

## 7.1. Уравнение луча. Волновая и поперечная абберации

Обратимся к рис.7.1, на котором показаны входной и выходной зрачки, а также плоскость предмета  $x, y$  и плоскость изображения  $x', y'$ .

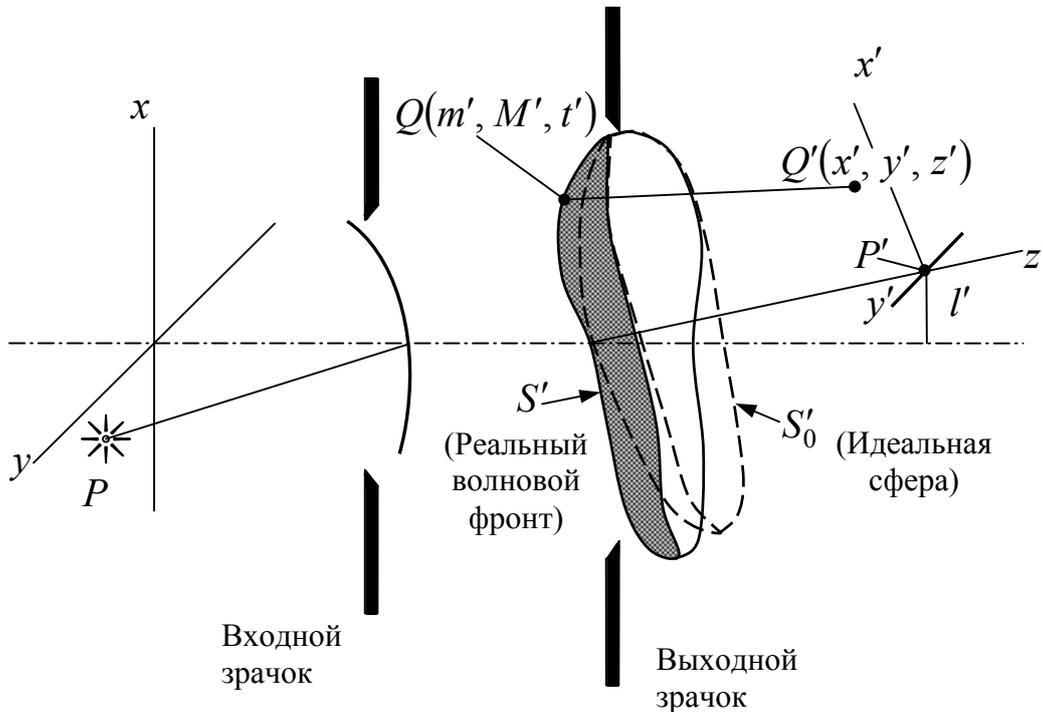


Рис.7.1. К выводу уравнения идеальной волновой поверхности

Построим сферу с центром в точке  $P'$ , которая является гауссовым изображением точки  $P$  в плоскости предмета. Сфера радиуса  $R$  пересекает оптическую ось в центре выходного зрачка. Если бы оптический путь был одинаков для каждого луча, выходящего из точки  $P$  и проходящего сквозь оптическую систему и её выходной зрачок, то сфера радиуса  $R$  совпала бы с поверхностью постоянного оптического пути (равного эйконала) и все лучи собирались бы в точке  $P'$ . Однако, в общем случае эта поверхность не является сферой и функцию, характеризующую отклонение формы этой поверхности от сферы, будем называть волновой абберацией  $W(m', M', l')$ . Определим уравнение прямой линии, проходящей через точки  $Q(m', M', t')$  и  $Q'(x', y', z')$  с дополнительным условием, чтобы эта линия была перпендикулярна к  $S'$  в точке  $Q$ . Уравнение реальной волновой поверхности  $S'$  можно записать в виде

$$m'^2 + M'^2 + t'^2 = (R + W)^2.$$

Это уравнение приводится к уравнению идеальной сферы при  $W \equiv 0$ . Поскольку нас интересуют деформации волнового фронта, не превышающие единиц длины волны света, величиной  $\frac{W^2}{R^2}$  можно пренебречь. При этом получаем

$$m'^2 + M'^2 + t'^2 - 2RW - R^2 = 0. \quad (7.1)$$

Направляющие косинусы единичного вектора

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma,$$

нормального к поверхности  $S'$  и определяющего направление линии  $QQ'$ , найдём из следующих соображений.

Отношение  $\frac{df}{|d\mathbf{r}|}$  называется производной скалярной функции  $f$  в

точке  $M$  по направлению  $d\mathbf{r}$ , при этом

$$\text{grad} f d\mathbf{r} = df.$$

Отсюда

$$\frac{df}{|d\mathbf{r}|} = \frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|} \text{grad} f = \mathbf{n} \text{grad} f' = |\text{grad} f| \cos(\mathbf{n}, \text{grad} f'),$$

т.е. производная равна проекции градиента на направление  $d\mathbf{r}$ . В рассматриваемом случае, используя (7.1), получаем

$$\frac{dS'}{dm'} = \frac{dS'}{|dm'\mathbf{i}|} = \frac{dm'\mathbf{i}}{|dm'\mathbf{i}|} \text{grad} S' = \mathbf{i} \text{grad} S' = |\text{grad} S'| \cos \alpha.$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{1}{|\text{grad} S'|} \frac{dS'}{dm'} = \frac{2}{|\text{grad} S'|} \left( m' - R \frac{\partial W}{\partial m'} \right).$$

С другой стороны, из рисунка следует, что

$$\cos \alpha = \frac{x - m'}{QQ'}.$$

Таким образом

$$\cos \alpha = 2 \frac{m' - R \frac{\partial W}{\partial m'}}{|\text{grad} S'|} = \frac{x' - m'}{QQ'}.$$

Аналогично получаем

$$\cos \beta = \frac{M' - R \frac{\partial W}{\partial M'}}{|\text{grad} S'|} = \frac{y' - M'}{QQ'};$$

$$\cos \gamma = \frac{t'}{|grad S'|} = \frac{z' - t'}{QQ'}.$$

Полученные равенства позволяют определить уравнение луча, выходящего из точки  $Q$  выходного зрачка по нормали к фронту волны и пересекающего плоскость изображения в точке  $Q'$ , в виде

$$\frac{x' - m'}{m' - R \frac{\partial W}{\partial m'}} = \frac{y' - M'}{M' - R \frac{\partial W}{\partial M'}} = \frac{z' - t'}{t'}. \quad (7.2)$$

Поскольку в большинстве практических применений  $t' \approx -R$ , уравнение (7.2) можно переписать в таком виде:

$$\frac{x' - m'}{m' - R \frac{\partial W}{\partial m'}} = \frac{y' - M'}{M' - R \frac{\partial W}{\partial M'}} = -\frac{z'}{R} - 1.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} x' &\approx -\frac{m'z'}{R} + R \frac{\partial W}{\partial m'} \left(1 + \frac{z'}{R}\right), \\ y' &\approx -\frac{M'z'}{R} + R \frac{\partial W}{\partial M'} \left(1 + \frac{z'}{R}\right). \end{aligned} \quad (7.3)$$

В гауссовой плоскости изображения ( $z' = 0$ ) выражения (7.3) принимают вид:

$$x'_0 \approx R \frac{\partial W}{\partial m'}; \quad y'_0 \approx R \frac{\partial W}{\partial M'}. \quad (7.4)$$

Итак, мы рассмотрели общий случай геометрического изображения внеосевой точки, при этом величины  $x'$  и  $y'$  определяют отклонения точки пересечения реального луча с гауссовой плоскостью изображения (точка  $Q'$ ) от гауссова изображения предметной точки  $P$ , т.е. от точки  $P'$ .

В общем случае  $\frac{z'}{R} \ll 1$ . При этом продольный сдвиг изображения (величину  $z'$ ) можно определить из выражения (7.3), положив при этом  $x' = 0$  или  $y' = 0$ :

$$z'_x \approx \frac{R^2}{m'} \frac{\partial W}{\partial m'}; \quad z'_y \approx \frac{R^2}{M'} \frac{\partial W}{\partial M'}.$$

В случае круговой симметрии функции волновой aberrации должно выполняться очевидное равенство

$$z'_x = z'_y = z'_0.$$

При  $l' = const$  функцию волновой aberrации удобно записать в виде  $W = W(m', M')$ . При этом

$$dW = \frac{\partial W}{\partial m'} dm' + \frac{\partial W}{\partial M'} dM'.$$

Отсюда

$$W = \int \frac{\partial W}{\partial m'} dm' + \int \frac{\partial W}{\partial M'} dM'. \quad (7.5)$$

В привычных обозначениях

$$x'_0 = \delta g', \quad y'_0 = \delta G'.$$

Подставив с учётом этого (7.4) в (7.5), получаем

$$W = \frac{1}{R} \left( \int \delta g' dm' + \int \delta G' dM' \right). \quad (7.6)$$

В полярной системе координат имеем

$$m' = a' \rho \cos \varphi; \quad (7.7)$$

$$M' = a' \rho \sin \varphi,$$

при этом  $\rho = \sqrt{\frac{m'^2 + M'^2}{a'^2}}$ ;  $0 \leq \rho \leq 1$ ;  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{M'}{m'}$ ,  $a'$  – радиус

выходного зрачка. В этом случае для выбранной точки предмета  $W = W(\rho, \varphi)$ . При этом

$$\frac{\partial W}{\partial m'} = \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial m'} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial m'}; \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial W}{\partial M'} = \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial M'} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial M'}.$$

Из равенства  $m'^2 + M'^2 = a'^2 \rho^2$  следует

$$a'^2 \rho d\rho = m' dm' + M' dM'. \quad (7.9)$$

Дифференцируя равенство  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{M'}{m'}$ , получаем

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{m' dM' - M' dm'}{m'^2}. \quad (7.10)$$

Подставим (7.9) и (7.10) в (7.8):

$$\frac{\partial W}{\partial m'} = \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{m'}{a'^2 \rho} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{M' \cos^2 \varphi}{m'^2}; \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial M'} = \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{M'}{a'^2 \rho} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{m'}.$$

Подставив (7.7) в (7.11), получаем

$$\frac{\partial W}{\partial m'} = \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{a' \rho \cos \varphi}{a'^2 \rho} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{a' \rho \sin \varphi \cos^2 \varphi}{a'^2 \rho^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{\cos \varphi}{a'} - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{a' \rho},$$

$$\frac{\partial W}{\partial M'} = \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{a' \rho \sin \varphi}{a'^2 \rho} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{a' \rho \cos \varphi} = \frac{\partial W}{\partial \rho} \frac{\sin \varphi}{a'} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{a' \rho}.$$

Итак,

$$\delta g' \approx \frac{R}{a'} \left( \cos \varphi \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right); \quad (7.12)$$

$$\delta G' \approx \frac{R}{a'} \left( \sin \varphi \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right).$$

Формулы (7.4) и (7.12) определяют взаимосвязь волновой и поперечной aberrаций.

