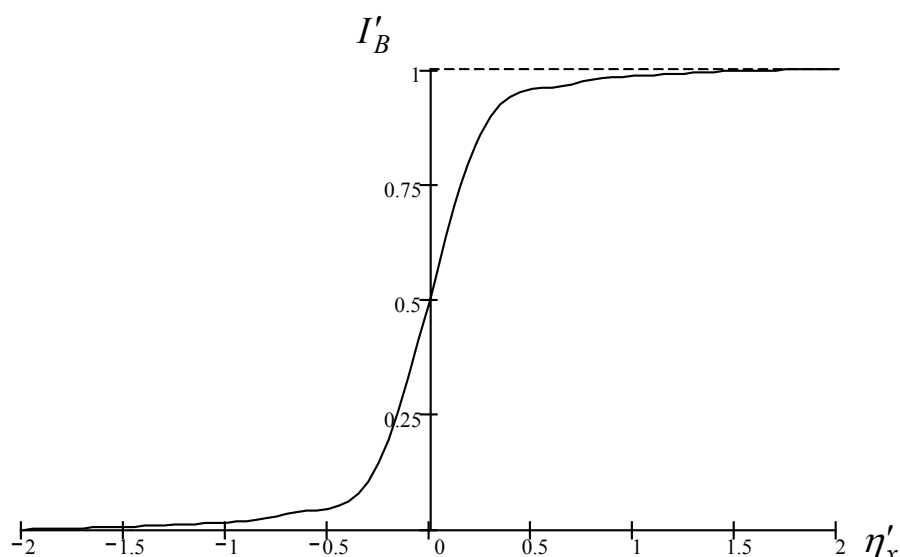


Рис. 3.8 Пограничная кривая безабберационной оптической системы

Таким образом, все рассмотренные характеристики, так или иначе, получены из функции рассеяния точки. Однако использование ФРТ и интеграла свёртки для оценки качества изображения и моделирования его формирования не всегда эффективно. Во-первых, отсутствует характерная связь между видом функции рассеяния и особенностями передачи структуры различных предметов. Это также связано с тем, что сами функции обобщённой интенсивности предмета и изображения не наглядно описывают их структуру. Во-вторых, операция свёртки весьма трудоёмка, а без моделирования часто нельзя судить о возможностях изображающего прибора.

3.3. Частотное описание преобразования сигналов

Одним из наиболее удачных описаний преобразования пространственных сигналов является частотное описание. В этом случае предмет представляется в виде совокупности элементарных периодических гармонических предметов разной частоты и амплитуды. *Гармонический предмет* — это сигнал, интенсивность которого описывается гармонической функцией.

Обобщённая интенсивность гармонического предмета (Рис. 3.9) определяется следующим образом. Пусть пространственный гармонический предмет с амплитудой a ориентирован под углом θ относительно оси x и имеет начальный сдвиг b . Основной характеристикой такого предмета является пространственная частота $\nu = 1/T$, которая представляет собой величину обратную периоду T . Интенсивность такого предмета определяется выражением:

$$I(x, y) = a \cdot e^{2\pi i \nu (x \cos \theta + y \sin \theta + b)}. \quad (3.25)$$

Вместо полярных координат (ν, θ) удобнее пользоваться частотными декартовыми координатами (ν_x, ν_y) , а вместо начального сдвига b использовать начальную фазу $\varphi_0 = 2\pi \nu b$. Объединим амплитуду a и множитель $e^{2\pi i \nu b}$ в комплексную величину $u = a \cdot e^{i\varphi_0}$, которую называют

комплексной амплитудой гармонического предмета. Тогда интенсивность такого предмета описывается следующим образом:

$$I(x, y) = u \cdot e^{2\pi i(x\nu_x + y\nu_y)}. \quad (3.26)$$

где ν_x – частота в направлении x , ν_y – частота в направлении y .

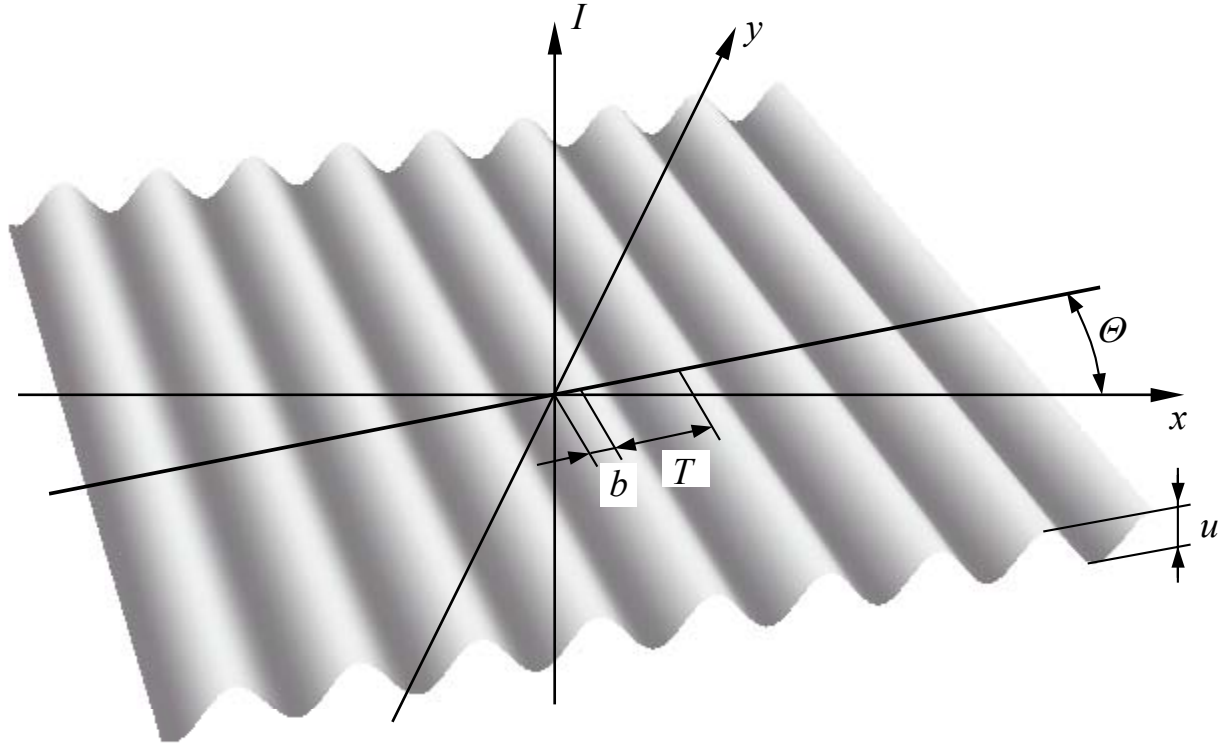


Рис. 3.9 Периодический гармонический предмет

Изображение гармонического предмета можно найти, если интенсивность этого предмета подставить в выражение (3.7):

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{2\pi i \left(\nu_x \frac{\eta_x \lambda}{A_x} + \nu_y \frac{\eta_y \lambda}{A_y} \right)} \cdot h(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) d\eta_x d\eta_y. \quad (3.27)$$

Для получения выражений удобных для вычислений и анализа перейдем к частотным каноническим координатам [15], которые выражаются следующим образом:

$$s_x = \nu_x \cdot \frac{\lambda}{A_x}; \quad s_y = \nu_y \cdot \frac{\lambda}{A_y}. \quad (3.28)$$

Теперь выражение (3.27) можно переписать следующим образом:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{2\pi i(s_x \eta_x + s_y \eta_y)} \cdot h(\eta'_x - \eta_x, \eta'_y - \eta_y) d\eta_x d\eta_y. \quad (3.29)$$

Дальнейшее преобразование этого выражения приведёт к следующему:

$$\begin{aligned}
 I'(\eta'_x, \eta'_y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{2\pi i(s_x(\eta'_x - \eta_x) + s_y(\eta'_y - \eta_y))} \cdot h(\eta_x, \eta_y) d\eta_x d\eta_y = \\
 &= u \cdot e^{2\pi i(s_x \eta'_x + s_y \eta'_y)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\eta_x, \eta_y) \cdot e^{-2\pi i(s_x \eta_x + s_y \eta_y)} d\eta_x d\eta_y = \\
 &= u \cdot e^{2\pi i(s_x \eta'_x + s_y \eta'_y)} \cdot D(s_x, s_y).
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Преобразование Фурье от функции рассеяния точки обозначается $D(s_x, s_y)$ и называется *оптической передаточной функцией*. Она характеризует передачу комплексной амплитуды гармонического предмета изображающим прибором. С учётом равенства масштабов в канонических координатах можно записать:

$$u' = u \cdot D(s_x, s_y). \tag{3.31}$$

Тогда, распределение интенсивности в изображении гармонического предмета определяется следующим образом:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = u' \cdot e^{2\pi i(s_x \eta'_x + s_y \eta'_y)}. \tag{3.32}$$

Как видим, изображение отличается от предмета только комплексной амплитудой, то есть изображение гармонического предмета, сформированное любой оптической системой, есть гармонический предмет с той же частотой.

Таким образом, гармонический сигнал является собственной функцией линейного изопланатического преобразования (3.7): изображение, так же как и предмет, является гармоническим сигналом. Действие изображающей системы при формировании изображения гармонического предмета заключается в изменении его комплексной амплитуды в зависимости от частоты.

Оптическая передаточная функция (ОПФ) является комплексной и может выражаться через две вещественные функции: $M(s_x, s_y) = |D(s_x, s_y)|$ – модуляционную передаточную функцию (МПФ) и $\Phi(s_x, s_y) = \arg[D(s_x, s_y)]$ – фазовую передаточную функцию (ФПФ):

$$D(s_x, s_y) = M(s_x, s_y) \cdot e^{i\Phi(s_x, s_y)}. \tag{3.33}$$

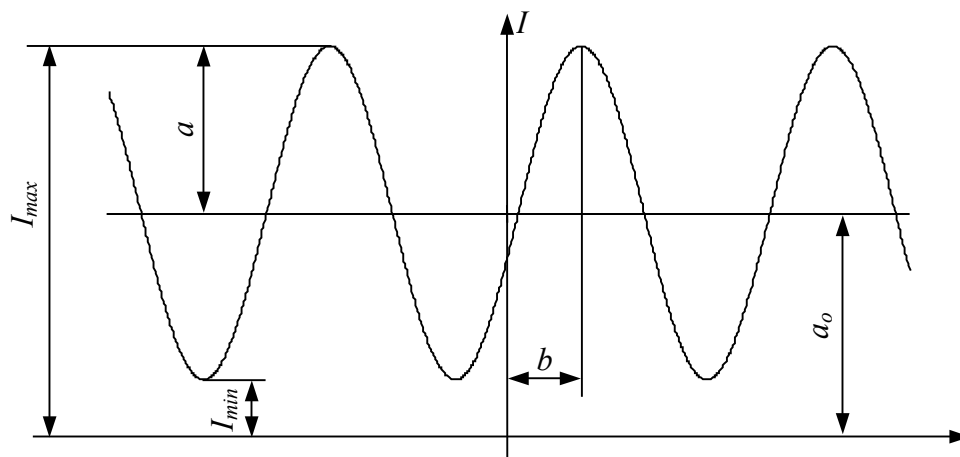
Тогда, выражение (3.31) можно разделить на две части, первое из которых описывает передачу комплексной амплитуды гармонического предмета, а второе – передачу его фазы:

$$a' = a \cdot M(s_x, s_y); \quad \varphi'_o = \varphi_o + \Phi(s_x, s_y). \tag{3.34}$$

При анализе передачи структуры предмета наибольший интерес представляет изменение его амплитуды, которое связано с передачей контраста. Представим предмет (Рис. 3.10, а) в виде постоянной составляющей нулевой частоты и переменной составляющей основной частоты гармонического предмета:

$$I(\eta_x, \eta_y) = a_o + a \cdot e^{2\pi i(\eta_x s_x + \eta_y s_y) + \varphi_o}. \tag{3.35}$$

а) Входной
сигнал
(предмет)



а) Выходной
сигнал
(изображение)

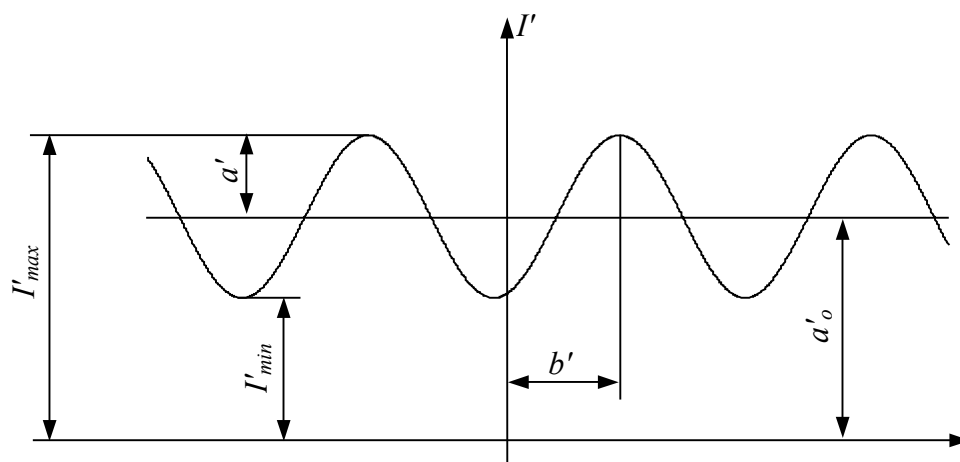


Рис. 3.10 Передача периодического гармонического сигнала

Контраст (или модуляция) характеризует видность предмета с амплитудой a на фоне a_0 и определяется по формуле:

$$k = \frac{a}{a_0} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (3.36)$$

Контраст находится в диапазоне $0 \leq k \leq 1$. Единичное или абсолютное значение контраста ($k = 1$), получается, когда $I_{\min} = 0$. При нулевом значении контраста $I_{\min} = I_{\max}$, то есть объект не отличим от фона. В силу линейности преобразований изображение гармонического сигнала (Рис. 3.10, б) так же будет представлять собой сумму постоянной и переменной составляющей:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = a'_0 + a' \cdot e^{2\pi i(\eta'_x s'_x + \eta'_y s'_y) + \varphi'_0}. \quad (3.37)$$

Зная модуляционную передаточную функцию, определим контраст изображения:

$$k' = \frac{a'}{a'_0} = \frac{a \cdot M(s_x, s_y)}{a_0 \cdot M(0,0)} = k \cdot \frac{M(s_x, s_y)}{M(0,0)}. \quad (3.38)$$

Исходя из условия нормирования (3.14), можно показать [6, 17], что $M(0,0) = 1$. Тогда выражение (3.38) записывается следующим образом:

$$M(s_x, s_y) = \frac{k'}{k}. \quad (3.39)$$

Модуляционная передаточная функция характеризует передачу контраста в зависимости от частоты предмета и поэтому иногда называется частотно-контрастной характеристикой (ЧКХ).

Любой предмет можно представить в виде набора элементарных гармонических предметов, тогда изображение – это совокупность изображений элементарных гармонических предметов [5, 17]. Рассмотрим формирование изображения произвольного предмета с использованием его частотного представления, которое выглядит следующим образом:

$$I(\eta_x, \eta_y) = \int_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} \int u(s_x, s_y) \cdot e^{2\pi i(s_x \eta_x + s_y \eta_y)} ds_x ds_y = F^{-1}[u(s_x, s_y)]. \quad (3.40)$$

Выражение (3.40) описывает предмет как бесконечную сумму элементарных гармонических предметов с различными пространственными частотами s_x и s_y и различными комплексными амплитудами $u(s_x, s_y)$. Эта функция обычно обозначается как $\tilde{I}(s_x, s_y)$ и называется спектром частот предмета. Как видим, функция обобщённой интенсивности предмета представляет собой обратное преобразование Фурье спектра его частот. Аналогично связаны функция обобщённой интенсивности изображения $I'(\eta'_x, \eta'_y)$ и спектр частот изображения $\tilde{I}'(s'_x, s'_y)$. Выполнив преобразования аналогичные (3.30) и используя последние обозначения можно записать выражение, которое описывает передачу структуры предмета в терминах пространственных частот:

$$\tilde{I}'(s'_x, s'_y) = \tilde{I}(s_x, s_y) \cdot D(s_x, s_y). \quad (3.41)$$

Выражение (3.41) является моделью формирования изображения в частотном координатном пространстве, в котором изображающий оператор существенно упрощается и является мультипликативным. Ядро этого преобразования составляет оптическая передаточная функция $D(s_x, s_y)$, которая описывает влияние изображающего прибора на комплексную амплитуду частотных составляющих предмета. При таком подходе роль входного сигнала играет спектр обобщённой интенсивности предмета, а роль выходного сигнала – спектр обобщённой интенсивности изображения. Выражение (3.41) также называют *соотношением фильтрации* [5, 15]. Изображающий прибор как бы фильтрует различные пространственные частоты предмета.

Возвращаясь в реальное координатное пространство, выражение (3.41) можно переписать следующим образом:

$$I'(\eta'_x, \eta'_y) = F^{-1}[F[I(\eta_x, \eta_y)] \cdot D(s_x, s_y)] = F^{-1}[F[I(\eta_x, \eta_y)] \cdot F[h(\eta_x, \eta_y)]]. \quad (3.42)$$

Таким образом, с использованием частотного представления предмета для моделирования формирования изображения получено выражение аналогичное выражению (2.83), выведенному на основе дифракционной теории.

3.4. Оптическая передаточная функция и её свойства

Оптическая передаточная функция описывает передачу оптической системой гармонических сигналов различной частоты. Рассмотрим свойства оптической передаточной функции и её связь с введенными ранее функциями, описывающими качество изображающего прибора. Определяющей является связь ОПФ с ФРТ, которая согласно выражению (3.30) описывается преобразованием Фурье:

$$D(s_x, s_y) = F[h(\eta_x, \eta_y)]. \quad (3.43)$$

Свойства преобразования Фурье позволяют утверждать [6, 12], что интеграл от ОПФ по всей частотной плоскости равен значению ФРТ в начале координат:

$$\int_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} \int D(s_x, s_y) ds_x ds_y = h(0, 0). \quad (3.44)$$

В соответствии с теоремами о симметрии преобразования Фурье легко установить, что МПФ – это функция чётная относительно координаты ν , а ФПФ – нечётная. Если представить эти функции в полярных координатах, то всегда выполняются равенства:

$$M(-\nu, \theta) = M(\nu, \theta); \quad \Phi(-\nu, \theta) = -\Phi(\nu, \theta). \quad (3.45)$$

Таким образом, достаточно знать и анализировать значения МПФ и ФПФ только для положительных частот.