## 7.2. Функция волновой aberrации. Первичные aberrации

Для aberrационной функции возможны различные представления. При осесимметричной оптической системе, если использовать для точек выходного зрачка полярные координаты  $\rho$  и  $\varphi$ , величина  $W$  зависит только от трёх инвариантов вращения:  $l'^2$ ,  $\rho^2$  и  $l' \rho \cos \varphi$ . В общем случае можно написать

$$W(\rho, \varphi, l') = a'_0 + b_0 l'^2 + b_1 \rho^2 + b_2 l' \rho \cos \varphi + c_0 l'^4 + c_1 \rho^4 + c_2 l'^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + c_3 l'^2 \rho^2 + c_4 l'^3 \rho \cos \varphi + c_5 l' \rho^3 \cos \varphi + d_0 l'^6 + d_1 \rho^6 + K, \quad (7.13)$$

где  $m' = a' \rho \cos \varphi$ ,  $\rho = \sqrt{\frac{m'^2 + M'^2}{a'^2}}$ ;  $0 \leq \rho \leq 1$ ;  $M' = a' \rho \sin \varphi$ ,

$\varphi = \arctg \frac{M'}{m'}$ ,  $a'$  – радиус выходного зрачка.

Функция волновой aberrации в соответствии с выражениями (7.12) определяет поперечную aberrацию

$$\delta r' = \sqrt{\delta g'^2 + \delta G'^2},$$

равную отклонению точки пересечения реального луча с гауссовой плоскостью изображения в общем случае от внеосевой точки  $P'(0, 0)$

в той же плоскости. Если  $W(\rho, \varphi, l') = W(\rho, l')$  при  $\frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0$ , то семейство лучей, для которых  $\rho = const = \rho_1$ , будет пересекаться с

гауссовой плоскостью изображения в кольце радиуса  $\delta r'_0$ , определяемом выражением

$$\delta r'_0 = \sqrt{\delta g_0'^2 + \delta G_0'^2} = \frac{R}{a'} \frac{\partial W}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_1}. \quad (7.14)$$

Продольный разброс (вдоль оси) для этого частного случая можно определить в полярных координатах по формуле (7.3), полагая в ней  $x' = y' = 0$ .

Используя формулу (7.11), можно показать, что для рассматриваемого кольца в выходном зрачке, т.е. при  $\rho = \rho_1$ , продольный разброс равен

$$z' \approx \frac{R^2}{a'^2 \rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_1}, \quad (7.15)$$

а общий эффект можно определить путём сопоставления составляющих от каждого кольца при  $0 \leq \rho_1 \leq 1$ . Проведём подробное исследование каждого члена степенного ряда (7.13).

1. *Постоянные члены* ( $a_0, c_0 l'^4, d_0 l'^6, K$ ). Как следует из (7.12), величина постоянных членов ряда (7.13) не влияет на величину aberrаций и, по сути дела, определяет изменение величины радиуса идеальной сферы (сферы сравнения) без изменения положения её центра (см. рис.7.2а).

## 2. Погрешность фокусировки изображения

### а) Продольная расфокусировка изображения

Если все aberrации, кроме продольной расфокусировки, отсутствуют, то выражение (7.13) принимает вид

$$W = b_1 \rho^2.$$

При этом согласно (7.14) и (7.15) получаем

$$\delta r'_0 = \frac{2b_1 R}{a'} \rho_1, \quad 0 \leq \rho_1 \leq 1, \quad z' \approx \frac{2b_1 R^2}{a'^2} = \Delta', \quad \text{т.е. все лучи собираются в}$$

точке  $\left(0, 0, \frac{2b_1 R^2}{a'^2}\right)$ . Следовательно, это не aberrация, а погрешность

продольной фокусировки изображения, которую можно устранить продольным смещением плоскости регистрации изображения из точки  $P'$  на величину  $\Delta'$ , как показано на рис.7.2б. Из полученных выражений следует соотношение

$$\frac{\Delta'}{R} = \frac{2b_1 R}{a'^2} = \frac{\delta r'_0}{a'},$$

очевидное и из геометрических соображений. Отсюда следует

$$b_1 = \frac{a'^2 \Delta'}{2R^2} = \frac{a'}{2R} \delta r'_0.$$

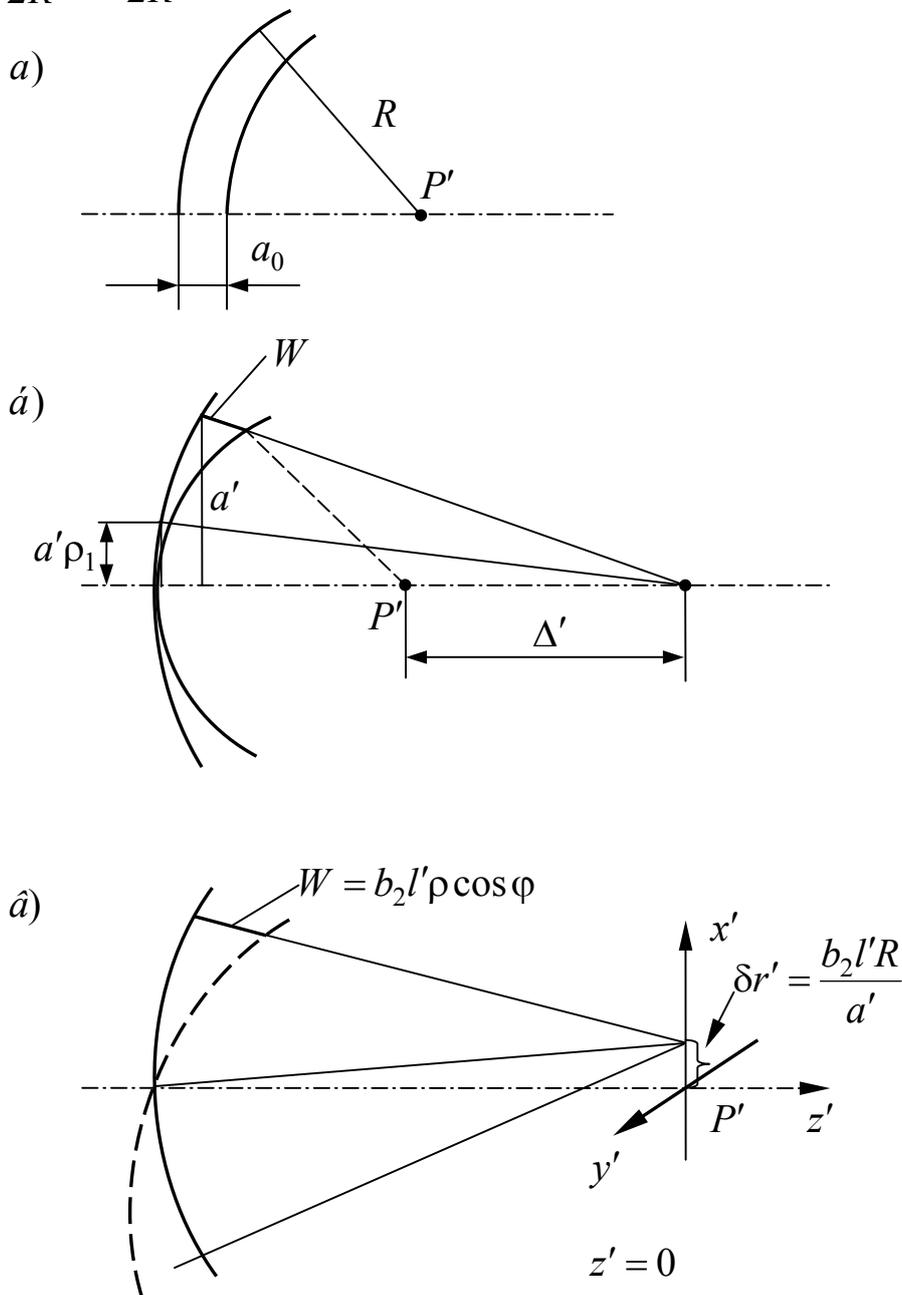


Рис.7.2. Смещение изображения точки

б) Поперечная погрешность фокусировки изображения

В этом случае выражение (7.13) имеет вид

$W = b_2 l' \rho \cos \varphi = b_2 l' \frac{m'}{a'}$ . При этом из выражений (7.4) следует

$$\delta g' = b_2 l' \frac{R}{a'}; \quad \delta G' = 0,$$

т.е. все лучи собираются в точке  $\left(\frac{b_2 l' R}{a'}, 0, 0\right)$ . Следовательно, и эта погрешность фокусировки изображения не является aberrацией, а определяется поперечным сдвигом изображения на величину  $\delta r' = b_2 l' \frac{R}{a'}$ , как показано на рис.7.2в. Отсюда  $b_2 l' = \frac{a'}{R} \delta r'$ .