Для квазиодномерных объектов достаточно рассмотреть сечение ОПФ совпадающее с углом θ гармонического предмета. Можно показать [17], что сечение ОПФ связано с ФРЛ следующим соотношением:

$$D(s_x) = F[S(\eta'_x)]. \quad (3.46)$$

Используя свойства преобразования Фурье можно получить простую формулу связывающую ОПФ непосредственно со зрачковой функцией оптической системы:

$$\begin{aligned} D(s_x, s_y) &= F\left[\left| F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)] \right|^2 \right] = F\left[\left(F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)] \right) \cdot \left(F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)] \right)^* \right] = \\ &= \left(FF^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)] \right) \otimes \left(FF^{-1}[f^*(-\rho_x, -\rho_y)] \right) = \\ &= f(\rho_x, \rho_y) \otimes f^*(-\rho_x, -\rho_y). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Последняя формула означает, что ОПФ есть автокорреляция зрачковой функции и в развернутом виде её можно записать следующим образом:

$$D(s_x, s_y) = \frac{1}{D} \int_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} \int f(\rho_x, \rho_y) \cdot f(\rho_x - s_x, \rho_y - s_y) d\rho_x d\rho_y, \quad (3.48)$$

где $D = \int_{-\infty - \infty}^{+\infty + \infty} \int \tau(\rho'_x, \rho'_y) d\rho'_x d\rho'_y$ – нормировочный множитель. Таким образом,

ОПФ, её модуль и аргумент имеют следующие начальные значения:

$$D(0, \theta) = 1; M(0, \theta) = 1; \Phi(0, \theta) = 0. \quad (3.49)$$

Проанализируем изменения оптической передаточной функции под влиянием основных факторов, определяющих качество оптического изображения: формы апертурной диафрагмы, неравномерности амплитудного пропускания и aberrаций.

Рассмотрим МПФ идеальных оптических систем с апертурной диафрагмой в форме круга, кольца и квадрата. Для оптической системы с апертурной диафрагмой в форме квадрата нетрудно получить аналитическое выражение для МПФ:

$$M(s_x, s_y) = \left| \operatorname{tr} \left(\frac{s_x}{2} \right) \cdot \operatorname{tr} \left(\frac{s_y}{2} \right) \right|, \quad (3.50)$$

где функция «треугольника» определяется следующим образом:

$$\operatorname{tr}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-1, 1]; \\ 1 + x, & x \in [-1, 0]; \\ 1 - x, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Для остальных случаев МПФ определена численными методами.

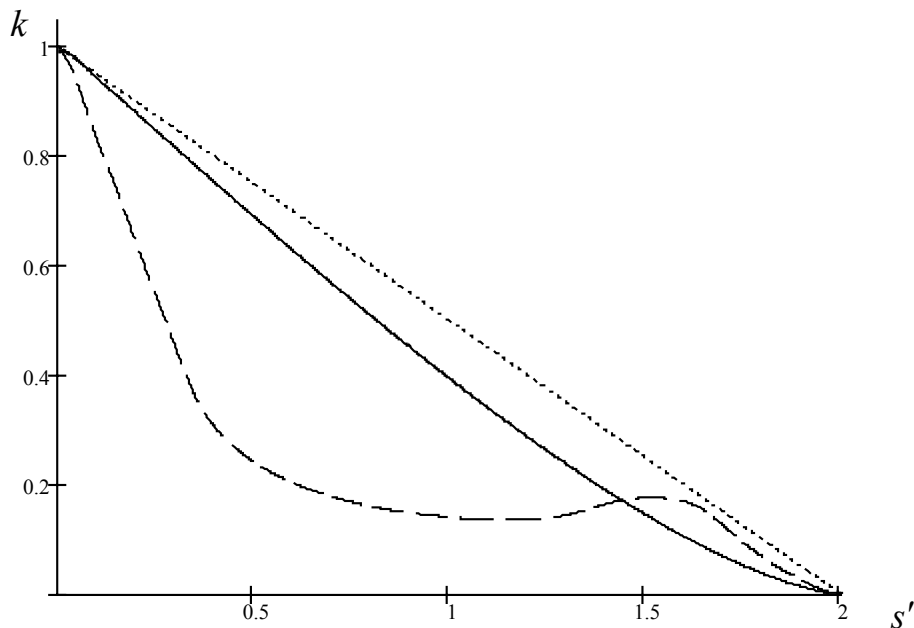


Рис. 3.11 Сечения МПФ оптической системы с апертурной диафрагмой в форме круга (—), кольца (— —) и квадрата (.....)

При анализе МПФ различных оптических систем часто сравнивают с МПФ идеальной оптической системы с круглой апертурной диафрагмой. График МПФ, который представлен на рисунке 3.11, заметно отличается от прямой соответствующей МПФ оптической системы с квадратной апертурной диафрагмой. Кроме того в различных сечениях МПФ оптической системы с квадратной апертурной диафрагмой будет иметь разную предельную частоту. При наличии в оптической системе экранирования передача элементов

предмета со средней частотой осуществляется с существенно меньшим контрастом.

Как видно из рисунка 3.11, на частотах отличных от 0 значение МПФ всегда меньше 1. При увеличении частоты МПФ стремится к 0. Предельная каноническая частота, передаваемая оптической системой, равна 2 каноническим единицам. Гармонические предметы с частотами выше 2 будут передаваться оптической системой с нулевым контрастом. Скорость убывания МПФ можно связать с характером ФРТ. Чем более плавно изменяется эта функция, тем быстрее убывает МПФ. Можно показать [17], что МПФ убывает пропорционально s^{n+1} , где n – порядок той производной ФРТ, которая ещё существует.

Рассмотрим МПФ оптической системы с круглым зрачком в случаях, когда неравномерность пропускания увеличивается от центра к периферии и описывается функцией $\tau(\rho) = (1 - e^{-2\pi\rho^2})^2$, и когда неравномерность пропускания уменьшается и описывается функцией $\tau(\rho) = e^{-2\pi\rho^2}$. МПФ для этих случаев представлены на рисунке 3.12.

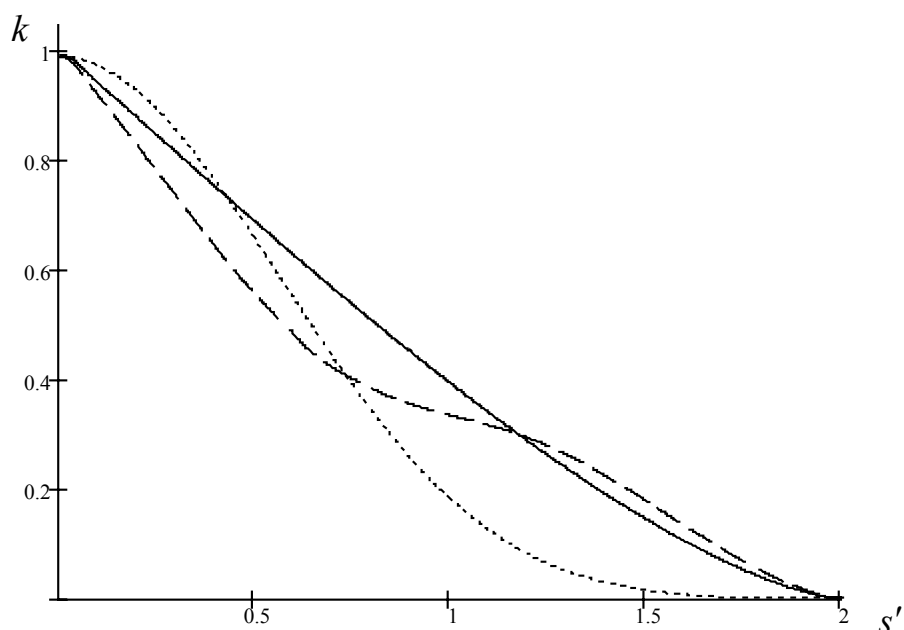


Рис. 3.12 Сечения МПФ оптических систем с равномерным пропусканием (—), с радиальным увеличением (— —) и уменьшением (.....) пропускания

В случае, когда неравномерность пропускания описывается гауссоидой, МПФ оптической системы, как и ожидается [6], становится подобна гауссоиде. Характер МПФ оптической системы, в которой неравномерность пропускания увеличивается от центра к периферии, подобен МПФ при наличии в оптической системе центрального экранирования. Хотя падение контраста не так велико.

При наличии небольших aberrаций МПФ оптической системы становится меньше, чем МПФ безаберрационной системы на всех частотах (Рис. 3.13 и 3.14). При увеличении aberrаций МПФ существенно отличается от

безабберационной МПФ особенно на средних частотах, может иметь сложную форму, но никогда не превышает безабберационную кривую. Из-за aberrаций может существенно уменьшаться предельная частота, которую оптическая система передает с контрастом больше 0.

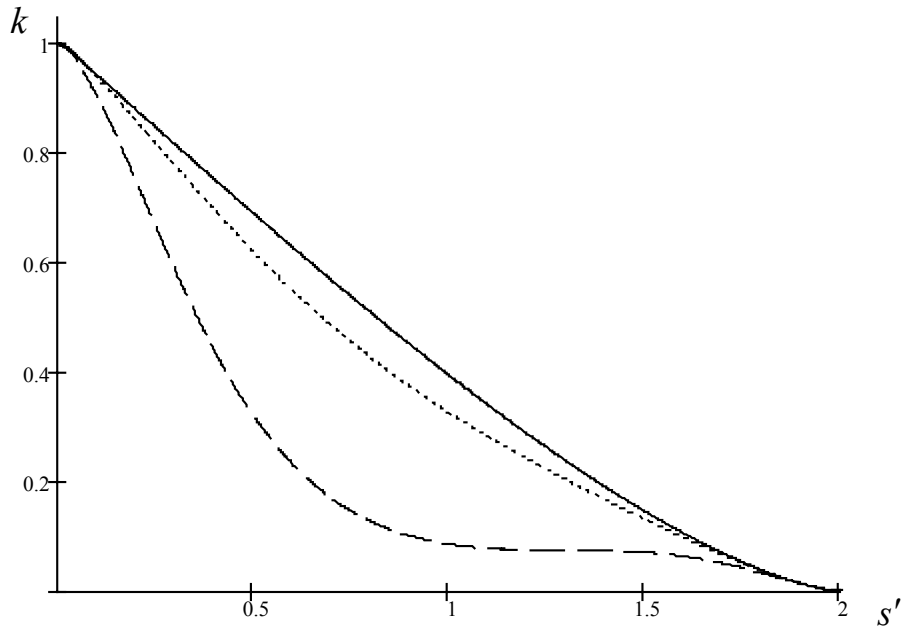


Рис. 3.13 Сечения МПФ оптических систем без aberrаций (—), с расфокусировкой при $c_{20} = 0.1\lambda$ (---) и при $c_{20} = 0.25\lambda$ (.....)

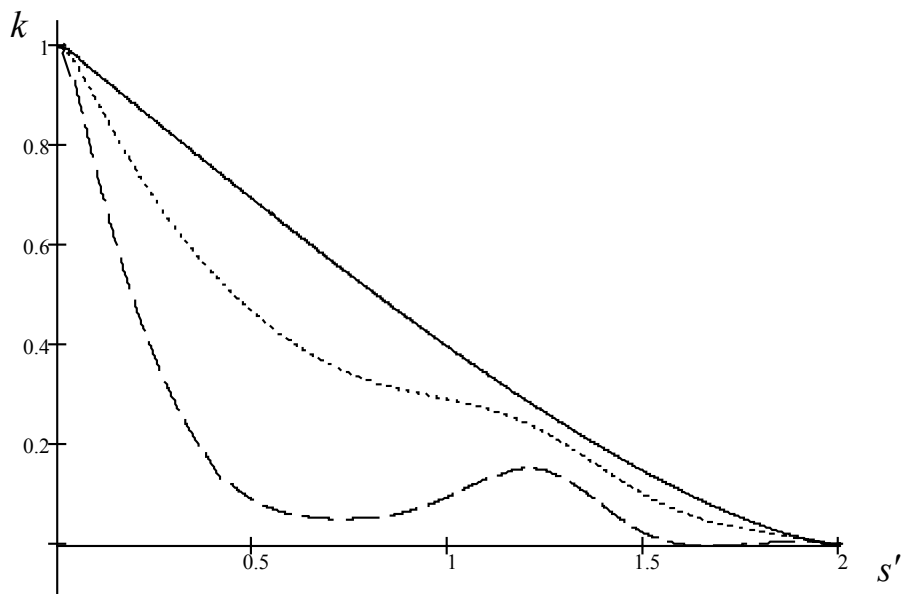


Рис. 3.14 Сечения МПФ оптических систем без aberrаций (—), со сферической aberrацией при $c_{40} = 0.1\lambda$ (---) и $c_{40} = 0.25\lambda$ (.....)

Для оценки качества изображения оптических систем, передающих объекты сложной структуры, часто используется критерий Фуко. Согласно этому критерию разрешающая способность оптической системы определяется как максимальная пространственная частота гармонического предмета, в

изображении которого еще различима модуляция с заданным контрастом. Например, разрешающая способность визуальных приборов обычно оценивается при контрасте $k' = 0.2$.

Итак, оптическая передаточная функция является одной из основных и важнейших характеристик качества оптических систем. Она позволяет провести качественный и количественный анализ работы изображающей системы.

3.5. Формирование изображений каскадом преобразователей

Подход к анализу изображающих систем, основанный на теории сигналов, позволяет рассмотреть формирование изображения каскадом последовательно расположенных линейных изопланатических преобразователей [17, 20]. Изображение, формируемое одним преобразователем, является предметом для другого, то есть $I_2 = I_1'$ и т.д. Каждый из преобразователей характеризуется своей ФРТ h_k и ОПФ D_k . Таким образом, изображение, формируемое каскадом преобразователей, может быть найдено следующим образом:

$$\begin{aligned} I' &= I_k' = I_k \otimes h_k = I_{k-1}' \otimes h_k = I_{k-1} \otimes h_{k-1} \otimes h_k = \\ &= I \otimes h_1 \otimes h_2 \otimes \dots \otimes h_n, \end{aligned} \quad (3.51)$$

где n – количество преобразователей в каскаде. Пользуясь свойством ассоциативности свёртки выражение (3.51) можно переписать:

$$I' = I \otimes h_e, \quad (3.52)$$

где $h_e = h_1 \otimes h_2 \otimes \dots \otimes h_n$ – эквивалентная ФРТ каскада, которая представляет собой последовательную свёртку ФРТ отдельных преобразователей. При рассмотрении каскада все координатные системы должны быть приведены к одному масштабу.

Следует отметить, что выражение (3.52) справедливо только при условии линейности и изопланатичности всех преобразователей каскада. Кроме того, должно выполняться условие независимости характеристик различных преобразователей друг от друга. Например, необходимо, чтобы ФРТ какого-либо преобразователя не зависела от его места в последовательности преобразователей. К сожалению, в реальных приборах эти условия часто не соблюдаются. В частности, две последовательно расположенные оптические системы не являются независимыми: aberrации одной из них, могут компенсироваться aberrациями другой. ФРТ такого каскада будет отличаться от свёртки ФРТ каждой из них. Поэтому при наличии в каскаде нескольких последовательно расположенных оптических систем они должны рассматриваться как один преобразователь.

По аналогии с (3.51) можно ввести понятие эквивалентной ОПФ D_e . Согласно теореме о свёртке можно записать:

$$D_e = D_1 \cdot D_2 \cdot \dots \cdot D_n = \prod_{k=1}^n D_k. \quad (3.53)$$

Эквивалентная МПФ находится как произведение МПФ отдельных преобразователей каскада:

$$M_e = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_n = \prod_{k=1}^n M_k. \quad (3.54)$$

Эквивалентная ФПФ находится как сумма ФПФ отдельных преобразователей каскада:

$$\Phi_e = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n = \sum_{k=1}^n \Phi_k. \quad (3.55)$$

При моделировании и анализе реальных изображающих приборов в виде отдельных преобразователей можно представить различные факторы, влияющие на формирование изображения [17, 20]. В первую очередь, таким образом можно описать влияние различных внешних факторов (например, влияние атмосферной турбулентности), а также условий функционирования изображающей системы (например, смещение предмета или изображения относительно оптической системы из-за движения или вибраций). В качестве отдельных преобразователей могут быть представлены внутренние факторы, обусловленные свойствами самой изображающей системы. Например, в виде линейного преобразователя можно представить влияние на формирование изображения некоторых видов аберраций (в частности, расфокусировки и астигматизма), зависящих от положения (смещения) плоскости анализа изображения. Явление двоения изображения так же не сложно представить в виде отдельного преобразователя. Кроме того, изображение обычно регистрируется приёмником, который так же можно считать отдельным преобразователем в каскаде изображающей системы.

Для моделирования формирования изображения и анализа качества изображающей системы необходимо определить ФРТ и ОПФ отдельных преобразователей, составляющих изображающую систему, а затем эквивалентные ФРТ и ОПФ. Характеристики качества оптической системы уже были рассмотрены достаточно подробно. Кратко рассмотрим ФРТ и ОПФ для преобразователей некоторых типов.

Атмосферная турбулентность

При формировании изображения оптический сигнал проходит протяжённое пространство между предметом и оптической системой. Это пространство может быть заполнено атмосферой (протяжённой хаотически неоднородной средой), которая существенно влияет на проходящий оптический сигнал. Неоднородность атмосферы, возникающая из-за пространственной разности температуры и давления, выражается в неоднородности показателя преломления, которая имеет случайный характер. Для описания распространения оптического сигнала в турбулентной среде используются статистические методы [7]. При рассмотрении формирования изображения астрономическими приборами можно ограничиться простым случаем, когда имеют дело с чистым воздухом (без пыли и аэрозоли), в котором показатель

преломления меняется плавно. В этом случае ФРТ такого преобразователя, как атмосферная турбулентность, может быть описана функцией Гаусса:

$$h(x') = \frac{1}{d^2} \cdot e^{-\frac{\pi x'^2}{d^2}}, \quad (3.56)$$

где d – размер пятна рассеяния турбулентности, который зависит от условий наблюдения и измеряется в угловых единицах. При проведении расчётов можно использовать среднее значение пятна рассеяния, которое для астрономических наблюдений с земной поверхности составляет $5''$ или $2.4 \cdot 10^{-5}$ радиан.

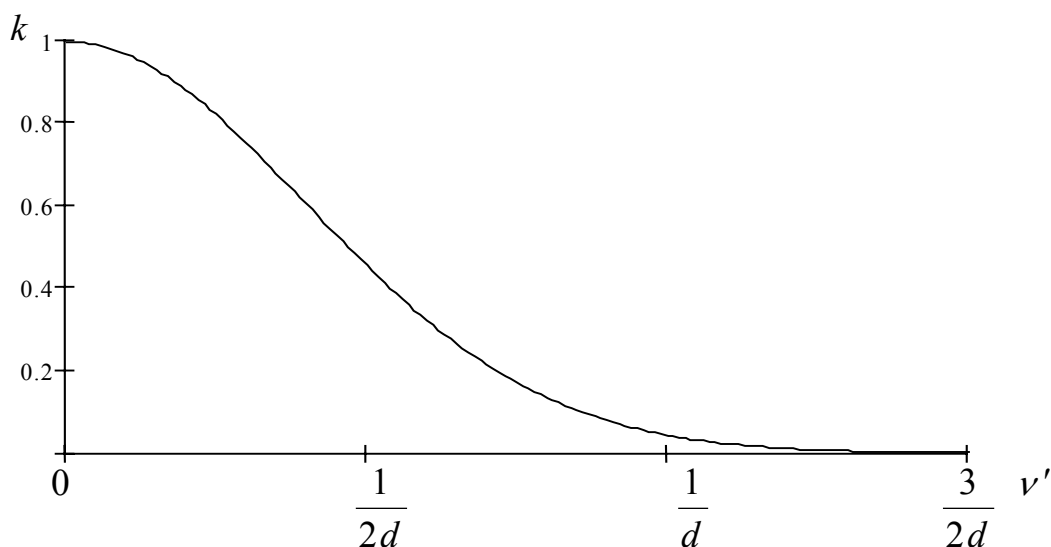


Рис. 3.15 Сечение ОПФ преобразователя, описывающего атмосферную турбулентность

Так как функция Гаусса является собственной функцией преобразования Фурье, ОПФ атмосферной турбулентности так же описывается функцией Гаусса:

$$D(v') = e^{-\pi v'^2 d^2}. \quad (3.57)$$

Как видно из графика на рисунке 3.15 предельной частотой для такого преобразователя при практических расчётах можно считать значение $1/d$.

Расфокусировка

В случае, когда идеальная оптическая система сильно расфокусирована, дифракционными эффектами можно пренебречь и считать пятно рассеяния по форме подобным зрачку [17]. Если расфокусировку представить в виде отдельного преобразователя, то при круглом зрачке пятно рассеяния будет представлять собой круг, радиус которого равен произведению задней апертуры оптической системы и величины продольной расфокусировки (Рис. 3.16), то есть $r = A' \cdot z$.

ФРТ преобразователя, описывающего расфокусировку, определяется следующим образом:

$$h(x') = \text{circ}\left(\frac{x'}{r}\right). \quad (3.58)$$

ОПФ расфокусировки определяется в соответствии с выражением (3.43):

$$D(v') = \text{Bessinc}(2\pi v' r). \quad (3.59)$$

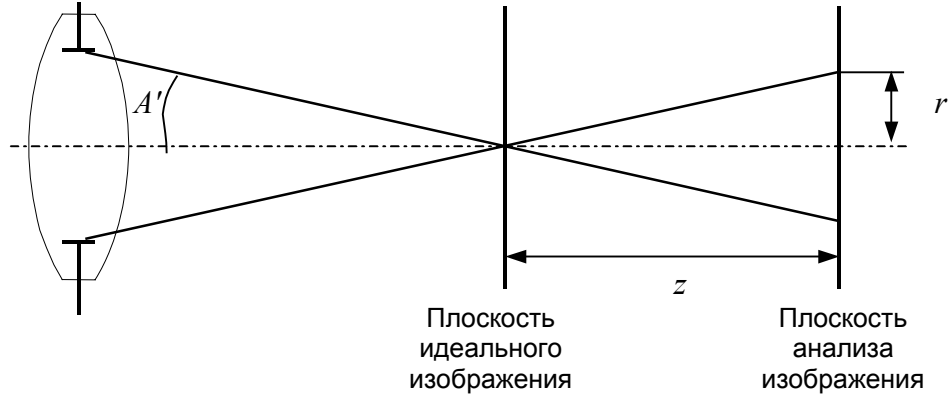


Рис. 3.16 Определение параметров расфокусировки

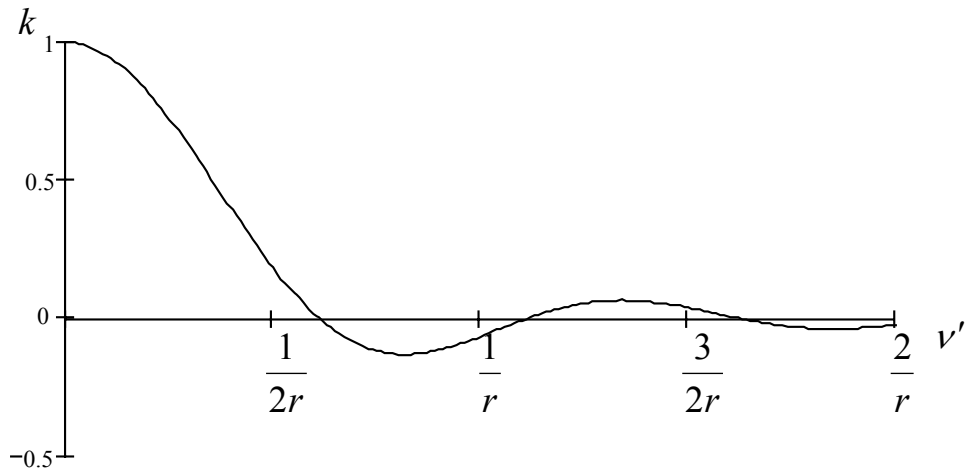


Рис. 3.17 Сечение ОПФ преобразователя, описывающего расфокусировку

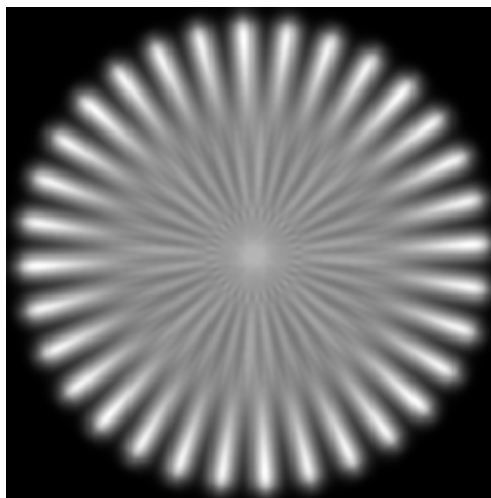


Рис. 3.18 Изображение радиальной миры при наличии расфокусировки

График ОПФ (Рис. 3.17) пересекает ось частот в точках $0.61/r$, $1.12/r$ и так далее. Это значит, что гармонические предметы с этими частотами будут передаваться с нулевым контрастом. В некоторых областях частот значение контраста является отрицательным. В изображении гармонических объектов этой частоты на месте темных полос отображаются светлые и наоборот. Это явление называется *обращение контраста* или «ложное» разрешение и наглядно проявляется в изображении такого тест объекта как радиальная мира (Рис. 3.18).

Астигматизм

По аналогии с преобразователем, описывающим расфокусировку, можно использовать преобразователь, описывающий астигматизм. Если плоскость анализа изображения находится в одном из фокусов (например, сагиттальном), то пятно рассеяния имеет вид линии, длина которой равна произведению астигматического отрезка на удвоенное значение апертуры в меридиональном направлении (Рис. 3.19), то есть $d = \Delta z \cdot 2A'$.

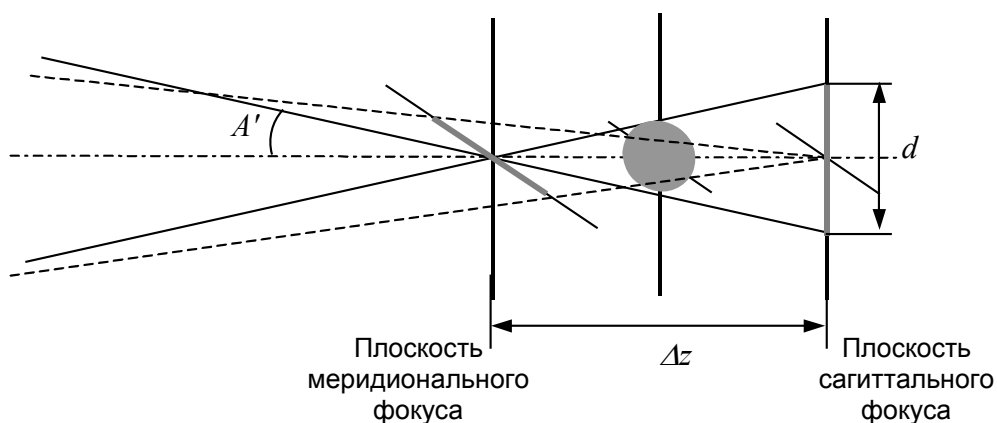


Рис. 3.19 Определение параметров астигматизма

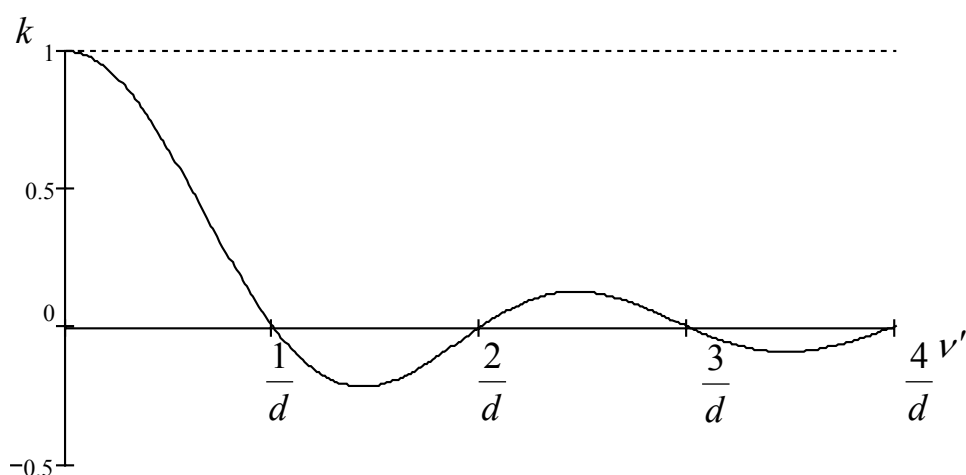


Рис. 3.20 Горизонтальное (—) и вертикальное (— —) сечения ОПФ преобразователя, описывающего астигматизм

В этом случае ФРТ преобразователя определяется следующим образом:

$$h(x', y') = \frac{1}{d} \cdot \text{rect}\left(\frac{x'}{d}\right) \cdot \delta(y'). \quad (3.60)$$

По теореме о функции с разделёнными переменными [6, 12] можно определить ОПФ преобразователя при анализе изображения в плоскости сагиттального фокуса:

$$D(v'_x, v'_y) = \text{sinc}(\pi d v'_x). \quad (3.61)$$

На рисунке 3.20 представлены центральные сечения ОПФ преобразователя, описывающего астигматизм при анализе изображения в плоскости сагиттального фокуса. Как видим, в этом случае вертикально ориентированные предметы будут передаваться без потери контраста.

Если плоскость анализа изображения совпадает с плоскостью меридионального фокуса, то получаем аналогичные выражения, в которых переменные координат меняются местами. Если плоскость анализа расположена посередине между плоскостями меридионального и сагиттального фокусов, то получаем ситуацию подобную расфокусировке.

Смещение изображения

Пусть изображающая система представляет собой каскад, состоящий из оптической системы и некоторого приёмника изображения. Оптическая система создает на поверхности светочувствительного приёмника распределение интенсивности $I'(x', y')$. Регистрация изображения происходит в течение промежутка времени, который называется *выдержкой*. В результате каждый элемент приёмника воспринимает величину, которая называется *экспозицией*:

$$I'_r(x', y') = \int_0^T I'(x', y', t) dt, \quad (3.62)$$

где T – выдержка или время экспозиции.

Рассмотрим случай, когда за время T изображение смещается. Это может произойти, если предмет или приёмник изображения движется относительно оптической системы. Пусть каждая точка изображения смещается по определённому закону – по определённой траектории. Опишем траекторию движения в параметрической форме:

$$x' = d_x(t), \quad y' = d_y(t), \quad (3.63)$$

где $d(t)$ – закон, определяющий траекторию движения. Тогда ФРТ преобразователя, описывающего смещение, определяется выражением:

$$h(x', y') = \int_0^T \delta(x' - d_x(t), y' - d_y(t)) dt. \quad (3.64)$$

Таким образом, пятно рассеяния будет представлять собой тонкую линию, повторяющую траекторию движения [10, 17]. Интенсивность линии будет изменяться обратно пропорционально скорости движения.

Чтобы получить ОПФ, описывающую смещение изображения, равную единице при $v' = 0$, следует нормировать выражение на время выдержки T :

$$D(v'_x, v'_y) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i [v'_x d_x(t) + v'_y d_y(t)]} dt. \quad (3.65)$$

Полученное выражение представляет собой ОПФ преобразователя, описывающего смещение изображения с произвольной траекторией движения. Рассмотрим частные случаи смещения изображения.

Смаз

Наиболее простым и часто возникающим случаем смещения изображения является равномерное прямолинейное смещение, которое так же называется смазом. Смаз появляется тогда, когда в момент выдержки объект движется относительно оптической системы равномерно и прямолинейно (например, при аэрофотографии с малых высот).

Предположим, что смещение происходит вдоль направления x (в других случаях всегда можно повернуть систему координат). Тогда, $d_y(t) = 0$, а $d_x(t) = tv$, где v – скорость перемещения. Пятно рассеяния в этом случае представляет собой отрезок прямой линии равномерной интенсивности, длина которого равна величине сдвига за время выдержки, то есть $d = tv$. ФРТ преобразователя, описывающего смаз, можно записать следующим образом:

$$h(x', y') = \frac{1}{d} \cdot \text{rect}\left(\frac{x'}{d}\right) \cdot \delta(y'). \quad (3.66)$$

ОПФ преобразователя данного типа определяется выражением:

$$D(v'_x, v'_y) = \text{sinc}(\pi d v'_x). \quad (3.67)$$

Таким образом, сечение ОПФ смаза в направлении движения резко падает и становится равной нулю на частоте $1/d$. Затем происходит обращение контраста. Характерно так же то, что функция не финитна, а убывает, осциллируя между нулями.

Вибрация

При формировании изображении в реальных условиях очень распространен тип смещения изображения, который проявляется при вибрации оптической системы. При вибрации совершается возвратно-поступательное движение по гармоническому закону. Пусть изображение движется гармонически по плоскости анализа в одном направлении, например в направлении x . Тогда траекторию движения можно описать следующим образом:

$$d_x(t) = \frac{a}{2} \cdot \cos(\omega t), \quad (3.68)$$

где $a/2$ – амплитуда колебаний, а ω – циклическая частота. Воспользуемся выражением (3.65) для определения ОПФ:

$$D(v'_x, v'_y) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{2\pi i v'_x \frac{a}{2} \cos(\omega t)} dt. \quad (3.69)$$

Если предположить, что период вибрации значительно меньше времени выдержки, то будем наблюдать такое же изображение, как если бы за время выдержки происходил один период вибрации. Тогда в интеграле (3.69) можно заменить переменные и интегрировать не по времени выдержки, а по периоду колебаний:

$$D(v'_x, v'_y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pi i v'_x a \cos(\varphi)} d\varphi, \quad (3.70)$$

где $\varphi = \omega t$. Этот интеграл равен функции Бесселя [4]:

$$D(v'_x, v'_y) = J_0(\pi a v'_x). \quad (3.71)$$

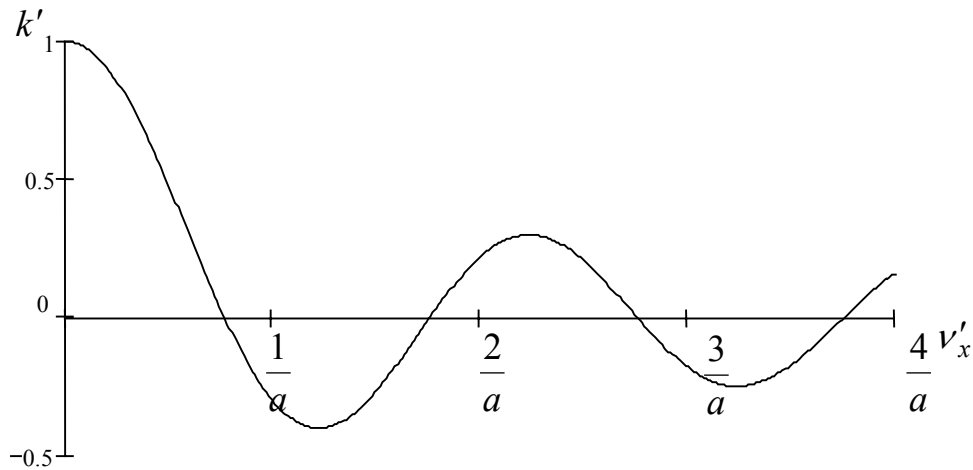


Рис. 3.21 Сечение ОПФ преобразователя, описывающего вибрацию в направлении x

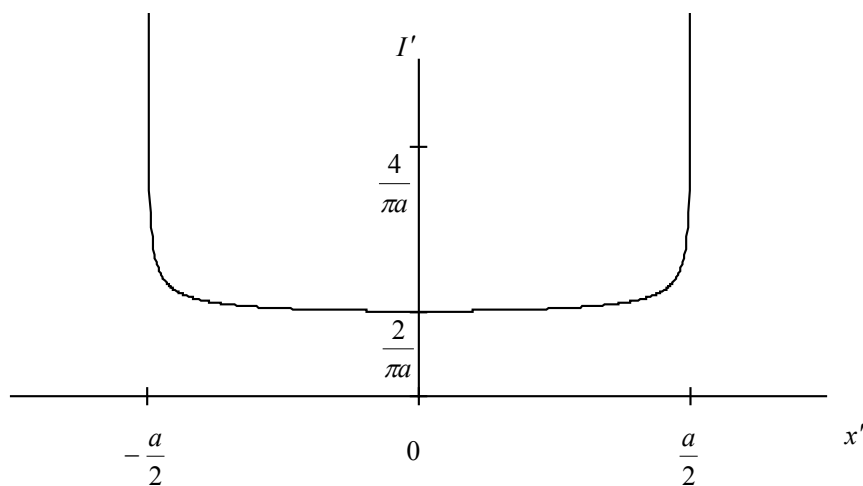


Рис. 3.22 Сечение ФРТ преобразователя, описывающего вибрацию в направлении x

Как видно из графика ОПФ (Рис. 3.21), так же, как и в случае смаза, в направлении вибрации ОПФ резко падает и становится равной нулю на частоте $0.77/a$. Затем происходит обращение контраста.

ФРТ преобразователя, описывающего вибрацию, можно определить как обратное преобразование Фурье от ОПФ:

$$h(x', y') = \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x'}{a}\right)^2}}. \quad (3.72)$$

Таким образом, в случае вибрации пятно рассеяния (Рис. 3.22) представляет собой отрезок прямой с длиной a и неравномерным распределением интенсивности (яркость краёв существенно выше яркости средней части).

Двоение

В виде отдельного преобразования может быть описано такое искажение, как двоение изображения, которое возникает, например, при ошибке углов призмы с крышей. Пятно рассеяния при двоении имеет вид двух светящихся точек расположенных на расстоянии d . ФРТ такого преобразователя можно представить в виде двух дельта-функций:

$$h(x, y) = \frac{1}{2} \left(\delta\left(x - \frac{d}{2}\right) + \delta\left(x + \frac{d}{2}\right) \right). \quad (3.73)$$

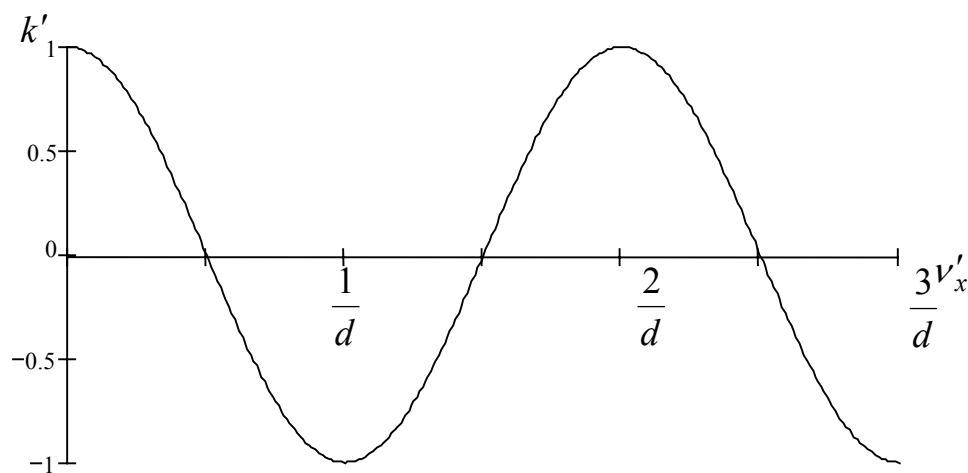


Рис. 3.23 Сечение ОПФ преобразователя, описывающего двоение

Выражение для ОПФ преобразователя, описывающего двоение, имеет следующий вид:

$$D(v'_x, v'_y) = \frac{1}{2} \left(e^{2\pi i v'_x \frac{d}{2}} + e^{-2\pi i v'_x \frac{d}{2}} \right) = \cos(\pi v'_x d). \quad (3.74)$$

На рисунке 3.23 представлено сечение этой функции. ОПФ резко падает и становится равной нулю на частоте $0.5/d$. Затем происходит полное обращение контраста.