### 3. Первичные aberrации (aberrации Зейделя)

Следующие пять членов степенного ряда (7.13) представляют собой первичные aberrации или, иначе, классические aberrации Зейделя третьего порядка. Третий порядок aberrаций определяется суммарным показателем степени  $l'$  и  $\rho$  членов ряда, определяющего поперечную aberrацию оптической системы.

#### а) Сферическая aberrация

Эта aberrация определяется коэффициентом  $C_1$  выражения (7.13), т.е.

$$W_c = c_1 \rho^4.$$

При этом согласно (7.14) и (7.15) получаем

$$\delta r'_0 = \frac{4R}{a'} c_1 \rho^3; \quad \Delta s' = \frac{4R^2}{a'^2} c_1 \rho^2,$$

т.е. каждому кольцу при  $\rho = \rho_1$  соответствует кольцо в гауссовой плоскости изображения. При  $\rho = 1$  эти величины приобретают максимальное значение, равное

$$\delta r'_0 = \frac{4R}{a'} c_1; \quad \Delta s' = \frac{4R^2}{a'^2} c_1.$$

Отсюда следует

$$c_1 = \frac{a'}{4R} \delta r'_0 = \frac{a'^2}{4R^2} \Delta s'.$$

Напомним, что

$$b_1 = \frac{a'^2}{2R^2} \Delta', \quad \text{при этом } W_b = b_1 \rho^2.$$

Отсюда следует возможность уменьшения эффекта влияния сферической aberrации путём введения продольной расфокусировки изображения. При этом

$$\Delta W_{\text{инд}} = W_c - W_b = c_1 \rho^4 - b_1 \rho^2 = c_1 \left( \rho^4 - \frac{b_1}{c_1} \rho^2 \right) = c_1 (\rho^4 - 2\eta \rho^2),$$

где  $\eta = \frac{\Delta'}{\Delta s'}$ .

б) *Кома*

Пусть в отличие от других коэффициент  $c_5 \neq 0$ . При этом

$$W = c_5 l' \rho^3 \cos \varphi.$$

Подставляя это выражение в соотношение (7.12), получаем

$$\delta g' = \frac{R}{a'} \left( 3c_5 l' \rho^2 \cos^2 \varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} c_5 l' \rho^3 \right) = \frac{R l' c_5}{a'} \rho^2 (3 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) =$$

$$= \frac{R l' c_5}{a'} \rho^2 (2 + \cos 2\varphi);$$

$$\delta G' = \frac{R}{a'} \left( 3c_5 l' \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \sin \varphi \cos \varphi c_5 l' \rho^3 \right) =$$

$$= \frac{R l' c_5}{a'} \rho^2 (3 \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) = \frac{R l' c_5}{a'} \rho^2 \sin 2\varphi.$$

Эти выражения можно переписать в виде

$$\delta g' = \psi \rho^2 (2 + \cos 2\varphi); \quad (7.16)$$

$$\delta G' = \psi \rho^2 \sin 2\varphi, \quad (7.17)$$

где  $\psi = \frac{R l' c_5}{a'}$ .

Выражение (7.16) удобно представить в виде:

$$(\delta g' - 2\psi \rho^2) = \psi \rho^2 \cos 2\varphi.$$

Возведя выражения (7.17) и (7.18) в квадрат и сложив, приходим к уравнению вида:

$$(\delta g' - 2\psi \rho^2)^2 + (\delta G')^2 = \psi^2 \rho^4, \quad (7.19)$$

из которого следует, что каждое кольцо выходного зрачка ( $\rho = const$ ) создаёт кружок в гауссовой плоскости изображения, радиус которого увеличивается при возрастании  $\rho$ , при этом центр кружка расположен на оси  $x'$  и смещается при возрастании  $\rho$  на величину  $2\psi \rho^2$ .

Кроме того, вследствие удвоения угла  $2\varphi$  в аргументе одному повороту луча по кольцу в выходном зрачке соответствуют два поворота в плоскости изображения. В результате действия всех зон ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) образуется картина, напоминающая комету, как показано на рис.7.3.

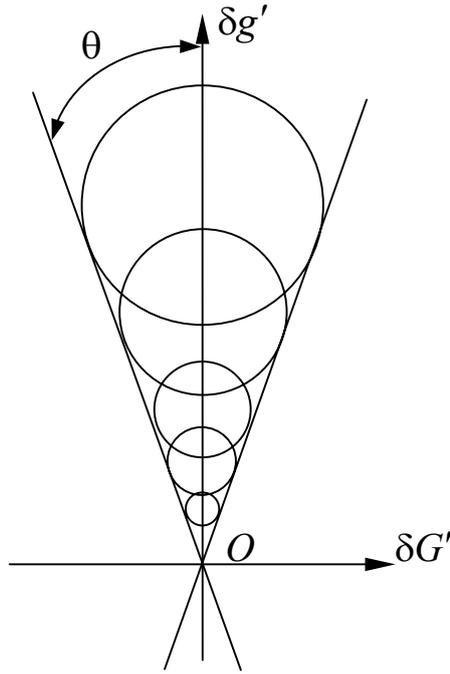


Рис.7.3. Вид абберационного пятна в изображении точки при первичной коме

в) *Астигматизм и кривизна поверхности изображения*

При наличии только этих аббераций выражение (7.13) имеет вид:

$$W = c_2 l'^2 \rho^2 \cos^2 \varphi + c_3 l'^2 \rho^2. \quad (7.20)$$

При  $\varphi = 0$  (в меридиональной плоскости):  $W_t = (c_2 + c_3) l'^2 \rho^2$ .

При  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (в сагиттальной плоскости):  $W_s = c_3 l'^2 \rho^2$ .

Таким образом, в меридиональной и сагиттальной плоскостях эта абберация имеет вид продольной расфокусировки. В общем случае  $W_s \neq W_t$ .

Равенство (7.20) удобно переписать в виде

$$W = l'^2 \left[ (c_2 + c_3) \rho^2 \cos^2 \varphi + c_3 \rho^2 \sin^2 \varphi \right] = \frac{l'^2}{a'^2} \left[ (c_2 + c_3) m'^2 + c_3 M'^2 \right].$$

Из соотношений (7.2) следует

$$x' \approx -\frac{m'}{R} z' + R \frac{\partial W}{\partial m'}; \quad y' \approx -\frac{M'}{R} z' + \frac{\partial W}{\partial M'}.$$

При этом получаем

$$x' = \left[ -\frac{z'}{R} + \frac{2Rl'^2}{a'^2} (c_2 + c_3) \right] m', \quad y' = \left[ -\frac{z'}{R} + \frac{2Rl'^2}{a'^2} c_3 \right] M'.$$

Возведя эти равенства в квадрат и сложив, получаем

$$\frac{x'^2}{\left[-\frac{z'}{R} + \frac{2Rl'^2}{a'^2}(c_2 + c_3)\right]^2} + \frac{y'^2}{\left[-\frac{z'}{R} + \frac{2Rl'^2}{a'^2}c_3\right]^2} = a'^2\rho^2,$$

откуда следует, что каждое кольцо выходного зрачка изображается в виде эллипса в плоскости  $z'$  (плоскости изображения). Максимальные размеры эллипса получаем при  $\rho = 1$ . При этом

$$\frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} = 1,$$

где  $A = \left[z' - \frac{2R^2l'^2}{a'^2}(c_2 + c_3)\right]\frac{a'}{R}$ ;  $B = \left[z' - \frac{2R^2l'^2}{a'^2}c_3\right]\frac{a'}{R}$ .

Легко видеть, что при  $c_2 = 0$  эллипс превращается в окружность.

Введём обозначение  $\frac{2R^2l'^2}{a'^2} = \sigma$ . При этом

$$x' = -A\frac{m'}{R}; \quad y' = -B\frac{M'}{R},$$

где  $A = [z' - \sigma(c_2 + c_3)]\frac{a'}{R}$ ;  $B = [z' - \sigma c_3]\frac{a'}{R}$ .

При  $A = 0$ :  $x' = 0$ ;  $y' = -B\frac{M'}{R}$ , т.е. лучи фокусируются в меридиональной плоскости, при этом изображение точки превращается в линию. Поверхность, на которой это происходит, описывается уравнением

$$z'_t = \sigma(c_2 + c_3).$$

Аналогично получаем, что лучи фокусируются в сагиттальной плоскости ( $x' = -A\frac{m'}{R}$ ;  $y' = 0$  при  $B = 0$ ) на поверхности

$$z'_s = \sigma c_3.$$

Общее расхождение между этими поверхностями равно

$$z'_t - z'_s = \sigma c_2.$$

Таким образом, коэффициент  $c_2$  представляет собой коэффициент астигматизма.

Если  $c_2 = 0$ , то  $A = B$ , а  $z'_t = z'_s$ .

При этом лучи собираются в точке на расстоянии  $z'_t = z'_s = z'_p$  от плоскости изображения Гаусса, причём

$$z'_p = \frac{2R^2}{a'^2} c_3 l'^2 = \tilde{c}_3 l'^2.$$

Это уравнение определяет отклонение поверхности точечного изображения от плоскости, а поэтому и называется кривизной поверхности изображения или кривизной поля изображения.