Матричный приёмник изображения

В настоящее время для регистрации изображений широко используются электронные приёмники изображения, которые имеют матричную структуру [25]. Такие приёмники преобразуют непрерывный сигнал в дискретный и не являются изопланатическими, так как при смещении предмета изображение не только смещается, но может изменить свою структуру. Поэтому при моделировании изображающих систем нельзя однозначно описать матричный приёмник ФРТ или ОПФ и включить их в эквивалентные характеристики всего каскада преобразователей. Процесс регистрации изображения на матричном приёмнике следует рассматривать отдельно.

При моделировании регистрации изображения следует учитывать целый ряд характеристик матричного приёмника. Для оценки передачи структуры зарегистрированного изображения по сравнению с воздушным изображением, сформированным оптической системой, можно ограничиться геометрическими параметрами. Геометрия матричного приёмника (Рис. 3.24) определяется размерами отдельных ячеек ($d_x \times d_y$) и шагом между ними ($\Delta x \times \Delta y$).

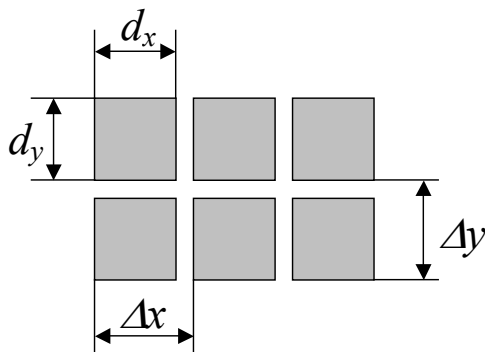


Рис. 3.24 Геометрическая структура матричного приёмника

Моделирование изображения зарегистрированного матричным приёмником можно осуществить, если представить этот процесс как сканирование объекта прямоугольной ячейкой с размерами $d_x \times d_y$ [17]. При этом предполагается, что сканирующая ячейка «включается» только в определённые моменты времени с некоторой периодичностью, когда координаты кратны Δx и Δy соответственно. Таким образом, матричный приёмник преобразует непрерывный сигнал в дискретный и интегрирует его в пределах своих площадок, то есть осуществляется дискретизация. Этот процесс можно описать математически следующим образом.

Пусть входной сигнал $I'_o(x', y')$ для данного преобразователя известен. Тогда, во-первых, осуществляется свёртка входного сигнала с импульсной реакцией $h_m(x', y')$ прямоугольной ячейки размером $(d_x \times d_y)$.

$$I'_1(x', y') = I'_o(x', y') \otimes h_m(x', y'). \quad (3.75)$$

Так как ячейки расположены не плотно, а с шагами Δx и Δy , то импульсная реакция $h_m(x', y')$ определяется следующим соотношением:

$$h_m(x', y') = \text{rect}(d_x, d_y) \otimes \text{sinc}\left(\frac{\pi x'}{\Delta x}, \frac{\pi y'}{\Delta y}\right). \quad (3.76)$$

Отсюда можно определить ОПФ первого этапа преобразования:

$$D_m(v'_x, v'_y) = \text{sinc}(\pi d_x v'_x, \pi d_y v'_y) \cdot \text{rect}(\Delta x v'_x, \Delta y v'_y). \quad (3.77)$$

Во-вторых, производится дискретизация путём домножения сигнала $I'_1(x', y')$ на функцию гребёнки отмасштабированную так, чтобы максимумы были расположены с периодами Δx и Δy :

$$I'_2(x', y') = I'_1(x', y') \cdot \text{comb}\left(\frac{x'}{\Delta x}, \frac{y'}{\Delta y}\right). \quad (3.78)$$

Затем выходной сигнал $I'_2(x', y')$ следует ограничить домножением на функцию $\text{rect}\left(\frac{x'}{N \cdot \Delta x}, \frac{y'}{M \cdot \Delta y}\right)$, где N и M – количество элементов матричного приёмника в направлениях x' и y' соответственно.

В последнюю очередь при необходимости выполняется интерполяция изображения. Этот этап можно описать в виде свёртки сигнала $I'_2(x', y')$ с интерполяционной функцией, в качестве которой можно использовать $\text{sinc}\left(\frac{\pi x'}{\Delta x}, \frac{\pi y'}{\Delta y}\right)$ или $\text{rect}\left(\frac{x'}{\Delta x}, \frac{y'}{\Delta y}\right)$. В первом случае будет восстановлен непрерывный сигнал, а во втором – выходной сигнал будет квантованным.

Выводы

С точки зрения теории сигналов работа изображающей системы заключается в преобразовании входного сигнала I (предмета) в выходной сигнал I' (изображение). Если абстрагироваться от конкретного физического смысла предмета и изображения и рассматривать их как функции обобщённых интенсивностей, то изображение представляет собой свёртку предмета с функцией импульсного отклика изображающей системы. Это справедливо, если для преобразователя выполняются условия линейности и изопланатичности.

Анализ формирования изображений с точки зрения теории сигналов позволяет использовать для оценки качества изображающей системы различные характеристики: функцию рассеяния точки, функцию рассеяния линии, функцию концентрации энергии, пограничную кривую. Ни одна из этих характеристик не позволяет наглядно описать передачу структуры предмета при формировании его изображения. Преодолеть этот недостаток позволяет частотное описание преобразование сигналов, в котором предмет представляется в виде совокупности элементарных гармонических предметов разной частоты и амплитуды. Как показано, гармонический предмет является собственной функцией изображающего оператора, который изменяет амплитуду такого предмета без изменения его частоты. В этом случае преобразование сигналов сводится к фильтрации, когда изображающая система

играет роль фильтра низких частот. Связь между частотными представлениями предмета и его изображения описывается оптической передаточной функцией. Таким образом, представленный подход позволяет объективно оценивать качество изображающей системы и формируемого ей изображения.

Подход к анализу изображающих систем, основанный на теории сигналов, позволяет рассмотреть формирование изображения каскадом последовательно расположенных линейных изопланатических преобразователей. Изображение, формируемое таким каскадом, может быть найдено как свёртка предмета с эквивалентным импульсным откликом каскада преобразователей. При использовании частотного описания спектр изображения может быть найден как произведение спектра предмета и эквивалентной оптической передаточной функции. Представление изображающей системы в виде каскада преобразователей позволяет легко решать практические задачи анализа сложных оптических приборов.

Вопросы

Что является входным сигналом и выходным сигналом для оптической системы как преобразователя сигналов?

В чём заключаются условия линейности и изопланатичности для изображающего оператора?

Что является импульсным откликом для оптической системы при когерентном и некогерентном освещении предмета?

Как интерпретировать входной и выходной сигнал при моделировании формирования самосветящихся и освещаемых предметов?

С какой целью и каким образом нормируется функция рассеяния точки?

Каким образом по ФРТ можно определить разрешающую способность оптической системы?

Что такое аподизация? Каким образом аподизация влияет на формирование изображения точки?

Каким образом на формирование изображения точки влияют aberrации?

В чём главное достоинство использования в качестве элементарного гармонического предмета?

Какой смысл имеет комплексная амплитуда гармонического предмета?

Что характеризует оптическая передаточная функция?

С какой целью и каким образом нормируется ОПФ?

Каким образом определяется контраст для гармонических предметов?

Как выглядит распределение интенсивности в изображении гармонического предмета, если контраст равен 0.5?

Можно ли оптическую систему назвать фильтром низких частот?

Каким образом на МПФ влияют осесимметричные и неосесимметричные aberrации?

Почему при анализе МПФ ограничиваются областью положительных частот?

Для каких целей используется критерий Фуко.

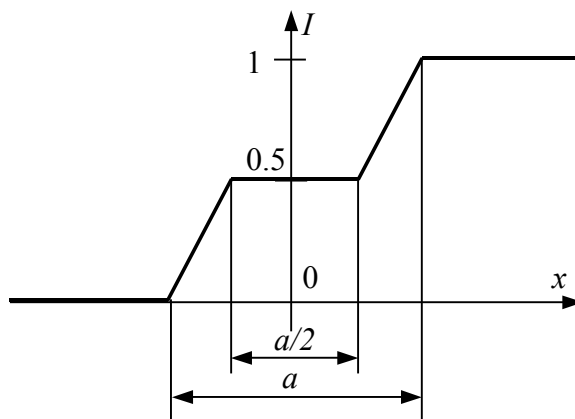
Каким образом определить распределение интенсивности на изображении, если оно формируется каскадом линейных преобразователей?

В чём заключается явление обращения контраста? При анализе каких преобразователей можно столкнуться с этим явлением?

Какой сигнал называется дискретным? Какой сигнал называется квантованным?

Задачи

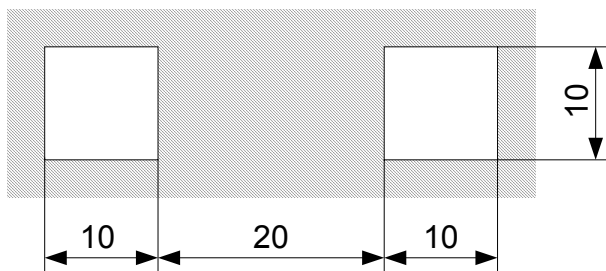
- 3.1. При какой частоте прямоугольной миры её изображение, создаваемое идеальной оптической системой, будет синусоидальным.
- 3.2. Доказать, что распределение интенсивности любого симметричного одномерного объекта можно восстановить, зная только модуль его спектра.
- 3.3. Доказать, что число Штреля определяется отношением площади ОПФ с абберациями к площади безабберационной ОПФ.
- 3.4. Для изображающей системы известна пограничная кривая:



Найти функцию рассеяния линии и оптическую передаточную функцию (описать математически и построить график).

- 3.5. Решить задачу восстановления функции рассеяния точки по известным для любого угла функциям рассеяния линии.
- 3.6. На спутнике-шпионе, летящем на высоте 300 км, предполагается установить телескоп, с помощью которого можно было бы читать заголовки газет (размер букв 2 см). Определить диаметр и фокусное расстояние объектива, если регистрация осуществляется на ПЗС-матрице с квадратными светочувствительными элементами размером 10 мкм.
- 3.7. У объектива с относительным отверстием 1:5 астигматический отрезок равен 1 мм. Построить ФРТ и ОПФ для трех случаев положения плоскости анализа (в меридиональном фокусе, в сагиттальном фокусе, в положении между ними).
- 3.8. Определить радиус в изображении радиальной миры (количество секторов 32), при котором происходит обращение контраста. Изображение, формируемое оптической системой с апертурой $A' = 0.1$ на длине волны 0.5 мкм, расфокусировано на величину $\lambda/3$.

- 3.9. Объектив с фокусным расстоянием 1 м имеет диафрагму с формой представленной на рисунке (размеры в мм):



С каким контрастом будут отображаться вертикальные и горизонтальные прямоугольные решётки с периодом 500, 250 и 100 мм, расположенные на расстоянии 5 км?

- 3.10. Изображение горизонтальной прямоугольной решётки, формируемое объективом с относительным отверстием 1:2 и квадратным зрачком, расфокусировано так, что имеет вид треугольной решётки с периодом 0.01 мм. Определить величину расфокусировки и период прямоугольной решётки, которая является предметом.
- 3.11. Съёмка производится с самолета, летящего со скоростью $v = 360$ км/ч на высоте 10 км. Используется объектив с квадратным зрачком, который имеет $f' = 100$ мм и $D/f' = 1:2$. Время экспозиции $t = 0.01$ с. Определить контраст периодического предмета с частотой на изображении 50 мм^{-1} , если объектив расфокусирован на величину $z = 0.01$ мм.
- 3.12. Объектив (относительное отверстие 1:5; $f' = 50$ мм), по качеству близкий к идеальному, проходит испытания на разрешающую способность. Как будет выглядеть формируемое им изображение радиальной миры ($d = 100$ мм, $n = 125$), расположенное на расстоянии 5 м?

Глава 4. Компьютерное моделирование формирования изображений

Все модели неправильны, но некоторые из них полезны.

Джордж Бокс

4.1. Принципы дискретизации функций

Для осуществления компьютерного моделирования формирования изображений необходимо перейти от непрерывных функций к их дискретному представлению. Наиболее простым и удобным способом дискретизации двумерных функций является представление в виде выборочных значений, взятых в узлах равномерной прямоугольной сетки [6]. Математически такой способ дискретизации функции $g(x, y)$ можно описать следующим образом:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \text{comb}\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \cdot \text{comb}\left(\frac{y}{\Delta y}\right) \cdot g(x, y) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - m \cdot \Delta x, y - n \cdot \Delta y) \cdot g(x, y), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $G(x, y)$ – дискретное представление функции $g(x, y)$, Δx и Δy – шаги дискретизации вдоль декартовых осей, m и n – произвольные целые числа. Так как функция $G(x, y)$ имеет ненулевые значения только в узлах сетки, такое дискретное представление можно заменить *выборкой* G_{mn} , то есть двумерным массивом, элементы которого содержат значения функции в выборочных точках. Пользуясь фильтрующим свойством дельта-функции выражение (4.1) можно записать следующим образом:

$$G(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{mn}. \quad (4.2)$$

Отсюда, значение элемента выборки G_{mn} с произвольными индексами m и n равно значению функции g в точке с координатами $(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta y)$.

При практическом решении задач на компьютере объём оперативной памяти жёстко ограничен, а значит, ограничено количество элементов выборки, которые можно разместить в памяти. Таким образом, в виде выборки можно представить только часть непрерывной функции $g(x, y)$. Чаще всего интерес представляет её центральная часть. Пусть $M + 1$ – количество элементов выборки вдоль направления x , а $N + 1$ – количество элементов выборки вдоль направления y . Дискретное представление центральной части функции $g(x, y)$ описывается следующей конечной суммой:

$$G(x, y) = \sum_{m=-M/2}^{M/2} \sum_{n=-N/2}^{N/2} g(m \cdot \Delta x, n \cdot \Delta y). \quad (4.3)$$

Для хранения выборок используются массивы, индексы элементов которых являются беззнаковыми целочисленными переменными. В этом случае начало координат выборки не совпадает с началом координат функции. Кроме того, при представлении функций в виде выборки чаще всего используется одинаковое количество элементов вдоль направлений x и y . Пусть для осуществления компьютерного моделирования формируется выборка функции размером $N \times N$ элементов. Тогда дискретное представление функции g выглядит следующим образом:

$$G(x, y) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} G_{mn} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} g \left(\left(m - \frac{N}{2} \right) \cdot \Delta x, \left(n - \frac{N}{2} \right) \cdot \Delta y \right). \quad (4.4)$$

В этом случае значение элемента выборки G_{mn} соответствует значению функции g в точке с координатами $\left(\left(m - \frac{N}{2} \right) \cdot \Delta x, \left(n - \frac{N}{2} \right) \cdot \Delta y \right)$.

При дискретизации функций и реализации алгоритмов моделирования формирования изображений необходимо обеспечить выполнение ряда требований. Во-первых, модель должна быть адекватной, то есть результат должен соответствовать происходящим явлениям с приемлемой точностью. И, во-вторых, модель должна быть экономичной, то есть количество выборок и элементов в них, размещённых в памяти одновременно, должно быть минимизировано. Основными факторами, определяющими адекватность численного моделирования, являются выбор размера шагов и количества элементов в выборках функций, участвующих в вычислениях. Выбор шага дискретизации не является произвольным, а осуществляется на основе *теоремы о выборке*, которая так же известна как теорема Уиттекера – Шеннона или теорема Котельникова [6]. Согласно этой теореме, любая двумерная функция с финитным фурье-образом однозначно определяется выборкой с шагами Δx и Δy , величина которых удовлетворяет неравенствам:

$$\Delta x \leq \frac{1}{2\nu_x}; \quad \Delta y \leq \frac{1}{2\nu_y}, \quad (4.5)$$

где ν_x и ν_y – предельные частоты в фурье-образе этой функции. При этом функцию можно однозначно восстановить по её выборке G_{mn} следующей интерполяцией:

$$g(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G_{mn} \cdot \text{sinc} \left(\pi \frac{x - m \cdot \Delta x}{\Delta x} \right) \cdot \text{sinc} \left(\pi \frac{y - n \cdot \Delta y}{\Delta y} \right). \quad (4.6)$$

При моделировании формирования изображений как раз имеют дело с выборками функций и выборками их фурье-образов. Таким образом, неравенства (4.5) являются определяющими при выборе шагов дискретизации функций и их фурье-образов.

Пусть количество элементов в выборках функции и её фурье-образа одинаково. Если фурье-образ функции существует в прямоугольной области с границами $[-\nu_x, \nu_x]$ и $[-\nu_y, \nu_y]$, то можно записать следующие равенства:

$$2v_x = R_{vx} = N \cdot \Delta v_x; 2v_y = R_{vy} = N \cdot \Delta v_y, \quad (4.7)$$

где R_{vx} и R_{vy} – размеры области существования фурье-образа функции в соответствующих направлениях, Δv_x и Δv_y – шаги дискретизации фурье-образа, N – количество точек в выборках вдоль каждого направления. Подставляя (4.7) в (4.5), можно записать соотношения, позволяющие определять шаги дискретизации функций и их фурье-образов:

$$\Delta x \leq \frac{1}{N \cdot \Delta v_x}; \Delta y \leq \frac{1}{N \cdot \Delta v_y}. \quad (4.8)$$

Таким образом, шаги дискретизации функции и её фурье-образа связаны с количеством элементов в выборках, не могут выбираться произвольно и должны удовлетворять соотношениям (4.8).

Рассмотрим подготовку выборок функций участвующих в моделировании формирования изображения предмета в проходящем свете (Рис. 4.1). Исходными данными для моделирования являются функция распределения яркости по источнику $B(\xi_x, \xi_y)$, функция комплексного пропускания предмета $T(\eta_x, \eta_y)$ и зрачковая функция $f(\rho_x, \rho_y)$.

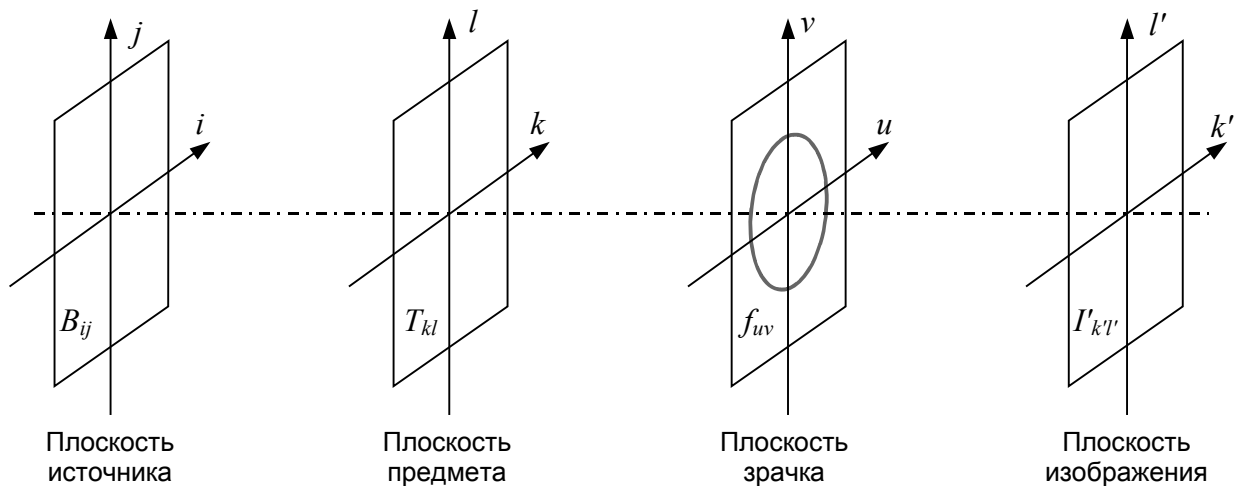


Рис. 4.1 Дискретная модель формирования изображения в проходящем свете

Функция распределения яркости по источнику $B(\xi_x, \xi_y)$ должна быть представлена в виде двумерной выборки B_{ij} с шагами $\Delta \xi_x$ и $\Delta \xi_y$ по каноническим координатам на источнике, функция комплексного пропускания предмета $T(\eta_x, \eta_y)$ – в виде выборки T_{kl} с шагами $\Delta \eta_x$ и $\Delta \eta_y$ по предметным каноническим координатам, а зрачковая функция $f(\rho_x, \rho_y)$ – в виде выборки f_{uv} с шагами $\Delta \rho_x$ и $\Delta \rho_y$ по зрачковым каноническим координатам. Для моделирования распространения поля через оптическую систему функция комплексного пропускания так же должна быть представлена в виде выборки U_{mn} . В результате вычислений должна быть получена выборка распределения

интенсивности на изображении $I'_{k\eta'}$ с шагами $\Delta\eta'_x$ и $\Delta\eta'_y$ по каноническим координатам на изображении.

Для моделирования формирования изображений и анализа качества оптических систем используются выборки других функций. В таблице 4.1 перечислены основные функции, обозначения, используемые для их выборок, размерность и тип хранимых в выборке данных.

Таблица 4.1 Функции и характеристики их выборок

Функция	Обозначение выборки	Размерность выборки	Тип данных в выборке
Комплексная амплитуда поля	U_{mn}	Двумерная	Комплексный
Распределение яркости по источнику	B_{ij}	Двумерная	Вещественный
Комплексное пропускание предмета	T_{kl}	Двумерная	Комплексный
Зрачковая функция	f_{uv}	Двумерная	Комплексный
Распределение интенсивности	I_{kl}	Двумерная	Вещественный
Функция рассеяния точки	h_{kl}	Двумерная	Вещественный
Функция концентрации энергии	E_d	Одномерная	Вещественный
Функция рассеяния линии	S_k	Одномерная	Вещественный
Оптическая передаточная функция	D_{qr}	Двумерная	Комплексный
Модуляционная передаточная функция	M_{qr}	Двумерная	Вещественный
Фазовая передаточная функция	Φ_{qr}	Двумерная	Вещественный

Пусть выборки функций, участвующих в моделировании, являются квадратными с размером $N \times N$, где N – количество узлов дискретизации в одном направлении. Тогда, $R_\xi = N \cdot \Delta\xi$ – размер области определения функции распределения яркости по источнику, $R_\eta = N \cdot \Delta\eta$ – размер области определения функции комплексного пропускания предмета, $R_\rho = N \cdot \Delta\rho$ – размер области определения зрачковой функции, $R'_{\eta'} = N \cdot \Delta\eta'$ – размер области определения функции распределения интенсивности на изображении.

В канонических координатах плоскость источника и плоскость зрачка имеют одинаковый масштаб, то есть:

$$\Delta\xi_x = \Delta\rho_x; \Delta\xi_y = \Delta\rho_y. \quad (4.9)$$

Комплексная амплитуда поля на входной поверхности определяется преобразованием Фурье комплексной амплитуды поля на предмете. В

соответствии с теоремой о выборке шаг дискретизации по зрачковым координатам связан с шагом по предметным координатам следующим образом:

$$\Delta\eta_x = \frac{1}{N \cdot \Delta\rho_x}; \Delta\eta_y = \frac{1}{N \cdot \Delta\rho_y}. \quad (4.10)$$

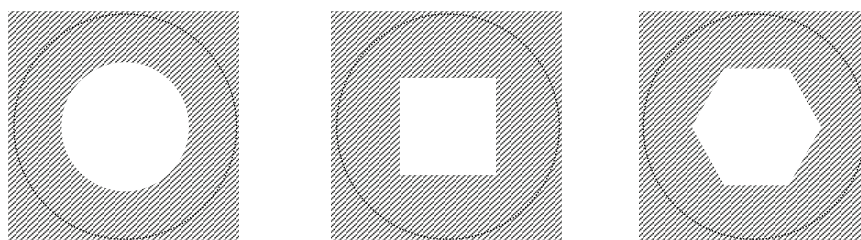
Канонические координатные системы входной и выходной поверхности оптической системы равны по определению, а значит:

$$\Delta\rho_x = \Delta\rho'_x; \Delta\rho_y = \Delta\rho'_y. \quad (4.11)$$

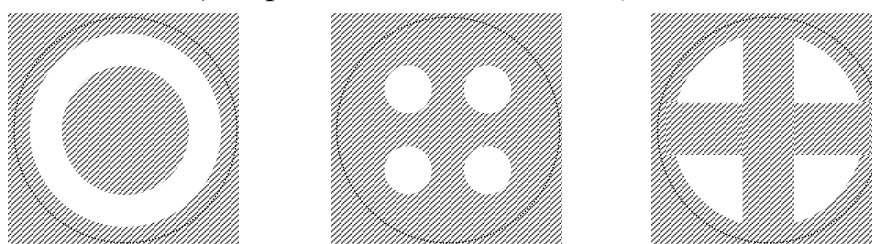
Комплексная амплитуда поля на выходной поверхности связана комплексной амплитудой поля на изображении обратным преобразованием Фурье. По теореме о выборке шаги дискретизации по каноническим координатам на изображении и на выходной поверхности связаны соотношениями:

$$\Delta\eta'_x = \frac{1}{N \cdot \Delta\rho'_x}; \Delta\eta'_y = \frac{1}{N \cdot \Delta\rho'_y}. \quad (4.12)$$

Таким образом, для дискретизации всех функций, участвующих в моделировании, достаточно определить шаги по предметным координатам ($\Delta\eta_x$ и $\Delta\eta_y$) и шаги по зрачковым координатам ($\Delta\rho_x$ и $\Delta\rho_y$). Остальные параметры дискретизации функций определяются в соответствии с соотношениями (4.9 – 4.12).



а) Варианты осевого освещения



б) Варианты внеосевого освещения

Рис. 4.2 Типовая форма источника освещения

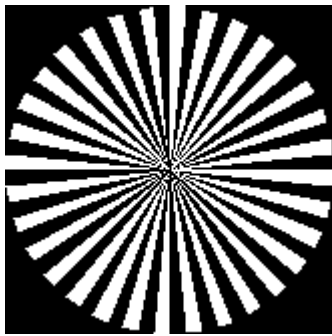
Форма и размеры элементов эффективного источника освещения, элементов предмета, отверстий и экранов в плоскости апертурной диафрагмы можно описать с использованием набора геометрических примитивов: прямоугольников, многоугольников, кругов и других. По таким описаниям можно сформировать выборки исходных функций, решив простую геометрическую задачу попадания точки в ту или иную область на плоскости в соответствующей системе координат.

При моделировании формирования изображения освещаемых предметов должна быть реализована возможность моделирования источников типовых форм и произвольных размеров. На рисунке 4.2 представлены типовые формы осевых (а) и внеосевых (б) источников, создающих на плоскости предмета частично когерентное освещение с различными свойствами. Пунктирной линией отображен круг, который в канонических координатах имеет единичный радиус. Элементы выборки функции распределения яркости по источнику, расположенные в заштрихованной области, должны иметь нулевые значения. Значение остальных элементов определяются в соответствии со следующим выражением:

$$B_{ij} = B((i - N/2) \cdot \Delta\xi_x, (j - N/2) \cdot \Delta\xi_y). \quad (4.13)$$

При исследовании формирования изображения в качестве тест-объектов обычно используются простейшие геометрические примитивы: точка, прямоугольник, ломаная линия произвольной толщины, круг. Для исследования характеристик качества оптических систем используются специальные тест-объекты: радиальная и штриховая миры (Рис. 4.3). Любой объект можно описать набором простейших геометрических примитивов, расположенных определённым образом и имеющих определённые размеры. Если узел выборки попадает в область предмета, то значение соответствующего элемента выборки функции комплексного пропускания предмета определяются следующим образом:

$$T_{kl} = T((k - N/2) \cdot \Delta\eta_x, (l - N/2) \cdot \Delta\eta_y). \quad (4.14)$$



а) Радиальная ми́ра



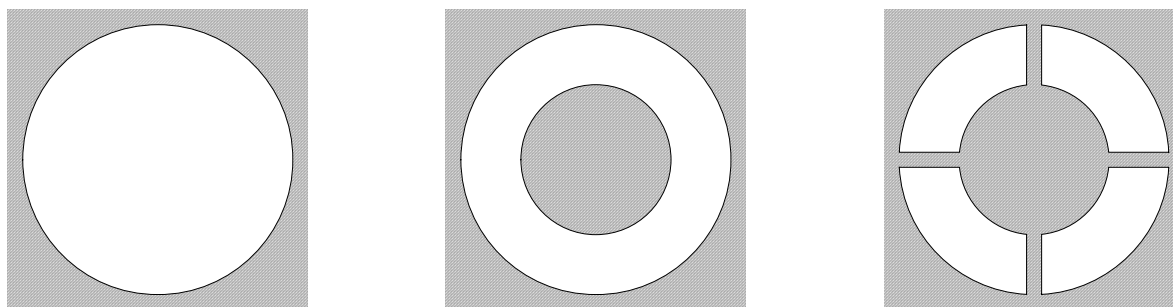
б) Штриховая ми́ра

Рис. 4.3 Типовая форма тест-объекта

Описание формы апертурной диафрагмы осуществляется аналогично с использованием простейших геометрических примитивов. На рисунке 4.4 представлены типовые формы апертурной диафрагмы, которые могут использоваться для описания ограничения поля при моделировании большинства реальных оптических систем. Элементы выборки зрачковой функции, расположенные в заштрихованной области, должны иметь нулевые значения. Значение остальных элементов определяются в соответствии с выражением:

$$f_{uv} = f((u - N/2) \cdot \Delta\rho_x, (v - N/2) \cdot \Delta\rho_y). \quad (4.15)$$

Для моделирования оптических систем с учётом их aberrаций перед формированием выборки зрачковой функции необходимо создать выборку функции волновой aberrации W_{uv} .



а) Круглая диафрагма

б) Диафрагма с экранированием

в) Диафрагма с экранированием и спайдерами

Рис. 4.4 Типовая форма апертурной диафрагмы

Функция волновой aberrации обычно представляется в виде разложения по ортогональным полиномам Цернике [3, 15]. Разложение по полной системе полиномов Цернике p -го порядка в полярных координатах имеет следующий вид:

$$W(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^n c_{nm} R_n^m(\rho) \cos(m\varphi) + \sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^n s_{nm} R_n^m(\rho) \sin(m\varphi), \quad (4.16)$$

где $m + n$ – чётное число, $\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}$, $\varphi = \arcsin(\rho_x/\rho) = \arccos(\rho_y/\rho)$, $R_n^m(\rho)$ – радиальные полиномы Цернике, c_{nm} и s_{nm} – коэффициенты разложения, которые служат общим численным представлением aberrаций оптической системы. При формировании выборки функции волновой aberrации необходимо иметь значения полиномов Цернике, то есть значения радиальных полиномов $R_n^m(\rho)$, значения синусов и косинусов углов, кратных φ , в каждом узле сетки дискретизации.

Таблица 4.2 Aberrации оптических систем, описываемые с использованием полиномов Цернике

Вид aberrации	Выражение для волновой aberrации
Ошибка увеличения	$c_{11} \cdot \rho \cdot \cos(\varphi)$
Расфокусировка	$c_{20} \cdot (2\rho^2 - 1)$
Астигматизм	$c_{22} \cdot \rho^2 \cdot \cos(2\varphi)$
Кома 3-го порядка	$c_{31} \cdot (3\rho^3 - 2\rho) \cdot \cos(\varphi)$
Сферическая aberrация 3-го порядка	$c_{40} \cdot (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$

Если моделируется влияние отдельных видов aberrаций центрированной оптической системы, то используется только косинусные составляющие разложения, а значения полиномов можно вычислить напрямую с использованием выражений, приведённых в таблице 4.1. Для повышения скорости формирования выборки функции волновой aberrации следует учитывать свойства симметрии полиномов Цернике: косинусные полиномы являются чётными функциями, а синусные – нечётными. Поэтому, достаточно вычислить значения полиномов в узлах сетки только для половины зрачка, а затем скопировать значения в симметричные узлы второй половины с соответствующим знаком.

Для построения полной aberrационной модели реальной оптической системы вычисление значений радиальных полиномов следует организовать с использованием трёхчленного рекуррентного соотношения Форсайта [15].

4.2. Шаг дискретизации и количество элементов в выборках

Выражения (4.9 – 4.12) описывают соотношения между величинами шагов дискретизации и количеством элементов в выборках, но не определяют их конкретные значения. Величины шагов дискретизации по координатам на источнике, зрачковым и предметным координатам должны быть выбраны так, чтобы обеспечить адекватное моделирование и решение исследовательской задачи. Рассмотрим выбор шагов дискретизации и количества элементов при решении некоторых практических задач.

При проектировании оптических систем одной из задач является вычисление и анализ такой характеристики качества как ФРТ. Исходными данными для вычисления ФРТ является зрачковая функция, которая должна быть представлена в дискретном виде. Согласно (4.10), шаг по зрачковым координатам должен удовлетворять условию:

$$\Delta\rho \leq \frac{1}{N \cdot \Delta\eta'} = \frac{1}{R_{\eta'}}, \quad (4.17)$$

где $R_{\eta'}$ – предельный размер ФРТ. Как известно дифракционная ФРТ отлична от нуля на всей поверхности изображения, поэтому, строго говоря, и при любом выборе шаг $\Delta\rho$ вычисление не может дать теоретически точные значения ФРТ. Но при решении практических задач можно рассмотреть только центральную область ФРТ, а энергию за её пределами считать равной 0. Как показывает практика, в большинстве случаев основная энергия ФРТ (94–96%) содержится в области, размеры которой примерно равны 5 каноническим единицам ($R_{\eta'} \approx 5$) [15, 17]. Таким образом, величина шага по зрачковым координатам должна быть менее 0.2 канонических единиц ($\Delta\rho \leq 0.2$).

Определим количество элементов в выборке при вычислении ФРТ. Для этого найдём величину шагов дискретизации по координатам на изображении. При любых aberrациях в изображении точки сохраняется дифракционный узор с шагом порядка 0.5 предметной канонической единицы [17]. Для корректного

описания ФРТ необходимо чтобы шаг по координатам на изображении был хотя бы в два раза меньше этой величины ($\Delta\eta' \leq 0.25$).

Определить шаг по предметным координатам можно по-другому – исходя из свойств ОПФ. Известно, что ОПФ оптической системы – это финитная функция, размеры которой равны $R_\nu = 4$ [17]. Так как ОПФ является фурье-образом ФРТ, шаги дискретизации по координатам на изображении и частотным координатам связаны соотношением:

$$\Delta\eta' \leq \frac{1}{N \cdot \Delta\nu} = \frac{1}{R_\nu}. \quad (4.18)$$

Тогда, шаг по координатам на изображении должен удовлетворять соотношению: $\Delta\eta' \leq 0.25$. Шаг большего размера приведёт к тому, что ОПФ просто не поместится в выборку.

Как видим, оба подхода не противоречат друг другу и определяют верхнюю границу величины шага по предметным координатам ($\Delta\eta' \leq 0.25$). При этом размер области R_ρ (охват зрачка), которая должна быть представлена в виде выборки, определяется соотношением: $R_\rho \geq 4$. В канонических координатах круглый зрачок имеет единичный радиус. Таким образом, область определения выборки зрачковой функции всегда должна быть, по крайней мере, в два раза больше самого зрачка.

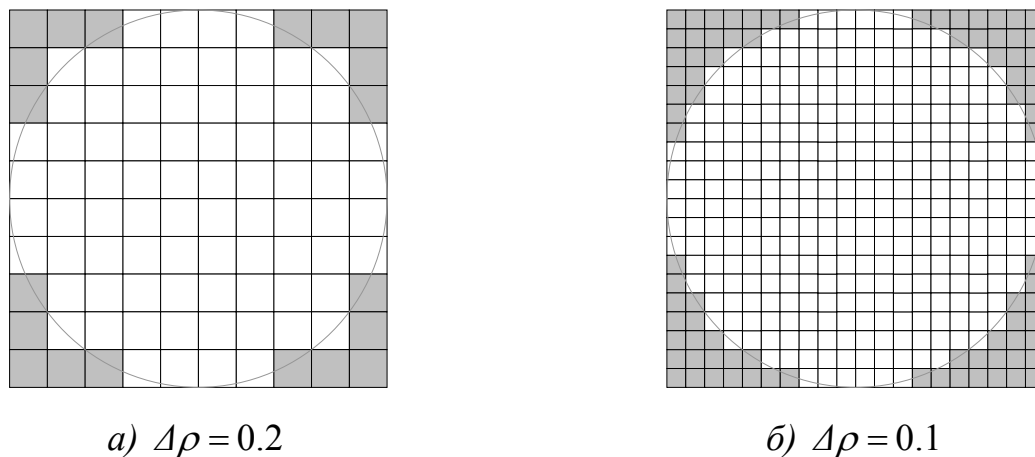


Рис. 4.5 Расположение точек в выборке, описывающей круглую диафрагму

Нетрудно определить, что при $\Delta\rho = 0.2$ и $\Delta\eta' = 0.25$ количество элементов в выборках составляет $N = 20$. Такого количества элементов достаточно, чтобы обозначить характер ФРТ, но для полноценного анализа и визуализации пятна рассеяния этого не достаточно. Для анализа ФРТ безаберрационной оптической системы шаг по зрачковым координатам можно оставить тем же ($\Delta\rho = 0.2$), а количество элементов в выборке увеличить, например, в 3 раза ($N = 60$). Тогда, шаг по координатам на изображении $\Delta\eta = 0.083$, а охват зрачка $R_\rho = 12$. В этом случае на центральное сечение зрачка приходится только 10 точек, что совершенно недостаточно для анализа оптических систем с aberrациями, так как зрачковая функция становится осциллирующей. Недостаточное количество

точек равномерной прямоугольной сетки плохо описывает круглую форму диафрагмы (Рис. 4.5), что, несомненно, влияет на результаты вычислений.

При наличии аберраций размеры области R_{η} , в которой содержится основная энергия ФРТ ($\approx 95\%$), увеличиваются. При наличии аберраций ФРТ существует в области, размеры которой определяются выражением [15]:

$$R_{\eta'} \approx 2\eta'_g + 5, \quad (4.19)$$

где η'_g – радиус геометрического пятна рассеяния. Таким образом, шаг по зрачковым координатам необходимо изменять. Компромиссным решением будет уменьшение величины шага по зрачковым координатам хотя бы в 2 раза ($\Delta\rho = 0.1$). При $N = 60$ величина шага по предметным координатам $\Delta\eta = 0.167$.