В общем случае  $c_2$  и  $c_3$  не равны нулю. При этом имеется поверхность  $z'_c$ , на которой изображение точки превращается в кружок. Положив  $A^2 = B^2$ , находим  $z' = z'_c$ :

$$z'_c = \frac{\sigma}{2}(c_2 + 2c_3)$$

или

$$z'_c = \frac{z'_t + z'_s}{2},$$

т.е. поверхность, на которой геометрическое изображение точки имеет вид так называемого "кружка наименьшего рассеяния", лежит посередине между поверхностями меридионального и сагиттального изображения. Все возможные состояния изображения описываются соотношениями

$$\frac{x'^2}{(z' - z'_t)^2} + \frac{y'^2}{(z' - z'_s)^2} = \frac{a'^2}{R^2} \rho^2,$$

где  $c_3 = \frac{z'_s}{\sigma}$ ;  $c_2 = \frac{z'_t - z'_s}{\sigma}$ ;  $\sigma = \frac{2R^2 l'^2}{a'^2}$ .

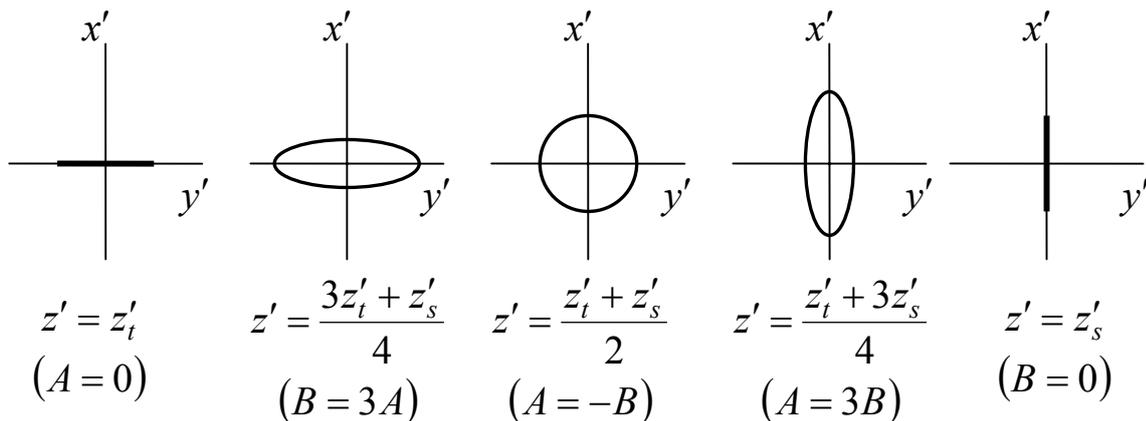


Рис.7.4. Изменение пятна рассеяния в изображении точки при смещении плоскости установки изображения

### г) Дисторсия

В этом случае имеем

$$W = c_4 l'^3 \rho \cos \varphi = \frac{l'^3}{a'} c_4 m'.$$

При этом

$$\delta g' = \frac{R}{a'} c_4 l'^3; \delta G' = 0.$$

Таким образом, для точки поля, удалённой от оси на расстояние  $l'$ , все лучи фокусируются в точке  $\left(\frac{R}{a'} c_4 l'^3, 0, 0\right)$ . Но при этом поперечный сдвиг изображения изменяется пропорционально кубу линейного поля и в зависимости от знака  $c_4$  приводит к хорошо известной либо "бочкообразной" ( $c_4 < 0$ ), либо "подушкообразной" ( $c_4 > 0$ ) дисторсии изображения предмета, если последний имеет вид сетки с квадратными ячейками, как показано на рис.7.5.

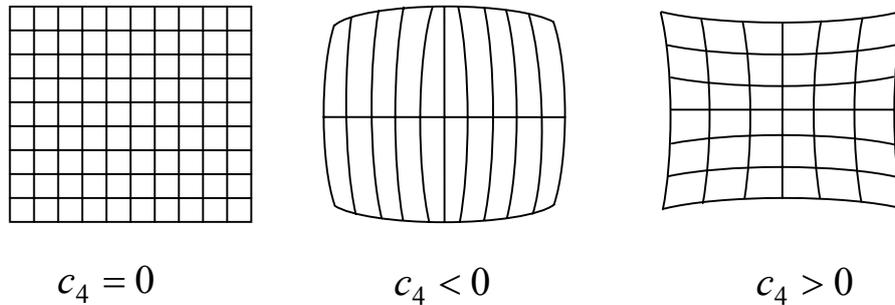


Рис.7.5. Дисторсия изображения

### 7.3. Допустимые величины первичных aberrаций

Поскольку обычно интересует изображение фиксированной точки предмета ( $l' = const$ ), удобно не выделять явную зависимость  $W$  от  $l'$  и представить разложение волновой aberrации в степенной ряд вида

$$W(\rho, \varphi) = \sum_i \sum_j W_{ij} \rho^i \cos^j \varphi = W_{00} + W_{20} \rho^2 + W_{11} \rho \cos \varphi + \\ + W_{40} \rho^4 + W_{31} \rho^3 \cos \varphi + W_{22} \rho^2 \cos^2 \varphi + W_{60} \rho^6 + \\ + W_{51} \rho^5 \cos \varphi + W_{42} \rho^4 \cos^2 \varphi + W_{33} \rho^3 \cos^3 \varphi + K, \quad (7.21)$$

где  $W_{ij}$  – коэффициент волновой aberrации, равный волновой aberrации на краю зрачка при  $\rho = 1, \varphi = 0$ ;  $i \geq j$ ,  $i + j$  – чётное число;  $p = i + j - 1$  – так называемый порядок aberrации;  $W_{00}$  – постоянная составляющая волновой aberrации, не влияющая на качество изображения (обычно в разложение не включается).

Аберрации третьего порядка (первичные аберрации или аберрации Зейделя) представляют собой деформацию волнового фронта в виде

$$W = W_{ij}\rho^i \cos^j \varphi,$$

где  $i + j = 4$ .

Для определения допустимых величин аберраций применим критерий Марешаля, определяемый среднеквадратической деформацией (отклонением от сферы сравнения) волнового фронта. Монохроматическая среднеквадратическая волновая аберрация равна

$$W_{\tilde{n}\hat{e}\hat{a}} = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 W^2(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi - \frac{1}{\pi^2} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^1 W(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.22)$$

Подставив (7.21) в (7.22), получаем

$$W_{\tilde{n}\hat{e}\hat{a}}^2 = \frac{W_{20}^2}{12} + \frac{W_{20}W_{40}}{6} + \frac{4W_{40}^2}{45} + \frac{W_{11}^2}{4} + \frac{W_{11}W_{31}}{3} + \frac{W_{31}^2}{8} + \frac{W_{22}^2}{16} + \frac{W_{22}W_{20}}{12}. \quad (7.23)$$

Используя критерий Марешаля из формулы (6.105), получаем

$$W_{\tilde{n}\hat{e}\hat{a}}^2 \leq 0,2 \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)^2, \quad (7.24)$$

т.е.  $W_{\tilde{n}\hat{e}\hat{a}}^2 \leq \frac{\lambda^2}{197,4}$  или  $W_{\tilde{n}\hat{e}\hat{a}} \leq \frac{\lambda}{14}$ .

Подставив выражение (7.21) в равенства (7.12), получаем

$$\delta g' = \frac{R}{a'} \left[ 2W_{20}\rho \cos \varphi + W_{11} + 4W_{40}\rho^3 \cos \varphi + \right. \quad (7.25)$$

$$\left. + W_{31}\rho^2 (2 + \cos 2\varphi) + 2W_{22}\rho \cos \varphi + 6W_{60}\rho^5 \cos \varphi + K \right];$$

$$\delta G' = \frac{R}{a'} \left( 2W_{20}\rho \sin \varphi + 4W_{40}\rho^3 \sin \varphi + \right. \quad (7.26)$$

$$\left. + W_{31}\rho^2 \sin 2\varphi + 6W_{60}\rho^5 \sin \varphi \right).$$

Таким образом, выражения (7.25) и (7.26) определяют взаимосвязь коэффициентов разложения функции волновой аберрации в степенной ряд с геометрическими аберрациями.

В основу определения допустимых величин остаточных аберраций положим равенство (7.23) и условие (7.24).

*Допустимая величина остаточной продольной расфокусировки изображения*

Пусть все коэффициенты в выражении (7.23) равны нулю, кроме коэффициента  $W_{20}$ . При этом согласно условию (7.24) получаем

$$\frac{W_{20}^2}{12} \leq \frac{\lambda^2}{197,4}. \text{ Отсюда имеем } W_{20} \leq \frac{\lambda}{4}, \text{ что соответствует и критерию}$$

Релея.