При моделировании формирования частично когерентного изображения существенное влияние на итоговое распределение интенсивности будет оказывать форма и размер эффективного источника, который характеризуется коэффициентом когерентности σ . На практике показано, что допуск на эффективные размеры и асимметрию источника может быть порядка $\Delta\sigma \approx 0.1$, то есть такое изменение коэффициента когерентности не оказывает ощутимого влияния на итоговое распределение интенсивности на изображении. Тогда шаг по координатам на источнике, а значит и по зрачковым координатам, так как они в канонической системе накладываются в одном масштабе, должен быть не более этой величины:

$$\Delta\xi = \Delta\rho \leq 0.1. \quad (4.20)$$

При моделировании формирования изображения в оптических системах с экранированием величины шагов по зрачковым координатам необходимо выбрать так, чтобы их было достаточно для учёта влияния формы и размеров на формирование изображения и учёта аберраций оптической системы. В качестве примера можно привести оптическую систему с экранированием, в которой на структуру изображения оказывают влияние, попадающие в световой пучок конструкционные элементы – спайдеры (Рис. 4.4, в). В этом случае шаг по зрачковым координатам должен быть не более размера спайдера ($\Delta\rho \leq 0.02$).

Таким образом, для обеспечения адекватности моделирования для выбора шагов дискретизации следует осуществлять анализ свойств моделируемых функций. Полезным может оказаться как оценка их предельных размеров, так и размеры минимальных элементов. Обратная взаимосвязь шагов дискретизации по предметным и зрачковым координатам усложняет выбор их конкретных значений. Возникающие при этом проблемы часто решаются путём увеличения количества элементов в выборках.

Для размещения в оперативной памяти выборки комплексных чисел с двойной точностью и размером 60×60 элементов необходимо около 56 килобайт. Увеличение размеров выборки приводит к существенному увеличению объёма оперативной памяти, требуемому для моделирования. Например, выборка комплексных чисел размером 1000×1000 элементов требует для своего размещения около 16 мегабайт оперативной памяти. Как видно из представленных выше моделей и алгоритмов одновременно в

оперативной памяти компьютера должно быть размещено несколько выборок, большинство из которых содержит комплексные данные. Это предъявляет жёсткие требования к распределению данных в оперативной памяти и оптимизации вычислительных процессов.

4.3. Использование дискретного преобразования Фурье

Основными вычислительными операциями, которые выполняются при моделировании формирования изображений, являются элементарные поэлементные действия (сложение, умножение, определение модуля, аргумента и интенсивности комплексных значений), а также интегральные преобразования, в частности свёртка и преобразование Фурье. По теореме о свёртке преобразования Фурье вычисление интеграла свёртки так же сводится к определению фурье-образов функций, их перемножению и выполнению обратного преобразования Фурье. Так что роль процедуры вычисления преобразования Фурье при реализации компьютерного моделирования формирования изображений трудно переоценить.

При численной реализации непрерывные функции заменяются дискретными, а их интегральные преобразования – соответствующими суммами. Двумерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) выборки некоторой функции размером $N \times N$ описывается следующим выражением:

$$\tilde{f}_{mn} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{kl} \cdot e^{-2\pi i \frac{(km+ln)}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{kl} \cdot w_N^{(km+ln)}, \quad (4.21)$$

где $w_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ – экспоненциальный множитель. Обратное ДПФ определяется выражением:

$$f_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_{mn} \cdot e^{2\pi i \frac{(mk+nl)}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_{mn} \cdot w_N^{-(mk+nl)}. \quad (4.22)$$

Вычисление преобразования Фурье путём выполнения непосредственно суммирования является неэффективным. Для вычисления дискретного фурье-образа функций, как правило, используется один из так называемых алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ). Разработано большое количество быстрых алгоритмов для вычисления преобразования Фурье (алгоритм Кули-Тьюки, алгоритм Гуда-Томаса, алгоритм Винограда и другие [2, 28]), многие из которых реализованы в виде библиотек на различных языках программирования. Одной из наиболее эффективных и удобных в использовании библиотек является *FFTW* [24]. Существенное увеличение производительности вычислений в этой библиотеке достигается за счёт того, что во время выполнения выбирается наиболее подходящий алгоритм БПФ для данной аппаратной и программной среды. Это позволяет оптимизировать выполнение программ на различных платформах и использовать вычислительные ресурсы с максимальной эффективностью.

Свойства ДПФ таковы, что после выполнения вычислений нулевые отсчёты фурье-образа попадают в нулевой элемент выборки [8, 22]. Первые $N/2 - 1$ элементов выборки воспроизводят положительную частотную область фурье-образа, а следующие $N/2$ элементов соответствуют отрицательным частотам. Между тем, при работе с дискретными функциями и их фурье-образами удобнее получать выборку с обычным расположением элементов. Для этого необходимо выполнить циклическое смещение элементов на $N/2$. Кроме того, вообще желательно иметь возможность осуществлять произвольное (нецелочисленное) смещение положения элементов относительно начала координат. В частности, при моделировании формирования частично когерентного изображения это особенно важно, так как в соответствии с выражением (2.74) в вычислениях необходимо использовать фурье-образ функции комплексного пропускания предмета смещённый относительно зрачковой функции.

Преодолеть неудобства использования ДПФ позволяет его модификация, которая осуществляется на основе теоремы о сдвиге преобразования Фурье. Пусть сдвиг нулевого отсчёта функции относительно начала координат составляет $(k_s \cdot \Delta x, l_s \cdot \Delta y)$, а сдвиг нулевого отсчёта фурье-образа относительно начала его координат составляет $(m_s \cdot \Delta \nu_x, n_s \cdot \Delta \nu_y)$. Тогда дискретное представление прямого преобразования Фурье примет вид:

$$\tilde{f}_{mn} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{kl} \cdot w_N^{(k+k_s)(m+m_s)} w_N^{(l+l_s)(n+n_s)}. \quad (4.23)$$

Преобразование такого вида называется *сдвиговым дискретным преобразованием Фурье (СДПФ)* [22]. Введение параметров сдвига придаёт СДПФ свойства, которые сближают его с непрерывным преобразованием Фурье. Для получения фурье-образов с привычным расположением начала координат в центре выборки в соответствии с выражением (4.4) необходимо выполнить СДПФ с параметрами сдвига $k_s = N/2$, $l_s = N/2$ и $m_s = N/2$, $n_s = N/2$. СДПФ с параметрами сдвига $k_s = 0$, $l_s = 0$ и $m_s = 0$, $n_s = 0$, совпадает с ДПФ и обладает всеми его свойствами. С помощью пары преобразований: СДПФ и обратного СДПФ, – с надлежащим образом подобранными параметрами сдвига k_s , l_s и m_s , n_s можно получать интерполированные произвольно расположенные промежуточные отсчёты функций.

СДПФ легко выражается через ДПФ тривиальным раскрытием скобок в выражении (4.23):

$$\tilde{f}_{mn} = \left\{ \left[\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left(f_{kl} \cdot w_N^{km_s} \cdot w_N^{ln_s} \right) \cdot w_N^{km} \cdot w_N^{ln} \right] \cdot w_N^{mk_s} \cdot w_N^{nl_s} \right\} \cdot w_N^{m_s k_s} \cdot w_N^{n_s l_s}. \quad (4.24)$$

Как видно из выражения (4.24), вычисление СДПФ можно выполнить в 3 этапа:

1. Домножение выборки функции на сдвиговые экспоненты $w_N^{km_s} \cdot w_N^{ln_s}$, обеспечивающие смещение спектра.
2. Выполнение ДПФ, с использованием любого алгоритма БПФ.

3. Домножение выборки спектра на сдвиговые экспоненты $w_N^{mk_s} \cdot w_N^{nl_s}$, компенсирующие смещение выборки.

Два последних множителя в выражении (4.24) являются постоянными и при выполнении вычислений с точностью до постоянного множителя могут не учитываться. Аналогичное выражение и процедура вычисления используется для обратного СДПФ.

Таким образом, СДПФ является удобной заменой непрерывного преобразования Фурье и эффективным инструментом для решения задач моделирования формирования изображений.

4.4. Особенности программной реализации моделей формирования изображений

Возрастание вычислительной мощности современных компьютеров приводит к тому, что стремление обеспечить высокое быстродействие программного модуля перестает играть доминирующую роль. Не менее существенное значение приобретают такие характеристики программного обеспечения, как структурированность, гибкость, универсальность, модифицируемость и возможность повторного использования программных модулей. Эти требования приобретают особую важность с учётом возрастания сложности реализуемых математических моделей. В настоящее время для построения эффективных вычислительных процессов используются различные технологии. Ряд перечисленных характеристик удается обеспечить с использованием технологии *обобщённого программирования* [11].

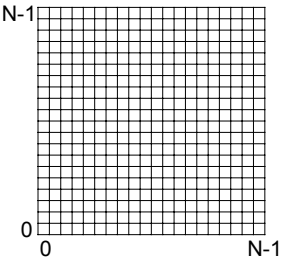
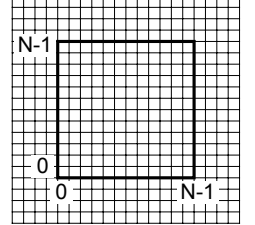
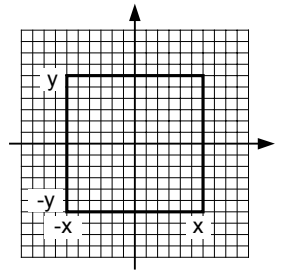
Обобщённое программирование является развитием объектно-ориентированного подхода, который позволяет реализовать в программе объекты, выражающие самые общие проблемно-инвариантные понятия. Основная идея этой технологии заключается в том, чтобы выявить необходимые сущности и алгоритмы их обработки, а затем параметризовать их так, чтобы они могли работать с множеством подходящих типов и структур данных. То есть они должны удовлетворять определённому набору требований и правил, который в обобщённом программировании называется *концепцией*. При моделировании формирования изображений и анализе качества оптических систем основной проблемно-инвариантной концепцией является выборка функции. Приходится работать с выборками, в которых хранятся данные различных типов, но в остальном работа с ними может быть унифицирована. Таким образом, на основе идеологии обобщённого программирования можно реализовать контейнеры для хранения различных выборок и алгоритмы их обработки.

Анализ моделей и алгоритмов показывает, что они могут быть реализованы с использованием объектов трех типов, реализующих концепцию выборки: *Sample*, *Subsample*, *Field* (таблица 4.3). *Sample* представляет собой контейнер, который может представлять собой обычный двумерный массив вещественных или комплексных чисел. Подвыборка *Subsample* позволяет организовать удобный и эффективный доступ к некоторой части

4.4. Особенности программной реализации моделей формирования изображений

выборки (например, области зрачка в выборке зрачковой функции или центральной области выборки функции рассеяния точки). Доступ к элементам контейнеров `Sample` и `Subsample` осуществляется с использованием целочисленных индексов. В некоторых случаях удобно осуществлять доступ к элементам выборок в физической системе координат тех функций, которые они представляют. Такой доступ можно реализовать с использованием объекта типа `Field`, который может осуществлять автоматический пересчёт физических координат в координаты выборки и обратно.

Таблица 4.3 Объекты, реализующие концепцию выборки

Объекты	Описание	Схема
<code>Sample</code>	Двумерная выборка данных некоторого типа.	
<code>Subsample</code>	Подвыборка – декоратор контейнера типа <code>Sample</code> , являющаяся представлением некоторой его области.	
<code>Field</code>	Двумерное поле – декоратор объекта типа <code>Sample</code> или <code>Subsample</code> , которая обеспечивает работу с элементами выборки в системе физических координат.	

В соответствии с парадигмой обобщённого программирования для реализации различных вычислительных операций предусматриваются универсальные обобщённые алгоритмы обработки объектов, отвечающих концепции выборка. Для работы обобщённых алгоритмов могут использоваться две концепции. Первая концепция `SamplePredicate` предполагает реализацию объекта-функции, которая вызывается для каждого элемента выборки, принимает индексы (координаты) элемента выборки и возвращает значение логического типа. Такие функции могут использоваться для организации условных конструкций при инициализации и выполнении других операций с отдельными элементами выборок. Вторая концепция `SampleModifier` предполагает реализацию объекта-функции, которая вызывается для каждого элемента и изменяет его значение. Обобщённые

алгоритмы обработки объектов, отвечающих концепции выборка, которые могут быть полезны при реализации моделирования формирования изображений, представлены в таблице 4.4.

Таблица 4.4 Алгоритмы для обработки объектов, реализующих концепцию выборки

Название	Действие
for_each	Выполняет объект-функцию, удовлетворяющую концепции SampleModifier, для каждого элемента выборки.
not_for_each	Выполняет объект-функцию, удовлетворяющую концепции SampleModifier, только для тех элементов выборки, для которых выполняется условие, задаваемое функцией-объектом типа SamplePredicate.
transform	Выполняет объект-функцию, удовлетворяющую концепции SampleModifier, для каждого элемента первой выборки, а результат помещается во вторую выборку.
copy	Осуществляет поэлементное копирование двух выборок.
fill	Присваивает всем элементам выборки некоторое заданное значение.
replace_if	Присваивает элементам выборки, для которых выполняется условие, задаваемое функцией-объектом типа SamplePredicate, некоторое заданное значение.
count_if	Подсчитывает количество элементов в выборке, для которых выполняется условие, задаваемое функцией-объектом типа SamplePredicate.

Таким образом, использование технологии обобщённого программирования позволяет разработать базовый набор объектов и алгоритмов, с помощью которого можно реализовать формирование выборок и их обработку в различных алгоритмах моделирования формирования изображений и вычисления характеристик качества оптических систем.

Программы для обработки изображений и других сигналов часто реализуются на основе *конвейерной архитектуры* [23]. При использовании этой архитектуры процесс обработки представляется в виде конвейера, по которому перемещаются обрабатываемые объекты (например, выборки функции комплексной амплитуды поля). Эти объекты последовательно подвергаются преобразованиям (например, преобразованию Фурье, описывающему дифракционное распространение поля) для получения результата (например, распределения интенсивности на изображении).

4.4. Особенности программной реализации моделей формирования изображений

Рассмотрим особенности применения конвейерной архитектуры при реализации моделирования формирования изображений.

Вычислительный процесс разбивается на отдельные независимые вычислительные компоненты, которые в этой архитектуре называются фильтрами (Filter). Фильтр имеет один или несколько входов, через которые поступают потоки входных данных, и выходы, предоставляющие потоки данных для дальнейшей обработки и анализа. В рамках данной архитектуры так же могут использоваться, так называемые, трубы (Pipe), которые обеспечивают поступление выходного потока от одного фильтра на вход другого. При этом фильтры абсолютно не зависимы друг от друга. Каждый фильтр ничего «не знает» о фильтрах, находящихся в конвейере до и после него. Благодаря этому фильтры могут располагаться в конвейере в любом произвольном порядке, что обеспечивает произвольную последовательность действий.

Фильтры можно классифицировать по нескольким признакам. По наличию входных и выходных данных можно выделить создатель (Creator), который не имеет входных данных, обычный фильтр (Filter), имеющий как входные, так и выходные данные, и заглушку (Terminator), которая не имеет выходных данных и обычно содержит результат вычислений. По типу и количеству входных данных можно выделить преобразователь (Transformer), который на входе и выходе имеет данные различных типов; оператор (Operator), который имеет несколько наборов входных данных. В таблице 4.5 представлены фильтры, используемые при моделировании формирования изображений.

Таблица 4.5 Фильтры, используемые для работы с выборками

Действие	Тип фильтра	Тип входных данных	Тип выходных данных
Создание	Creator	–	Любой
Инициализация	Filter	Произвольный	Соответствует входному
Преобразование Фурье	Filter	Комплексный	Комплексный
Поэлементное умножение	Operator	Произвольный	Соответствует входному
Поэлементное сложение	Operator	Произвольный	Соответствует входному
Вычисление модуля элементов	Transformer	Комплексный	Вещественный
Вычисление фазы элементов	Transformer	Комплексный	Вещественный
Вычисление интенсивности элементов	Transformer	Комплексный	Вещественный
Сохранение результата	Terminator	Произвольный	–

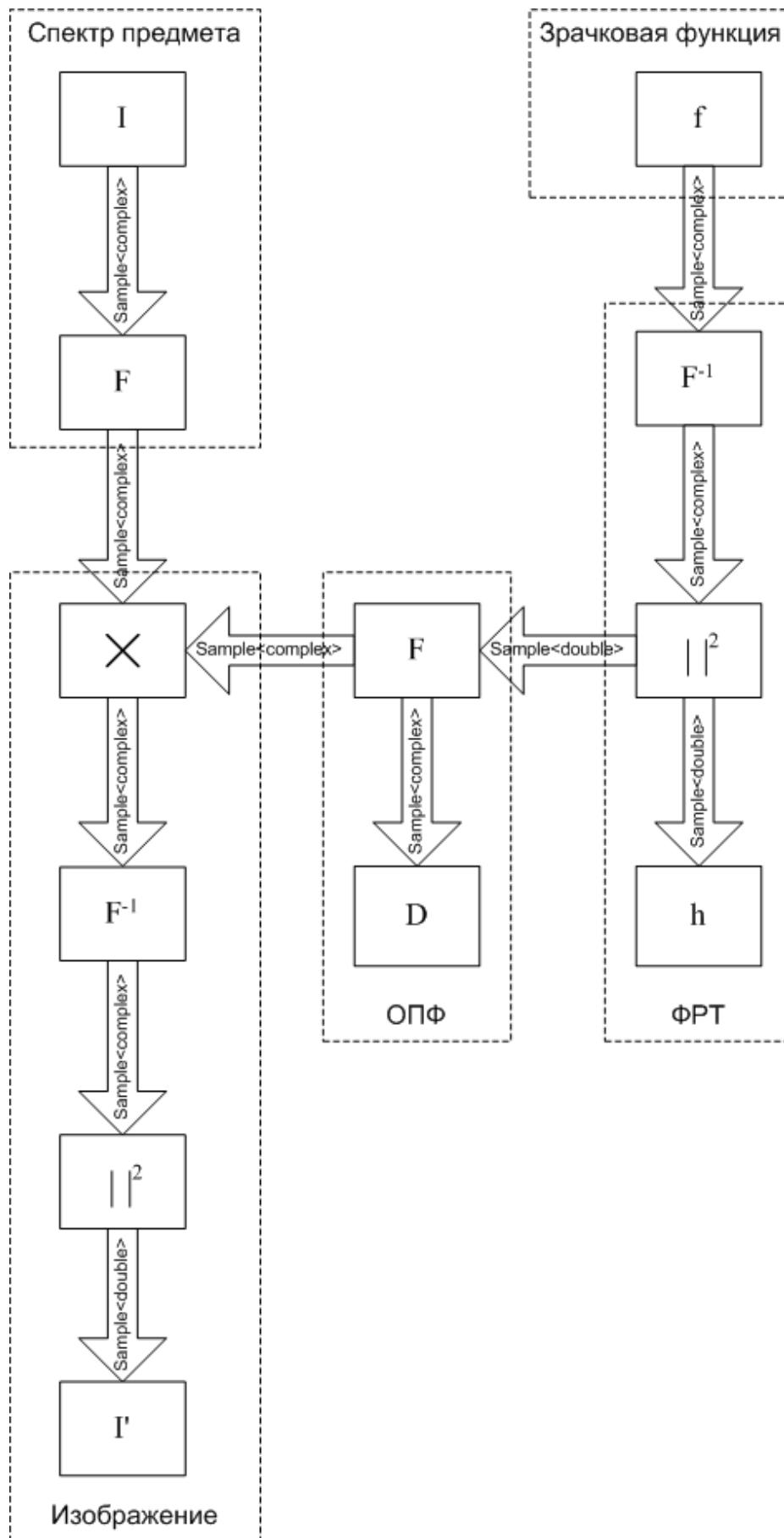


Рис. 4.6. Конвейер для моделирования изображения при некогерентном освещении

При моделировании формирования изображений последовательность действий является детерминированной, поэтому можно реализовать один из вариантов конвейерной архитектуры, который называется *пакетная последовательность* [23]. В этом случае перемещение данных между фильтрами осуществляется в виде пакетов (в нашем случае – выборки функций). При этом фильтры получают менее универсальными и не являются независимыми (то есть могут принимать и выдавать данные только строго определённого типа), но в нашем случае проблем с несовместимостью входа одного из фильтров с выходом другого возникать не должно.