Радиус кружка рассеяния согласно (7.25) и (7.26) равен

$$\delta r' = \sqrt{\delta g'^2 + \delta G'^2} = 2 \frac{R}{a'} W_{20} \rho,$$

при этом продольная расфокусировка  $\Delta'$  очевидно равна

$$\Delta' \cong \delta r' \frac{R}{a'} = 2 \left( \frac{R}{a'} \right)^2 W_{20} \rho.$$

$$\text{Но } \frac{a'}{R} = \sin \sigma'. \text{ Тогда } \Delta' = 2 \frac{W_{20}}{\sin^2 \sigma'} \rho. \text{ Отсюда } W_{20} \rho = \frac{1}{2} \Delta' \sin^2 \sigma'.$$

$$\text{При } \rho = 1: \frac{1}{2} \Delta' \sin^2 \sigma' \leq \frac{\lambda}{4}$$

или

$$\Delta' \leq \frac{\lambda}{2 \sin^2 \sigma'}.$$

Пусть  $\sin \sigma' = 0,1$ , а  $\lambda = 0,6$  мкм. Тогда

$$\Delta' \leq \frac{0,6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,01} = 0,03 \text{ мкм}.$$

*Допустимая величина поперечного смещения изображения*

Согласно (7.25) имеем

$$\delta g' = \frac{1}{\sin \sigma'} W_{11}.$$

Вполне очевидно, что смещение изображения в целом на величину  $\delta g'$  не влияет на его качество. Однако, если смещение изображения определяется элементом адаптивной (синтезированной) апертуры, то в этом случае согласно (7.23) и (7.24) имеем

$$\frac{W_{11}^2}{4} \leq \frac{\lambda^2}{197,4}. \text{ Отсюда следует, что } W_{11} \leq \frac{\lambda}{7}. \text{ При этом } \delta g' \leq \frac{\lambda}{7 \sin \sigma'}.$$

*Допустимая величина остаточной сферической aberrации*

Пусть  $W_{40} \neq 0$ . При этом  $\frac{4}{45}W_{40}^2 \leq \frac{\lambda^2}{197,4}$ . Отсюда  $W_{40} \leq \frac{1}{4}\lambda$ .

Если фокусировка изображения возможна, то допустимую величину  $W_{40}$  естественно определить из условия минимизации выражения

$$W_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{a}}^2 = \frac{W_{20}^2}{12} + \frac{W_{20}W_{40}}{6} + \frac{4}{45}W_{40}^2. \quad (7.27)$$

В этом выражении переменной величиной может быть величина  $W_{20}$ . Взяв от этого выражения производную по  $W_{20}$  и приравняв её нулю, получаем

$$\frac{W_{20}}{6} + \frac{W_{40}}{6} = 0. \text{ Отсюда } W_{20} = -W_{40}.$$

Подставив в (7.27), получаем

$$W_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{a}}^2 = \frac{1}{12}W_{40}^2 - \frac{1}{6}W_{40}^2 + \frac{4}{45}W_{40}^2 = \frac{1}{180}W_{40}^2.$$

При этом

$$\frac{1}{180}W_{40}^2 \leq \frac{\lambda^2}{197,4}. \text{ Отсюда } W_{40} \leq \frac{\lambda}{1,05} = 0,95\lambda.$$

*Допустимая величина остаточной комы*

Пусть  $W_{31} \neq 0$ . При этом

$$\frac{W_{31}^2}{8} \leq \frac{\lambda^2}{197,4}. \text{ Отсюда } W_{31} \leq \frac{1}{5}\lambda.$$

Геометрическое пятно комы согласно (7.25) и (7.26) определяется уравнением

$$\left( \delta g' - 2 \frac{W_{21}}{\sin \sigma'} \rho^2 \right)^2 + \delta G'^2 = \frac{W_{31}^2}{\sin^2 \sigma'} \rho^4.$$

При  $W_{31} = \frac{1}{5}\lambda$  получаем

$$\left( \delta g' - \frac{2}{5} \frac{\lambda \rho^2}{\sin \sigma'} \right)^2 + \delta G'^2 = \frac{\lambda^2}{25 \sin^2 \sigma'} \rho^4.$$

Однако, как следует из выражения (7.23), можно подобрать такое значение координаты внутри геометрического пятна комы, при котором сумма

$$W_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{a}}^2 = \frac{W_{11}^2}{4} + \frac{W_{11}W_{31}}{3} + \frac{W_{31}^2}{8}. \quad (7.28)$$

имеет минимальное значение. Для этого, взяв производную от этой суммы по  $W_{11}$  и приравняв её нулю, получаем

$$\frac{1}{2}W_{11} + \frac{1}{3}W_{31} = 0. \text{ Отсюда } W_{11} = -\frac{2}{3}W_{31}.$$

Подставив в (7.28), при соблюдении условия (7.24) получаем

$$\frac{1}{72}W_{31}^2 \leq \frac{\lambda^2}{197,4}. \text{ Отсюда находим, что } W_{31} \leq \frac{\lambda}{1,656} = 0,6\lambda.$$

При этом геометрическое пятно комы определится уравнением

$$\left( \delta g' - \frac{1,2\lambda}{\sin \sigma'} \rho^2 \right)^2 + \delta G'^2 = \frac{0,36\lambda^2}{\sin^2 \sigma'} \rho^4.$$

#### *Допустимая величина остаточного астигматизма*

Геометрическая форма пятна в изображении точки при остаточном астигматизме согласно формулам (7.25) и (7.26) определяется уравнением

$$\frac{\delta g'^2}{(W_{20} + W_{22})^2} + \frac{\delta G'^2}{W_{20}^2} = 4 \sin^2 \sigma',$$

при этом  $z'_m = \frac{R}{a} \delta g' = 2 \frac{W_{20} + W_{22}}{\sin^2 \sigma'}$ ;  $z'_s = \frac{R}{a} \delta G' = 2 \frac{W_{20}}{\sin^2 \sigma'}$ .

Величина  $W_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{a}}^2$ , определяемая остаточным астигматизмом, согласно (7.23) равна

$$W_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{a}}^2 = \frac{W_{20}^2}{12} + \frac{W_{20}W_{22}}{12} + \frac{W_{22}^2}{16}.$$

Подбором величины  $W_{20}$  можно минимизировать величину  $W_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{a}}^2$ . Аналогично предыдущему находим

$$\frac{W_{20}}{6} + \frac{W_{22}}{12} = 0; \quad W_{20} = -\frac{1}{2}W_{22}.$$

При этом  $W_{\tilde{n}\tilde{e}\tilde{a}}^2 = \frac{1}{24}W_{22}^2$ .

При соблюдении условия (7.24) получаем

$$W_{22} \leq \frac{\lambda}{2,87} \cong 0,35\lambda.$$

## АБЕРРАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ (вместо заключения)

К числу простейших элементов, образующих оптическую систему, относится, прежде всего, сферическая поверхность, разделяющая среды с различными показателями преломления. Изучение абберационных свойств сферической поверхности определяет основу грамотного построения исходной конструкции оптической системы для последующей оптимизации её параметров.

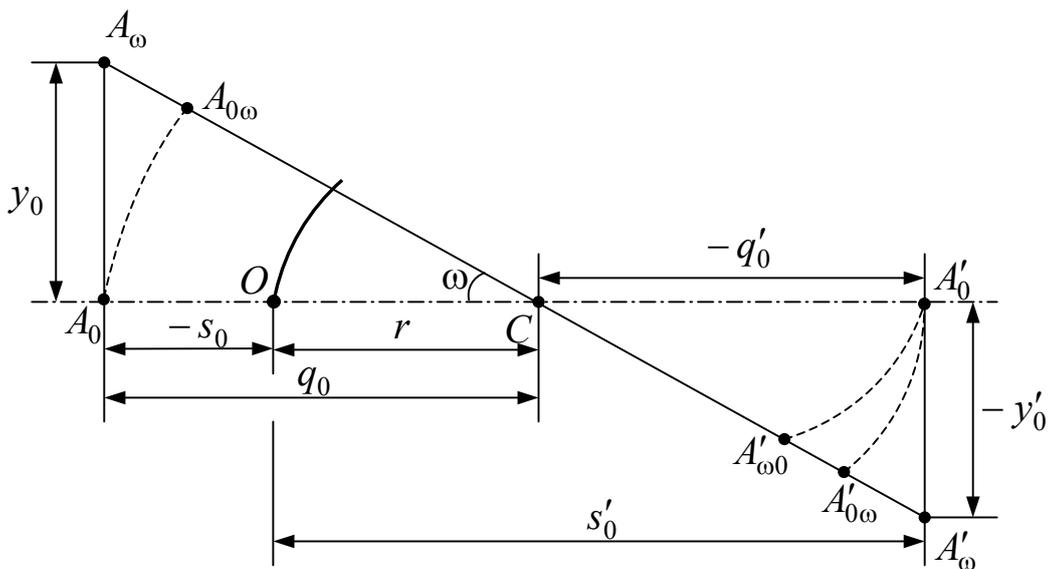


Рис.1. Пецвалева кривизна поверхности изображения, образованного сферической поверхностью

Обратимся к рис.1, на котором показана сферическая поверхность, разделяющая среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$ . Положение идеального изображения  $A'_0$  осевой точки  $A_0$  предмета определяется формулой Аббе:

$$n' \left( \frac{1}{s'_0} - \frac{1}{r} \right) = n \left( \frac{1}{s_0} - \frac{1}{r} \right). \quad (1)$$

Вполне очевидно, что при смещении точки  $A_0$  в плоскости рисунка по окружности, концентричной центру кривизны  $C$  сферической поверхности, в положение  $A_{0\omega}$  её изображение  $A'_{0\omega}$  будет расположено в точке пересечения продолжения линии  $A_{0\omega}C$  с окружностью, концентричной точке  $C$  и проходящей через точку  $A'_0$ . Линия, проходящая через точки  $A'_{0\omega}$  и  $C$ , пересекает плоскость, перпендикулярную оптической оси и проходящую через точку  $A_0$ , в

точке  $A_\omega$  на расстоянии, равном  $-y_0$  от оси, а плоскость, перпендикулярную оптической оси в точке  $A'_0$ , пересекает в точке  $A'_\omega$  на расстоянии, равном  $y'_0$  от оси. Из рисунка следует, что

$$\frac{y'_0}{y_0} = \frac{q'_0}{q_0}, \text{ где } q_0 = r - s_0, \text{ а } q'_0 = r - s'_0. \text{ Из формулы Аббе получаем}$$

$$\frac{q'_0}{q_0} = \frac{ns'_0}{n's_0} = V_0, \text{ т.е. точка } A'_\omega \text{ определяет идеальное положение}$$

изображения точки  $A_\omega$ . Однако, при смещении точки  $A_{0\omega}$  пространства предметов в положение точки  $A_\omega$  параксиальное изображение смещается из точки  $A'_{0\omega}$  в точку  $A'_{\omega 0}$ , положение которой определяется отрезком  $q'_{\omega 0}$ . Определим проекцию отрезка  $A'_\omega A'_{\omega 0}$  на оптическую ось, равную  $-\Delta s'_{\omega 0}$ , при этом, как следует, из рисунка,

$$\Delta s'_{\omega 0} = q'_0 - q'_{\omega 0} \cos \omega. \quad (2)$$

Из формулы Аббе следует, что

$$q_0 = r - s_0 = \frac{n'r q'_0}{nr + (n' - n)q'_0}. \quad (3)$$

Тогда

$$q_{\omega 0} = \frac{q_0}{\cos \omega}.$$

В этом случае

$$q'_{\omega 0} = \frac{nr q_{\omega 0}}{n'r - (n' - n)q_{\omega 0}} = \frac{nr q_0}{n'r \cos \omega - (n' - n)q_0}. \quad (4)$$

Заменив отрезок  $q_0$  в этом выражении соотношением (3), находим, что

$$q'_{\omega 0} = \frac{1}{\cos \omega} \frac{q'_0}{1 - \frac{n' - n}{n} \frac{1 - \cos \omega}{r \cos \omega} q'_0}. \quad (5)$$

Подставив соотношение (5) в выражение (2), в результате преобразований получаем

$$\Delta s'_{\omega 0} = -\frac{n' - n}{2nr} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}}{1 - \frac{n' - n}{nr} y'_0 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}} y_0'^2. \quad (6)$$

При малой величине угла  $\omega$  можно принять

$$\Delta s'_{\omega 0} \approx -\frac{n' - n}{2nr} y_0'^2. \quad (7)$$

Пусть рассматриваемая поверхность – одна из  $k$  поверхностей, образующих оптическую систему. Кривизна поверхности изображения  $\Delta s'_{\omega 0v}$  после  $v$ -ой сферической поверхности соответствует кривизне поверхности изображения  $\Delta s'_{0v}$  после всей системы поверхностей, равная

$$\Delta s'_{0v} = \Delta s'_{\omega 0v} \frac{n'}{n'_v} \prod_{v+1}^k V_v^2,$$

где  $V_v$  – поперечное увеличение изображения, образованного  $v$ -ой поверхностью. Положив в формуле (7)  $\Delta s'_{\omega 0} = \Delta s'_{\omega 0v}$ , получаем

$$\Delta s'_{0v} = -\frac{n'_v - n_v}{2n'_v r_v} y_{0v}'^2 \frac{n'}{n'_v} \prod_{v+1}^k V_v^2 = -\frac{n' n'_v - n_v}{2 n'_v n_v r_v} y_0'^2.$$

При этом кривизна поверхности изображения, образованного оптической системой в целом, равна

$$\begin{aligned} \Delta s'_0 &= \sum_{v=1}^k \Delta s'_{0v} = -\frac{n'}{2} y_0'^2 \sum_{v=1}^k \frac{n'_v - n_v}{n'_v n_v r_v} = -\frac{n'}{2} y_0'^2 \sum_{v=1}^k \frac{1}{r_v} \left( \frac{1}{n_v} - \frac{1}{n'_v} \right) = \\ &= \frac{1}{2} n' y_0'^2 \sum_{v=1}^k \frac{1}{r_v} \Delta \frac{1}{n_v} = -\frac{1}{2} n' y_0'^2 S_{IV}, \end{aligned}$$

где  $S_{IV}$  – коэффициент пецвалеовой кривизны (или четвёртая сумма Зейделя), равный

$$S_{IV} = -\sum_{v=1}^k \frac{1}{r_v} \Delta \frac{1}{n_v}.$$

Итак, параксиальное изображение точки  $A_\omega$  расположено в точке  $A'_{\omega 0}$ . Однако, в общем случае пучок лучей, выходящих из точки  $A_\omega$  плоскости предметов, не сходится в точке  $A'_{\omega 0}$ , что обусловлено сферической абберацией, вносимой в структуру пучка лучей рассматриваемой преломляющей поверхностью.

На рис.2 показан ход луча из осевой точки  $A$  в пространстве предметов через сферическую поверхность радиуса  $r$ , разделяющую среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$ , в осевую точку  $A'$  в пространстве изображений. Смысл остальных обозначений вполне понятен из рисунка. В соответствии с рисунком имеем

$$r \sin \varepsilon = q \sin \sigma, \quad (8)$$

$$r \sin \varepsilon' = q' \sin \sigma'. \quad (9)$$

Но  $n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon'$ . Тогда

$$nq \sin \sigma = n'q' \sin \sigma'. \quad (10)$$

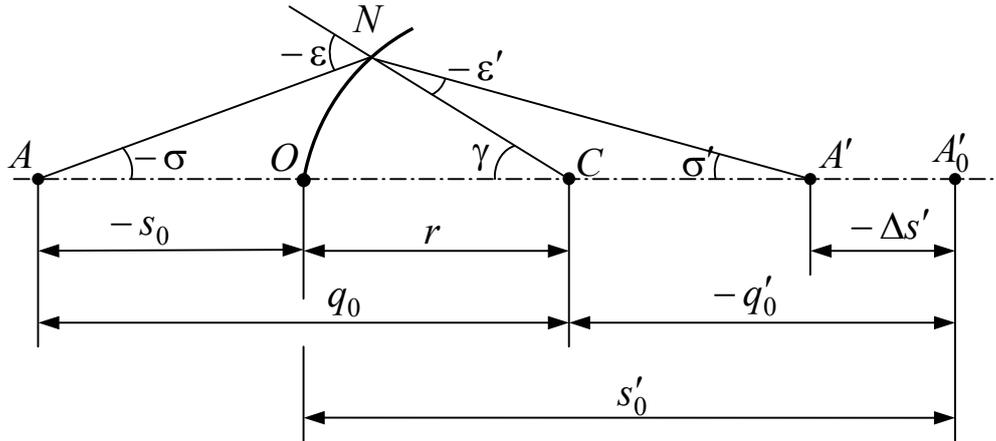


Рис.2. Сферическая aberrация в изображении точки, образованной сферической поверхностью

Отсюда следует, что

$$q' = \frac{n \sin \sigma}{n' \sin \sigma'} q = Vq,$$

где  $V$  – поперечное увеличение изображения. При этом величина продольной сферической aberrации в изображении точки  $A$  равна

$$\Delta s' = s' - s'_0 = r - s'_0 - r + s' = q'_0 - q' = (V_0 - V)q_0. \quad (11)$$

Выразив угол  $\gamma$  через углы  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , а затем через углы  $\sigma'$  и  $\varepsilon'$ , получаем  $\sigma' = \sigma + \varepsilon' - \varepsilon$ . При этом

$$\begin{aligned} \sin \sigma' &= \sin \sigma \cos \varepsilon \cos \varepsilon' + \sin \sigma \sin \varepsilon \sin \varepsilon' - \cos \sigma \sin \varepsilon \cos \varepsilon' + \\ &+ \cos \sigma \cos \varepsilon \sin \varepsilon'. \end{aligned}$$

Соотношение (8) с учётом закона преломления позволяет преобразовать полученное выражение к виду

$$V = \tilde{n} \psi^{-1}, \quad (12)$$

$$\psi = \tilde{n} \tilde{q}_0^2 \sin^2 \sigma + \sqrt{1 - \tilde{q}_0^2 \sin^2 \sigma} \sqrt{1 - \tilde{n}^2 \tilde{q}_0^2 \sin^2 \sigma} +$$

$$+ \tilde{q}_0 \sqrt{1 - \sin^2 \sigma} \left( \tilde{n} \sqrt{1 - \tilde{q}_0^2 \sin^2 \sigma} - \sqrt{1 - \tilde{n}^2 \tilde{q}_0^2 \sin^2 \sigma} \right), \quad \tilde{n} = \frac{n}{n'}, \quad \tilde{q}_0 = \frac{q_0}{r}.$$

Напомним, что некоторую функцию  $y = f(x)$ , непрерывную и имеющую все производные при  $x = 0$ , можно представить степенным рядом Маклорена в виде:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Разложив выражение (12) в ряд Маклорена и подставив его в формулу (11), получаем

$$\Delta s' = q_0 \left( a_3 \sin^2 \sigma + a_5 \sin^4 \sigma + a_7 \sin^6 \sigma + a_9 \sin^8 \sigma + \dots \right), \quad (13)$$

$$\text{где } a_3 = \frac{1}{2} V_0 \frac{1-\tilde{n}}{\tilde{n}} \tilde{q}_0 (1-\tilde{q}_0) (1+\tilde{n}\tilde{q}_0),$$

$$a_5 = \frac{1}{4} \alpha a_3 - a_3^2,$$

$$a_7 = \frac{1}{8} \beta a_3 - \frac{1}{2} \alpha a_3^2 + a_3^3,$$

$$a_9 = \frac{1}{64} \gamma a_3 - \frac{1}{16} (4\beta + \alpha^2) a_3^2 + \frac{3}{4} \alpha a_3^3 - a_3^4,$$

$$a_{11} = K ;$$

$$\alpha = 1 + (1-\tilde{n}) \tilde{q}_0 + \frac{1-\tilde{n}^3}{1-\tilde{n}} \tilde{q}_0^2,$$

$$\beta = \alpha - \tilde{n} \tilde{q}_0^2 + (1-\tilde{n}^3) \tilde{q}_0^3 + \frac{1-\tilde{n}^5}{1-\tilde{n}} \tilde{q}_0^4,$$