В качестве примера использования предложенной архитектуры рассмотрим реализацию алгоритма модели формирования некогерентного изображения. Конвейер программной реализации этой модели представлен на рисунке 4.6. Фильтры изображены в виде прямоугольников, а направление потоков данных в виде стрелок. Работа конвейера начинается с формирования выборки предмета (фильтр I) и зрачковой функции (фильтр f). При выполнении этих фильтров происходит создание выборок и заполнение их значениями. В частности, инициализация фона функции комплексного пропускания предмета может быть реализована с использованием алгоритма `fill`, а геометрия элементов предмета может быть сформирована с использованием алгоритма `not_for_each`. Фильтры F и F^{-1} реализуют процедуру прямого и обратного преобразования Фурье. Перемножение фурье-образа комплексного пропускания предмета и ОПФ реализуется оператором \times . Вычисление интенсивности выборки комплексных элементов реализуется преобразователем $||^2$ с использованием алгоритма `transform`. Терминаторы h , D , I' содержат результаты работы конвейера, то есть соответственно, ФРТ, ОПФ и распределение интенсивности на изображении.

В рамках общего вычислительного конвейера можно выделить несколько отдельных блоков. Каждый из них состоит из набора фильтров и представляет собой подконвейер. В данном случае это блоки формирования выборки предмета и зрачковой функции, вычисления ФРТ, ОПФ и распределения интенсивности в изображении. На каждом из этих этапов существует возможность независимого анализа полученных результатов. Кроме того, промежуточные результаты могут передаваться на другие фильтры для продолжения вычислений. Например, после получения ФРТ дополнительно можно реализовать конвейер вычисления ФКЭ, ФРЛ и пограничной кривой.

Рассмотренная архитектура чрезвычайно удобна и эффективна для реализации алгоритмов моделирования формирования изображений. Во-первых, она позволяет построить гибкий, эффективный, унифицированный вычислительный процесс. Из представленного алгоритма видно, что в ходе вычислений могут многократно применяться одни и те же элементарные вычислительные процедуры и операции. Реализация таких операций на основе обобщённых алгоритмов приводит к повышению производительности и упрощению программной реализации. Во-вторых, конвейерная архитектура позволяет реализовать процесс поэтапных вычислений. Программная

реализация может быть осуществлена на основе технологий параллельных или распределённых вычислений, что позволяет существенно ускорить выполнение вычислений.

Выводы

Для осуществления компьютерного моделирования формирования изображений необходимо перейти от непрерывных функций к их дискретному представлению в виде выборок. При этом выбор шага дискретизации не является произвольным, а осуществляется на основе теоремы о выборке. Для дискретизации всех функций, участвующих в моделировании, достаточно определить шаги по предметным координатам ($\Delta\eta_x$ и $\Delta\eta_y$) и шаги по зрачковым координатам ($\Delta\rho_x$ и $\Delta\rho_y$). Остальные параметры дискретизации функций определяются в соответствии с соотношениями (4.9 – 4.12). Для обеспечения адекватности моделирования выбор шагов дискретизации следует осуществлять исходя из свойств моделируемых функций (их предельных размеров или размеров их минимальных элементов).

Основными вычислительными операциями, которые выполняются при моделировании формирования изображений, являются элементарные поэлементные действия, а также преобразование Фурье. При численной реализации для вычисления дискретного преобразования Фурье используются быстрые алгоритмы. Неудобные свойства дискретного преобразования преодолеваются введением параметров сдвига. Сдвиговое дискретное преобразование Фурье позволяет получать произвольно расположенные интерполированные промежуточные отсчёты функций путём циклического сдвига функций и их фурье-образов.

Для эффективной программной реализации моделирования формирования изображений можно использовать современные технологии обобщённого программирования и конвейерную архитектуру организации вычислений. На основе идеологии обобщённого программирования можно реализовать контейнеры для хранения различных выборок и унифицированные алгоритмы их обработки. Конвейерная архитектура позволяет реализовать отдельные этапы вычислений в виде отдельных программных модулей – фильтров. Процесс вычисления представляет собой последовательность выполнения фильтрами требуемых действий и передачи обрабатываемых выборок от одного фильтра другому. Такая архитектура может быть реализована в любой программно-аппаратной среде, в том числе с использованием технологий параллельных или распределённых вычислений.

Вопросы

На основе каких принципов осуществляется дискретизация непрерывных функций?

Сформулируйте и докажите теорему о выборке. Как она должна использоваться при дискретизации функций?

В чём заключается понятие «частота Найквиста»?

Каковы особенности дискретизации функций, участвующих в моделировании формирования изображений?

Как связаны шаги дискретизации по координатам на источнике и по зрачковым координатам?

Как связаны шаги дискретизации по предметным и зрачковым координатам?

Как связаны шаги дискретизации по предметным и частотным координатам?

Как связаны размеры областей моделирования предмета, зрачковой функции и изображения?

В чём заключается понятие «охват зрачка»?

Какие преимущества даёт использование системы канонических координат при моделировании формирования изображения?

Какие шаги дискретизации по зрачковым координатам и координатам на изображении следует выбрать для исследования предела разрешения оптической системы?

Какие шаги дискретизации по зрачковым, частотным и координатам на изображении следует выбрать для исследования оптической передаточной функции?

Каким образом решается задача попадания точки в многоугольник при формировании выборок участвующих в моделировании?

Указать и обосновать минимальное количество элементов в выборках, чтобы моделирование изображения было адекватным?

Какие эффекты будут возникать на моделированном изображении, если выборка плохо описывает контур круглой диафрагмы?

Какие проблемы могут возникнуть при компьютерном моделировании формирования изображений периодических решеток? Как их избежать?

Какие свойства дискретное преобразование Фурье усложняют его использование при моделировании формирования изображения? Каким образом сдвиговое дискретное преобразование Фурье позволяет приблизиться по свойствам к непрерывному преобразованию?

Каким образом может быть осуществлен пересчёт координат из физической системы координат в систему координат выборки при реализации объекта `Field`?

Какова примерная реализация алгоритма `not_for_each`?

Разработать конвейер вычислений ФРТ, ФКЭ, ФРЛ и пограничной кривой. Указать используемые фильтры и пакеты данных, которые передаются от одного фильтра другому.

Разработать конвейер вычислений для моделирования формирования изображения при частично когерентном освещении предмета. Указать используемые фильтры и пакеты данных, которые передаются от одного фильтра другому.

Каким образом можно реализовать конвейеры для моделирования формирования изображения при использовании технологий параллельных или распределённых вычислений.

Задачи

- 4.1. Разработать программу для исследования влияния экранирования и спайдеров при формировании изображения на такие характеристики качества оптической системы, как ФРТ и ОПФ.
- 4.2. Разработать программу для исследования влияния произвольной аподизации на формирование изображения. Реализовать вычисление таких характеристик качества оптической системы, как ФРТ и ОПФ.
- 4.3. Разработать программу для исследования оптических систем с синтезированной апертурой. Реализовать вычисление ФКЭ и ОПФ.
- 4.4. Разработать программу для демонстрации влияния расфокусировки на формирование некогерентного изображения радиальной миры оптической системой с апертурной диафрагмой круглой и квадратной формы. Реализовать вычисление распределения интенсивности на изображении при плавном изменении положения плоскости анализа.
- 4.5. Разработать программу для моделирования формирования некогерентного изображения радиальной миры оптической системой с апертурной диафрагмой круглой формы при наличии астигматизма. Реализовать вычисление распределения интенсивности на изображении при плавном изменении положения плоскости анализа.
- 4.6. Реализовать программу моделирования формирования изображения при наличии смаза из-за движения. Реализовать вычисление распределения интенсивности в изображении радиальной миры в зависимости от скорости и направления движения.
- 4.7. Реализовать программу моделирования формирования изображения каскадом линейных преобразователей: атмосфера – оптическая система – вибрация. Реализовать вычисление распределения интенсивности в изображении радиальной миры при различных параметрах преобразователей.
- 4.8. Разработать программу для моделирования формирования изображения произвольных амплитудно-фазовых предметов безабберационной оптической системой. Реализовать вычисление распределения интенсивности на изображении.
- 4.9. Разработать программу для моделирования формирования изображения фазовых объектов с использованием метода фазового контраста. Реализовать вычисление распределения интенсивности на изображении.
- 4.10. Разработать программу для анализа влияния формы и размеров источника на формирование изображения освещаемого предмета безабберационной оптической системой. Исследовать влияние формы и размеров источника освещения на разрешающую способность изображающей системы.
- 4.11. Разработать программу для исследования методов коррекции эффекта оптической близости при формировании изображений освещаемых предметов безабберационной оптической системой. Исследовать использование серифов и фазовых накладок.

-
- 4.12. Разработать программу для моделирования формирования полихроматического изображения точки. Реализовать полутоновую и цветную визуализацию пятна рассеяния.
- 4.13. Разработать программу для моделирования регистрации изображений матричным приёмником. При реализации модели учесть геометрические и спектральные характеристики приёмника.
- 4.14. Разработать программу для моделирования формирования изображения безабберационной оптической системой при наличии двоения. Реализовать восстановление изображения методом обратной фильтрации.
- 4.15. Разработать программу для моделирования формирования изображения с использованием технологии кодирования волнового фронта. Реализовать модель кодирования волнового фронта с использованием поверхности, описываемой уравнением $f(x, y) = \text{sign}(x) \cdot |x|^{2.5} + \text{sign}(y) \cdot |y|^{2.5}$ и восстановление изображения методом обратной фильтрации.

Заключение

Нередко говорят, что предисловие следует читать лишь в конце. Заключение же, напротив, – в начале.

Жиль Делез

Описание процессов, происходящих в оптической системе, на основе электромагнитной теории, теории дифракции и когерентности позволило построить математические модели формирования изображений самосветящихся и освещаемых предметов с учётом различных факторов. Основной вычислительной операцией при численной реализации представленных моделей является преобразование Фурье. Использование алгоритма быстрого преобразования Фурье позволяет осуществить компьютерное моделирование формирования оптических изображений с высокой вычислительной эффективностью.

Полученные соотношения между предметом и изображением, позволяют также представить оптическую систему в виде преобразователя сигналов. При выполнении условий линейности и изопланатичности теория сигналов описывает не только оптические системы, но и некоторые изображающие системы, представляющие собой каскады преобразователей.

Таким образом, разработанные алгоритмы могут активно использоваться для решения широкого круга задач прикладной оптики при проектировании и исследовании систем, формирующих изображения.

Интенсивное развитие современных оптических технологий, разработка новых оптических материалов и элементов, миниатюризация оптических устройств, – всё это диктует необходимость развития теории и методов моделирования формирования оптических изображений. Простые модели требуют учёта дополнительных факторов, а значит – пересмотра и усложнения. Перечислим основные направления развития теории моделирования формирования оптических изображений.

Динамические изменения происходят в фотолитографической технологии. Фотолитографическая оптика работает на пределе разрешения и требует точного учёта всех эффектов возникающих в оптических системах (например, двулучепреломления). Разработчикам фотолитографических инструментов требуется моделирование дифракционных явлений, происходящих на трёхмерном фотошаблоне, а также анализ формирования не только воздушного, но и скрытого в фоторезисте трёхмерного изображения.

Рассмотренные модели формирования изображения основываются на приближении Фраунгофера, а значит, не пригодны для описания распространения света в устройствах интегральной оптики. Для проектирования таких устройств требуется моделирование распространения света через неоднородные среды с точным учётом всех диафрагм и экранов, которые по размерам сравнимы с длиной волны.

В последнее время активно развиваются и широко внедряются различные изображающие системы, представляющие собой каскады оптических и

электронных преобразователей, в которых реализуются новые возможности влияния на качество формируемого изображения (например, технология кодирования волнового фронта). Для проектирования таких систем дополнительно требуется моделирование различных устройств регистрации и визуализации, в том числе формирующих трёхмерные изображения.

Таким образом, развитие современной техники определяет дальнейшее развитие теории и моделей формирования оптических изображений.

Приложение А. Системы канонических координат

Использование канонических координат упрощает соотношения как при расчёте реальных лучей для определения aberrаций, так и при использовании теории дифракции.

Гарольд Гопкинс

Анализ процессов происходящих в оптической системе при формировании изображения удобно формулируется с использованием канонических координат [15, 17, 26, 27]. Рассмотрим выражения, которые используются для определения различных систем канонических координат.

Зрачковые канонические координаты описывают относительное положение точек на зрачке и получаются нормированием обобщённых координат на зрачке к соответствующим апертурам:

$$\mathbf{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x/A_x \\ p_y/A_y \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\rho}' = \begin{pmatrix} \rho'_x \\ \rho'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_x/A'_x \\ p'_y/A'_y \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

где p_x и p_y – входные зрачковые координаты, A_x и A_y – передние обобщённые апертуры, p'_x и p'_y – выходные зрачковые координаты, A'_x и A'_y – задние обобщённые апертуры. При выполнении условий изопланатизма канонические входные и выходные координаты равны: $\mathbf{\rho} = \mathbf{\rho}'$. Области зрачков в канонических координатах представляют собой круги единичного радиуса.

Канонические координаты, описывающие положение *на предмете и изображении*, определяются следующими выражениями:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot A_x / \lambda \\ y \cdot A_y / \lambda \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\eta}' = \begin{pmatrix} \eta'_x \\ \eta'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \cdot A'_x / \lambda \\ y' \cdot A'_y / \lambda \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

где x и y – обобщённые координаты на предмете, x' и y' – обобщённые координаты на изображении, λ – длина волны. Свойства приведённых таким образом координат таковы, что $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}'$, то есть в канонических координатах любая оптическая система имеет единичное увеличение.

Частотные канонические координаты на предмете и изображении определяются следующим образом:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_x \cdot \lambda / A_x \\ \nu_y \cdot \lambda / A_y \end{pmatrix}; \quad \mathbf{s}' = \begin{pmatrix} s'_x \\ s'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu'_x \cdot \lambda / A'_x \\ \nu'_y \cdot \lambda / A'_y \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

где ν_x и ν_y – реальные частотные координаты на предмете, ν'_x и ν'_y – реальные частотные координаты на изображении. Свойства приведённых частотных координат таковы, что $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$.

При моделировании свойств осветительной системы используются понятие эквивалентного источника, за который принимается выходной зрачок осветительной системы. Канонические координаты на источнике определяются как выходные зрачковые координаты оптической системы конденсора, но в

масштабе входных зрачковых координат изображающей системы. Таким образом, приведённые координаты на источнике определяются следующим выражением:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_x/A_x \\ p'_y/A_y \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

где p'_x и p'_y – координаты на выходном зрачке осветительной системы, A_x и A_y – передние обобщённые апертуры изображающей системы.

При решении задач моделирования и проектирования оптических систем иногда используются канонические (приведённые) продольные координаты:

$$\kappa = z \cdot \frac{A^2}{\lambda}; \quad \kappa' = z' \cdot \frac{A'^2}{\lambda}, \quad (\text{A.5})$$

где z – обобщённая координата в пространстве предметов, z' – обобщённая координата в пространстве изображений, A и A' – передняя и задняя обобщённые апертуры центрированной оптической системы.

В некоторых случаях удобно использовать относительную спектральную координату, значение которой приведено в диапазон $[-1,+1]$. Таким образом, каноническая спектральная координата определяется следующим образом:

$$\chi = \frac{\lambda - \lambda_o}{\Delta\lambda}, \quad (\text{A.6})$$

где $\lambda_o = (\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/2$ – центральная длина волны в рабочем спектральном интервале $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, а $\Delta\lambda = (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})/2$ – полуширина рабочего спектрального интервала.

Приложение Б. Преобразование Фурье и его свойства

Теория Фурье – это не только один из самых ярких результатов в современном математическом анализе, но и незаменимый инструмент при решении большинства неясных проблем современной физики.

Уильям Томсон (лорд Кельвин)

Пусть x и y – это пространственные декартовы координаты, а $f(x, y)$ – произвольная двумерная функция. Преобразование Фурье произвольной двумерной функции также является двумерной функцией и определяется следующим интегралом [6, 12]:

$$\tilde{f}(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-2\pi i(xv_x + yv_y)} dx dy = F[f(x, y)], \quad (\text{Б.1})$$

где v_x и v_y – частотные декартовы координаты, $\tilde{f}(v_x, v_y)$ – фурье-образ функции $f(x, y)$, F – оператор преобразования Фурье. Произвольная двумерная функция и её фурье-образ связаны обратным преобразованием Фурье:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v_x, v_y) \cdot e^{2\pi i(v_x x + v_y y)} dv_x dv_y = F^{-1}[\tilde{f}(v_x, v_y)]. \quad (\text{Б.2})$$

В таблице Б.1 приведены основные свойства фурье-образа произвольной функции. a , b и c – произвольные константы, $g(x, y)$ – произвольная функция, а $\tilde{g}(v_x, v_y)$ – её фурье-образ.