$$\gamma = 5 \left[ \beta + (1-\tilde{n}^5) \tilde{q}_0^5 + \frac{1-\tilde{n}^7}{1-\tilde{n}} \tilde{q}_0^6 \right] - \tilde{n} \tilde{q}_0^2 \alpha + \tilde{n} \left( 2\tilde{n} - 3 \frac{1-\tilde{n}^3}{1-\tilde{n}} \right) \tilde{q}_0^4 +$$

$$+ \tilde{n} (1-\tilde{n}) \left( \tilde{n} + \frac{1-\tilde{n}^3}{1-\tilde{n}} \right) \tilde{q}_0^5;$$

$$V_0 = \frac{\tilde{n}}{1 + (\tilde{n}-1) \tilde{q}_0}.$$

Легко убедиться, что при  $r = \infty$  или при  $s_0 = \infty$  выражение (11) приводит к неопределённости вида  $0 \cdot \infty$ . Однако, и в этих частных случаях можно получить выражения, аналогичные выражению (13). Заметим, что коэффициент  $a_3 = 0$  при  $\tilde{q}_0 = 0$ ,  $\tilde{q}_0 = 1$  и при  $\tilde{n}\tilde{q}_0 = -1$ . При  $\tilde{q}_0 = 0$  имеем  $s_0 = r_0$ , при  $\tilde{q}_0 = 1$  отрезок  $s_0 = 0$ , а при  $\tilde{n}\tilde{q}_0 = -1$  радиус кривизны сферической поверхности определяется соотношением

$$r = \frac{ns_0}{n' + n},$$

откуда следует, что во всех этих случаях осевые точки предмета совпадают с апланатическими точками сферической поверхности. Важно отметить, что при  $a_3 = 0$  обращаются в ноль и все остальные коэффициенты выражения (13).

Обратимся к рис.3, на котором показана сферическая поверхность, разделяющая среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$ . Будем считать, что точка предмета  $A_0$  и её параксиальное изображение  $A'_0$ , образованное сферической преломляющей

поверхностью, определяют положение оптической оси. В плоскости рисунка на следе предметной плоскости, перпендикулярной линии  $A_0A'_0$ , принятой за оптическую ось, на произвольном расстоянии  $y_0$  от точки  $A_0$  выбираем предметную точку  $A$ . Из точки  $A$  через точку  $C$  проводим прямую линию до пересечения в точке  $A'_\omega$  со следом плоскости изображения, параллельной предметной плоскости и проходящей через точку  $A'_0$ . Назовём луч  $AA'_\omega$ , проходящий под углом  $-\omega$  к оптической оси через центр сферической поверхности  $C$ , центральным главным лучом (ЦГЛ).

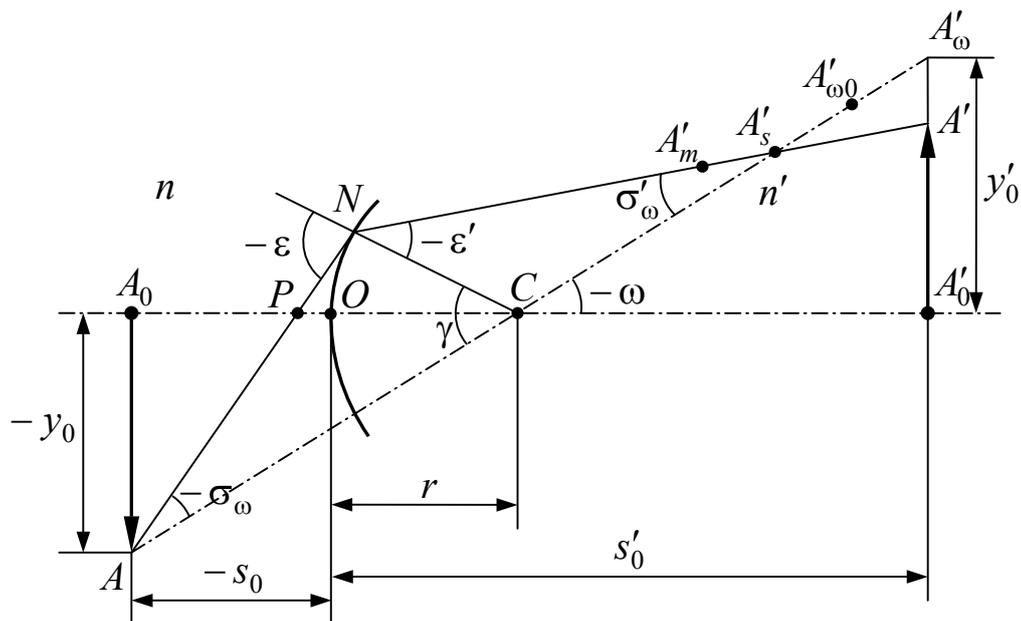


Рис.3. Схема хода лучей через сферическую поверхность

Определим центр входного зрачка преломляющей поверхности точкой  $P$  на оси  $A_0A'_0$ . При этом главный луч из точки  $A$  под углом  $-\sigma_\omega$  к ЦГЛ проходит через точку  $P$  в точку  $N$  сферической преломляющей поверхности, после преломления на которой направляется в точку  $A'$  плоскости изображения, пересекает ЦГЛ в точке  $A'_s$ , образуя с ним угол  $\sigma'_\omega$  в пространстве изображений. Качнув главный луч  $ANA'$  вокруг ЦГЛ  $ACA'_\omega$  на малый угол в противоположные стороны, образуем узкий пучок лучей в сагиттальной плоскости, исходящей из точки  $A$  и собирающийся после преломления на сферической поверхности в точке пересечения главного луча с ЦГЛ, т.е. в точке  $A'_s$ . При этом сагиттальная составляющая искривления поверхности изображения в направлении главного луча равно отрезку  $A'A'_s = -\Delta s'_s$ . На рис.3 отрезок  $A'_\omega A'_{\omega 0} = -\Delta s'_{\omega 0}$  определяет составляющую пецвалевой кривизны в

направлении ЦГЛ, а отрезок  $A'_{\omega 0}A'_s = -\Delta s'_{\omega\sigma'}$  определяет продольную сферическую абберацию преломляющей поверхности для луча  $ANA'$  на линии ЦГЛ. Используя теорему синусов, из треугольника  $A'_{\omega}A'_sA'$  находим

$$\frac{\Delta\tilde{s}'_{\omega 0} + \Delta s'_{\omega\sigma'}}{\sin(90^\circ - \omega - \sigma'_\omega)} = \frac{\Delta s'_s}{\sin(90^\circ + \omega)} = \frac{\Delta y'}{\sin \sigma'_\omega}. \quad (14)$$

Здесь  $\Delta y'$  – линейная величина дисторсии, равная  $\Delta y' = A'_0A' - A'_0A'_\omega = y' - y'_0$ . Из первого равенства (14) находим, что

$$\Delta s'_s = \frac{\Delta\tilde{s}'_{\omega 0} + \Delta s'_{\omega\sigma'}}{\cos(\omega + \sigma'_\omega)} \cos \omega, \quad (15)$$

а из второго –

$$\Delta y' = \frac{\Delta\tilde{s}'_{\omega 0} + \Delta s'_{\omega\sigma'}}{\cos(\omega + \sigma'_\omega)} \sin \sigma'_\omega, \quad (16)$$

где  $\Delta\tilde{s}'_{\omega 0} = \frac{\Delta s'_{\omega 0}}{\cos \omega}$ .

Обозначим отрезок  $PC = r - s_p = q_p$ . Из треугольника  $ACP$  находим, что

$$\frac{\sin \sigma_\omega}{q_p} = \frac{\sin(\omega + \sigma_\omega)}{q_{0\omega}}.$$

В результате последующих преобразований этого соотношения получаем

$$\sin^2 \sigma_\omega = \frac{q_p^2 \sin^2 \omega}{q_0^2 \operatorname{tg}^2 \omega + (q_0 - q_p)^2},$$

где  $q_0 = q_{0\omega} \cos \omega$ .

Но  $\operatorname{tg} \omega = \frac{y_0}{q_0}$ . Тогда

$$\sin^2 \sigma_\omega = \frac{q_p^2}{(q_0 - q_p)^2 + y_0^2} \frac{y_0^2}{q_0^2 + y_0^2}. \quad (17)$$

Применим выражение (13) для определения величины  $\Delta s'_{\omega\sigma'}$ . Заменяя при этом отрезок  $q_0$  отрезком  $q_{0\omega}$ , получаем

$$\Delta s'_{\omega\sigma'} = q_{0\omega} (a_{3\omega} \sin^2 \sigma_\omega + a_{5\omega} \sin^4 \sigma_\omega + K). \quad (18)$$

В результате последовательной подстановки выражения (17) в (18), а выражений (18) и (6) в (15) и (16) находим величину сагиттальной составляющей искривления поверхности изображения в

направлении главного луча, а также величину линейной дисторсии соответственно. При  $V_\omega = \tilde{n}\psi_\omega^{-1}$  величину угла  $\sigma'_\omega$  находим из равенства  $\sin \sigma'_\omega = \psi_m \sin \sigma_\omega$ .