Таблица Б.1 Основные свойства фурье-образов произвольной функции

Функция	Фурье-образ
$\sum_n c_n \cdot f_n(x, y)$	$\sum_n c_n \cdot \tilde{f}_n(v_x, v_y)$
$f(ax, by)$	$\frac{1}{ ab } \cdot \tilde{f}\left(\frac{v_x}{a}, \frac{v_y}{b}\right)$
$f(x - a, y - b)$	$\tilde{f}(v_x, v_y) \cdot e^{-2\pi i \cdot (av_x + bv_y)}$
$f(x, y) \otimes g(x, y)$	$\tilde{f}(v_x, v_y) \cdot \tilde{g}(v_x, v_y)$

Фурье-образ функций, обладающих осевой симметрией, может быть найден с использованием преобразования Ганкеля [6, 12]:

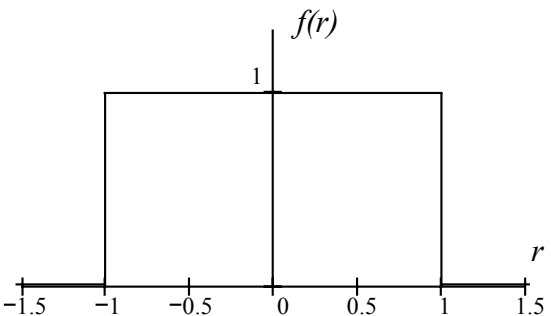
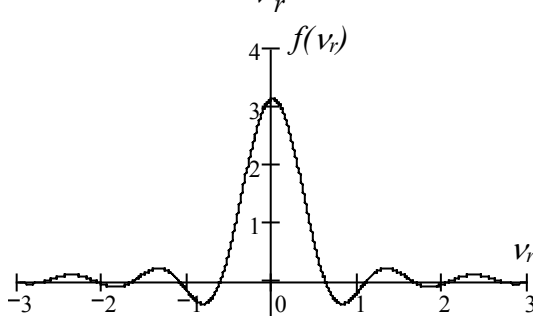
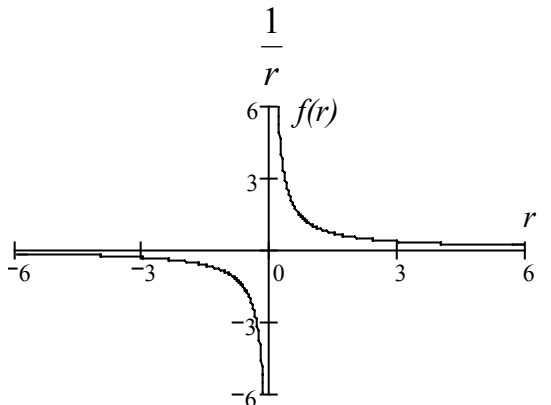
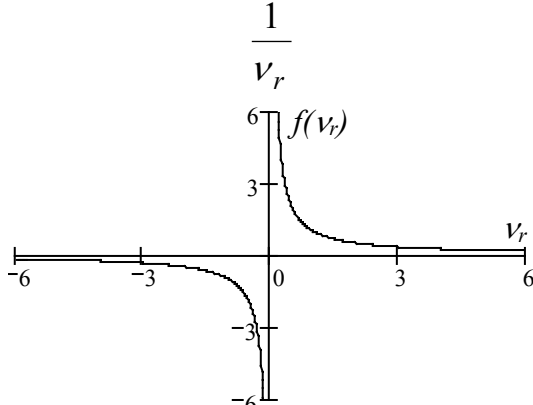
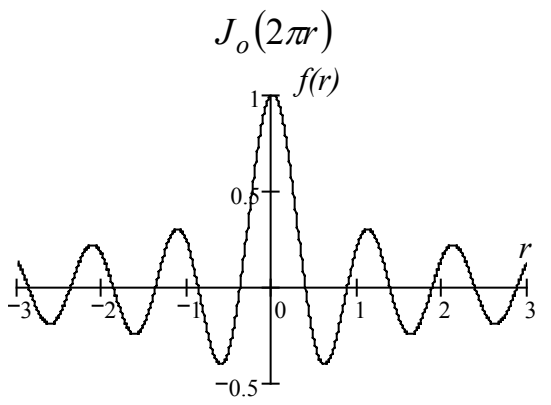
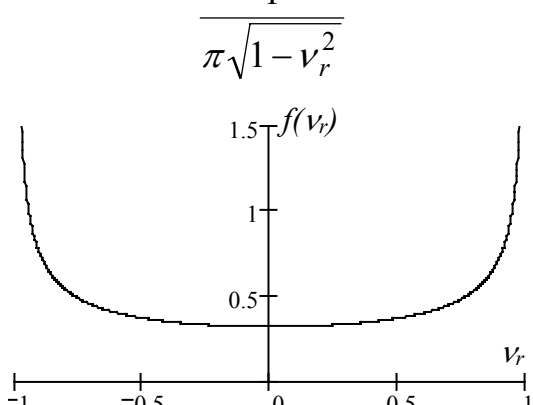
$$\tilde{f}(v_r) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) \cdot r \cdot J_0(2\pi r v_r) dr, \quad (\text{Б.3})$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – радиус в полярной пространственной системе координат;
 $v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ – радиус в полярной частотной системе координат, а J_o –
 функция Бесселя. Справедливо и обратное преобразование:

$$f(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \tilde{f}(v_r) \cdot v_r \cdot J_o(2\pi v_r r) dv_r. \quad (\text{Б.4})$$

В таблице Б.2 приведены аналитические выражения и графики сечений некоторых осесимметричных функций и их фурье-образов.

Таблица Б.2 Некоторые осесимметричные функции и их фурье-образы

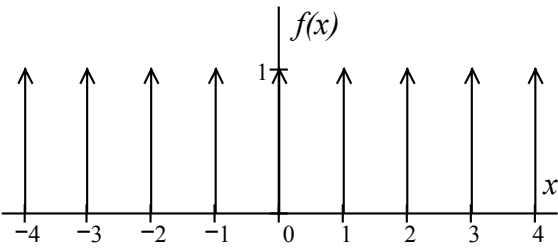
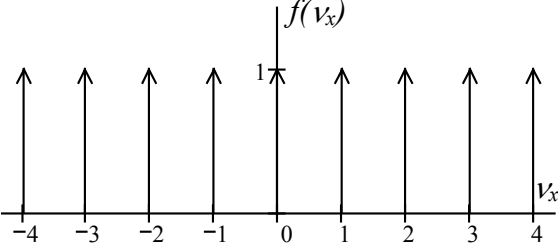
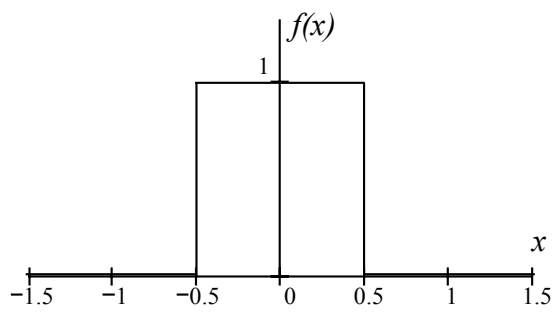
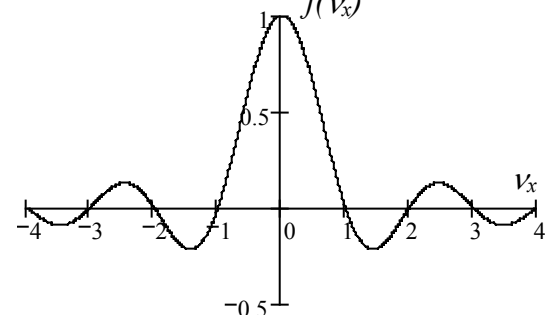
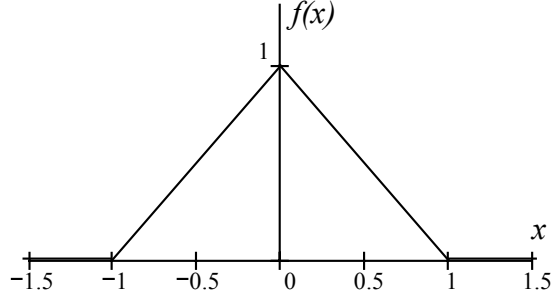
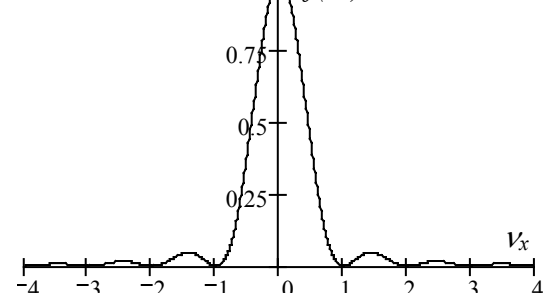
Функция	Фурье-образ
$\text{circ}(r)$ 	$\frac{J_1(2\pi v_r)}{v_r}$ 
$\frac{1}{r}$ 	$\frac{1}{v_r}$ 
$J_o(2\pi r)$ 	$\frac{1}{\pi\sqrt{1-v_r^2}}$ 

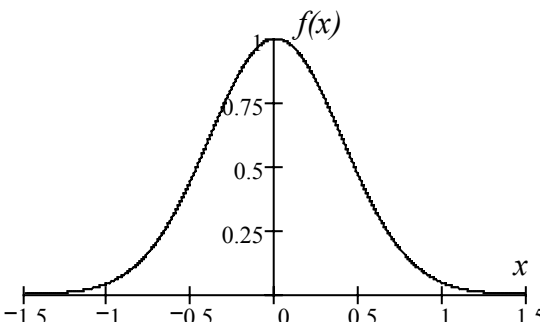
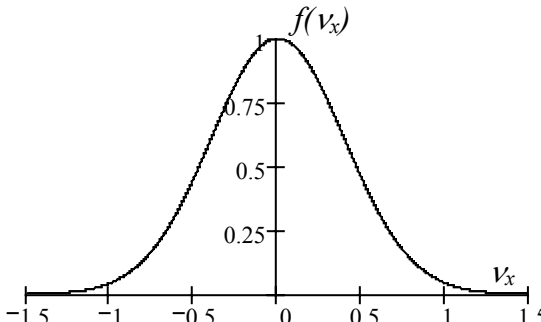
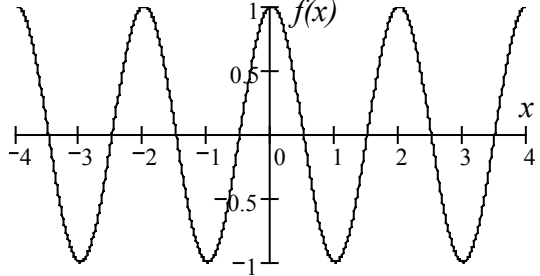
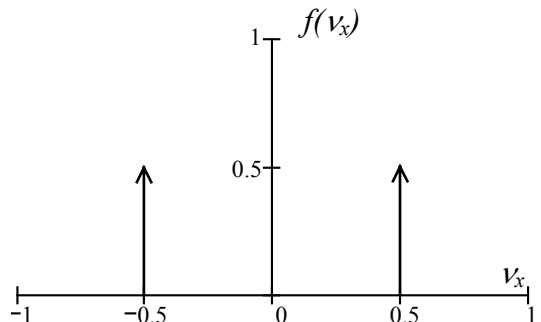
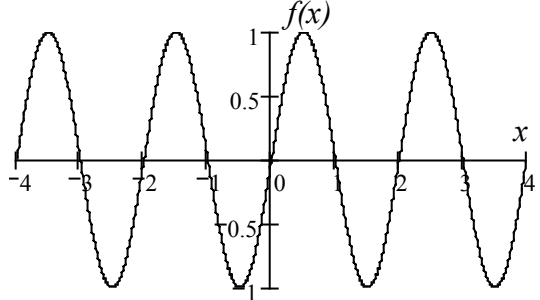
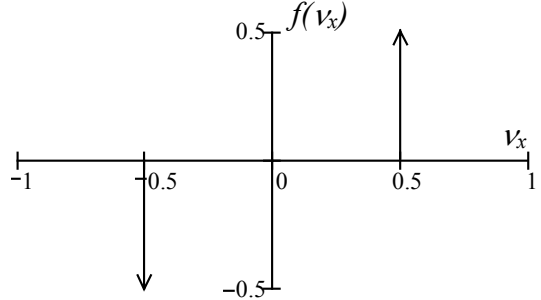
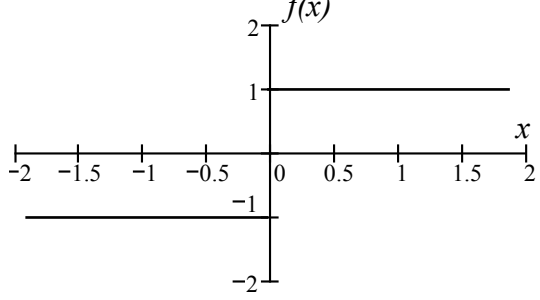
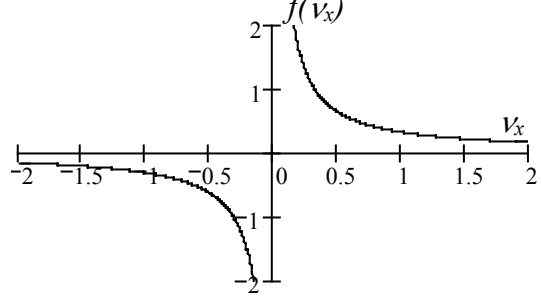
Фурье-образ двумерной функций с разделяющимися переменными можно определить как произведение фурье-образов составляющих её множителей [6]:

$$\tilde{f}(v_x, v_y) = F[f(x, y)] = F[f_x(x)] \cdot F[f_y(y)] = \tilde{f}_x(v_x) \cdot \tilde{f}_y(v_y). \quad (\text{Б.5})$$

В таблице Б.3 приведены аналитические выражения и графики некоторых одномерных функций и их фурье-образов, которые используются для представления функций с разделяющимися переменными.

Таблица Б.3 Некоторые одномерные функции и их фурье-образы

Функция	Фурье-образ
$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$	1
$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x+n)$ 	$\text{comb}(v_x)$ 
$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1/2; 1/2]; \\ 0, & x \notin [-1/2; 1/2]. \end{cases}$ 	$\text{sinc}(\pi v_x) = \frac{\sin(\pi v_x)}{\pi v_x}$ 
$\text{tr}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-1; 1]; \\ 1+x, & x \in [-1; 0]; \\ 1-x, & x \in [0; 1]. \end{cases}$ 	$\text{sinc}^2(\pi v_x)$ 

Функция	Фурье-образ
$e^{-\pi \cdot x^2}$ 	$e^{-\pi \cdot v_x^2}$ 
$\cos(\pi x)$ 	$\frac{\delta(v_x - 1/2) + \delta(v_x + 1/2)}{2}$ 
$\sin(\pi x)$ 	$\frac{\delta(v_x - 1/2) - \delta(v_x + 1/2)}{2i}$ 
$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ 	$\frac{i}{\pi v_x}$ 

Литература

Ссылка на авторитет не есть довод.

Бенедикт Спиноза

1. **Ахманов С. А., Никитин С. Ю.** *Физическая оптика*. –М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
2. **Блейхут Р.** *Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов*. –М.: Мир, 1989.
3. **Борн М., Вольф Э.** *Основы оптики*. –М.: Наука, 1970.
4. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов*. –М.: Наука, 1980.
5. *Вычислительная оптика: Справочник*. Под ред. **М. М. Русинова**. –Л.: Машиностроение, 1984.
6. **Гудмен Дж.** *Введение в фурье-оптику*. –М.: Мир, 1972.
7. **Гудмен Дж.** *Статистическая оптика*. –М.: Мир, 1988.
8. *Компьютеры в оптических исследованиях*. Под ред. **Б. Фридена**. –М.: Мир, 1983.
9. **Марешаль А., Франсон М.** *Структура оптического изображения*. –М.: Мир, 1964.
10. **О'Нейл Э.** *Введение в статистическую оптику*. –М.: Мир, 1966.
11. **Остерн М. Г.** *Обобщенное программирование и STL: Использование и наращивание стандартной библиотеки шаблонов C++*. –М.: Невский Диалект, 2004
12. **Папулис А.** *Теория систем и преобразований в оптике*. –М.: Мир, 1971.
13. **Пекара А.** *Новый облик оптики*. –М.: Сов. радио, 1973.
14. *Проектирование оптических систем*. Под ред. **Р. Шеннона и Дж. Вайанта**. –М.: Мир, 1983.
15. **Родионов С. А.** *Автоматизация проектирования оптических систем*. –Л.: Машиностроение, 1982.
16. **Родионов С. А.** *Основы оптики*. Конспект лекций. –СПб.: СПбГИТМО(ТУ), 2000.
17. **Родионов С. А.** *Теория оптического изображения*. Конспект лекций. –Л.: ЛИТМО, 1972.
18. **Слюсарев Г. Г.** *Методы расчета оптических систем*. –Л.: Машиностроение. 1969.
19. **Стюард И. Г.** *Введение в фурье-оптику*. –М.: Мир, 1985.
20. **Шехонин А. А., Родионов С. А.** *Проектирование основных устройств оптических приборов*. Методические указания. –Л.: ЛИТМО, 1987.
21. **Яворский Б. М., Детлаф А. А.** *Справочник по физике*. –М.: Наука, 1990.
22. **Ярославский Л. П.** *Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии: Введение в цифровую оптику*. –М.: Радио и связь, 1987.
23. **Garlan D., Shaw M.** *An Introduction to Software Architecture*. Advances in Software Engineering and Knowledge Engineering, Volume I. World Scientific Publishing Company. 1993.

24. **Frigo M., Johnson S. G.** *Manual for FFTW 3.0.1* Massachusetts Institute of Technology. 2003. (<http://www.fftw.org/fftw3.pdf>)
25. *Handbook of optics*. **Michael Bass**, editor in chief. McGraw-Hill. 1995.
26. **Hopkins H. H.** *Canonical and Real-Space Coordinates Used in the Theory of Image Formation*. Chapter 8 in *Applied Optics and Optical Engineering*. Academic Press. 1983.
27. **Hopkins H. H.** *Image formation by a general optical system*. *Applied Optics*. Vol. 24, No. 16. 1985.
28. **Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T.** *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing* Cambridge University Press. 1992. (<http://www.library.cornell.edu/nr/cbookcpdf.html>)

Дополнительная литература

- Кононов В. И., Федоровский А. Д., Дубинский Г. П.** *Оптические системы построения изображений*. –К.: Техника, 1981.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Л. М.** *Теоретическая физика*. Том II. Теория поля. –М.: Наука, 1988.
- Мандель Л., Вольф Э.** *Оптическая когерентность и квантовая оптика*. –М.: Физматлит, 2000.
- Оценка качества оптического изображения*. –М.: Издательство геодезической литературы, 1959.
- Родионов С. А.** *Математические модели формирования оптического изображения*. В сборнике «Успехи научной фотографии» Том XXIII. – М.: Наука, 1985.
- Родионов С. А.** *О дифракции в оптических системах*. *Оптика и спектроскопия*. Том 46, выпуск 4. 1979.
- Родионов С. А.** *Об изопланатизме в произвольных оптических системах*. *Оптика и спектроскопия*. Том 46, выпуск 3. 1979.
- Руссо М., Матье Ж. П.** *Задачи по оптике*. –М.: Мир, 1976.
- Сороко Л. М.** *Основы голографии и когерентной оптики*. –М.: Наука, 1971.
- Строук Дж.** *Введение в когерентную оптику и голографию*. –М.: Мир, 1967.
- Фрэнкс Л.** *Теория сигналов*. –М.: Сов. радио, 1974.
- Чересмин А. И.** *Физическая оптика. Формирование оптического изображения*. –СПб.: Санкт-Петербургский институт кино и телевидения, 1997.
- Ярославский Л. П.** *Введение в цифровую обработку изображений*. –М.: Сов. радио, 1979.
- Hopkins H. H.** *Image formation with coherent and partially coherent light*. *Photographic Science and Engineering*. Vol. 21, No. 3. 1977.
- Kopeika N. S.** *A system engineering approach to imaging*. SPIE Optical Engineering Press. 1998.
- Luneburg R. K.** *Mathematical theory of optics*. Univ. California Press. 1964.
- Saxby G.** *The science of imaging: an introduction*. IOP Publishing. 2002.
- Smith W. J.** *Modern optical engineering*. McGraw-Hill. 2000.
- Welford W. T.** *Useful Optics*. The University of Chicago Press. 1991.

Домненко Виталий Михайлович, Бурсов Михаил Владимирович

Моделирование формирования оптического изображения

Учебное пособие

В авторской редакции

Подготовка оригинал-макета В.М. Домненко, М.В. Бурсов

Дизайн обложки В.М. Домненко, М.В. Бурсов

Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного
университета информационных технологий, механики и оптики

Зав. РИО Н.Ф. Гусарова

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99.

Подписано к печати 01.07.05

Отпечатано на ризографе

Тираж 100 экз.

Заказ № 871

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных технологий,
механики и оптики
197101, Санкт-Петербург,
Саблинская ул., 14