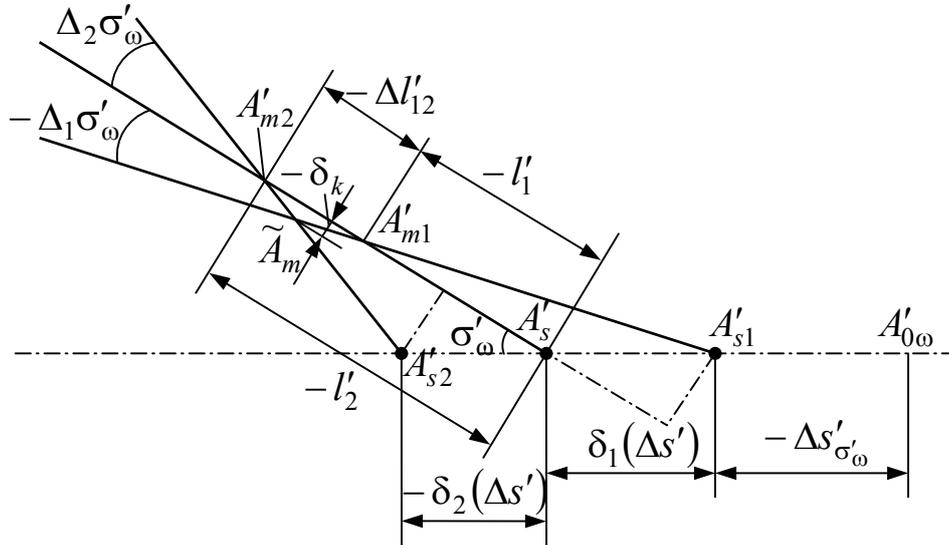


Рис.4. Структура узкого полевого пучка лучей

Проведём из точки  $A$  под малыми углами к главному лучу два луча, образующие в пространстве изображений с главным лучом углы  $-\Delta_1 \sigma'_\omega$  и  $\Delta_2 \sigma'_\omega$  и пересекающие ЦГЛ в точках  $A'_{s1}$  и  $A'_{s2}$ , как показано на рис.4. Из рисунка следует, что  $\Delta l'_{12} = l'_2 - l'_1$ . Полагая углы  $\Delta_1 \sigma'_\omega$  и  $\Delta_2 \sigma'_\omega$  малыми, находим, что

$$l'_1 = \frac{\delta_1(\Delta s') \sin \sigma'_\omega}{\Delta_1 \sigma'_\omega} + \delta_1(\Delta s') \cos \sigma'_\omega,$$

$$l'_2 = \frac{\delta_2(\Delta s') \sin \sigma'_\omega}{\Delta_2 \sigma'_\omega} + \delta_2(\Delta s') \cos \sigma'_\omega.$$

При этом

$$\Delta l'_{12} = \left[ \frac{\delta_2(\Delta s')}{\Delta_2 \sigma'_\omega} - \frac{\delta_1(\Delta s')}{\Delta_1 \sigma'_\omega} \right] \sin \sigma'_\omega + [\delta_2(\Delta s') - \delta_1(\Delta s')] \cos \sigma'_\omega. \quad (19)$$

Вполне очевидно, что величина сферической аберрации определяется величиной угла  $\sigma_\omega$ , а, соответственно, и угла  $\sigma'_\omega$ . Пусть  $\Delta s' = f(\sin \sigma'_\omega)$ . Дифференцируя это выражение и заменяя дифференциалы конечными разностями, получаем

$$\delta(\Delta s') = f'(\sin \sigma'_\omega) \cos \sigma'_\omega \Delta \sigma'_\omega.$$

В пределах такого приближения имеем

$$\frac{\delta_2(\Delta s')}{\Delta_2 \sigma'_\omega} = \frac{\delta_1(\Delta s')}{\Delta_1 \sigma'_\omega} = f'(\sin \sigma'_\omega) \cos \sigma'_\omega.$$

При этом

$$\Delta l'_{12} = f'(\sin \sigma'_\omega) \cos^2 \sigma'_\omega (\Delta_2 \sigma'_\omega - \Delta_1 \sigma'_\omega).$$

В области дифференциальных соотношений (при малых отклонениях рассматриваемых лучей от главного) справедливо равенство  $\Delta_2 \sigma'_\omega = -\Delta_1 \sigma'_\omega = \Delta \sigma'_\omega$ . Тогда

$$\Delta l'_{12} = 2f'(\sin \sigma'_\omega) \cos^2 \sigma'_\omega \Delta \sigma'_\omega.$$

Смещение точки пересечения лучей относительно главного луча определяет aberrацию, называемую комой. В соответствии с рис.4 из треугольника  $A'_{m1} \tilde{A}'_m A'_{m2}$  находим, что величина комы  $\delta_k$  равна

$$\delta_k = \frac{1}{2} \Delta l'_{12} \Delta \sigma'_\omega = f'(\sin \sigma'_\omega) \cos^2 \sigma'_\omega (\Delta \sigma'_\omega)^2.$$

В этом выражении при фиксированном положении входного зрачка величина  $f'(\sin \sigma'_\omega) \cos^2 \sigma'_\omega$  постоянна. Обозначим  $\Delta \sigma'_\omega = \sigma'$ . Тогда выражение, определяющее меридиональную кому третьего порядка, приобретает привычную форму

$$\delta_k = b \sigma'^2, \text{ где } b = f'(\sin \sigma'_\omega) \cos^2 \sigma'_\omega.$$

Пусть  $\Delta s' = \tilde{a}_{3\omega} \sin^2 \sigma'_\omega$ . Тогда  $b = 2\tilde{a}_{3\omega} \sin \sigma'_\omega \cos^2 \sigma'_\omega$ . При малой величине угла  $\sigma'_\omega$  имеем

$$\delta_k = 2\tilde{a}_{3\omega} \sigma'_\omega \sigma'^2. \quad (20)$$

Вполне очевидно, что при  $\Delta s' \neq 0$  при  $\sigma' \rightarrow 0$  точки  $A'_{m1}$ ,  $A'_{m2}$  и  $\tilde{A}'_m$  сливаются в одну точку  $A'_m$ , расположенную на главном луче, как показано на рис.3. При этом отрезок  $A'A'_m = -\Delta s'_m$  определяет меридиональную составляющую искривления поверхности изображения в направлении главного луча. Астигматическая разность меридиональной и сагиттальной составляющих искривления поверхности изображения равна отрезку  $A'_s A'_m = -\Delta s'_a$ . Как следует из рис.4, величина  $\Delta s'_a$  равна

$$\Delta s'_a = \frac{d(\Delta s')}{d\sigma'_\omega} = \sin \sigma'_\omega.$$

При  $\Delta s' = \tilde{a}_{3\omega} \sin^2 \sigma'_\omega$  имеем

$$\Delta s'_a = 2\tilde{a}_{3\omega} \sin^2 \sigma'_\omega \cos \sigma'_\omega.$$

Полагая величину угла  $\sigma'_\omega$  малой, получаем

$$\Delta s'_a = 2\tilde{a}_{3\omega} \sigma_\omega'^2. \quad (21)$$

Рассматриваемый подход к анализу aberrационных свойств сферической поверхности даёт наглядное представление о

взаимосвязи и взаимной обусловленности аберраций различного вида в изображении, образованном сферической поверхностью, позволяет оценить сложность построения исходной конструкции оптической системы, обеспечивающей требуемое качество изображения каждой точки предмета.

Школа геометрической оптики в СПбГУ ИТМО была создана на основе классической немецкой оптики трудами выдающегося физика члена-корреспондента АН СССР профессора Игнатовского Владимира Сергеевича и его ученика заслуженного деятеля науки и техники России, доктора технических наук, профессора Чуриловского Владимира Николаевича, первого декана оптического факультета, организатора и заведующего первой в университете кафедрой теории оптических приборов. Систематическое изучение аберрационных свойств отдельных элементов оптической системы (поверхностей, одиночных линз, поверхностей склейки линз, воздушной прослойки и т.д.) в области реальных полей и числовых апертур впервые предпринял выдающийся учёный-изобретатель, заслуженный деятель науки и техники России, доктор технических наук, профессор Русинов Михаил Михайлович. Развивая идеи синтеза как принципа создания рациональной конструкции оптической системы, он ввёл понятие базового элемента оптической системы и принцип построения её путём последовательного развития, основанного на постепенном введении необходимых коррекционных элементов. "Следует заметить, – писал М.М.Русинов в книге "Композиция оптических систем" – что удовлетворение требований, предъявляемых к разрабатываемой оптической системе, во многих случаях может обеспечиваться различными принципиальными схемами, что свидетельствует о существовании нескольких возможных решений. Следовательно, создание той или иной оптической системы нельзя сводить лишь к синтезу её из ряда выбранных конструктивных элементов, т.е. необходим более широкий подход, который может быть назван композицией оптических систем".

Результаты исследований, выполнявшихся М.М.Русиновым на протяжении многих десятилетий (начиная с 30-х годов прошлого века), по сути дела, определили создание русской оптической школы композиции оптических систем. Эта школа трудами её создателя М.М.Русинова и его учеников прошла стадию становления и продолжает успешно развиваться.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Л.Н. Прикладная теория аберраций. Учебное пособие. СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2002. 98 с.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 856 с.
3. Волосов Д.С., Цивкин М.В. Теория и расчёт светоптических систем. М.: Искусство, 1960. 526 с.
4. Грамматин А.П. Методы синтеза оптических систем. Учебное пособие. СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2002. 65 с.
5. Гуревич М.М. Фотометрия (теория, методы и приборы). Л.: Энергоатомиздат, 1983. 272 с.
6. Запрягаева Л.А., Свешникова И.С. Расчёт и проектирование оптических систем: Учебник для вузов. М.: Логос, 2000. 584 с.
7. Зверев В.А. Основы геометрической оптики. СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2002. 218 с.
8. Зверев В.А. Введение в оплотехнику проектирования оптических приборов. Учебное пособие. СПб: СПбГИТМО (ТУ), 1995. 104 с.
9. Зверев В.А. Оптическая система с синтезированной апертурой. Журнал «ОПМ», 1986, №12, С.12-16.
10. Ишанин Г.Г., Панков Э.Д., Андреев А.Л., Польщиков Г.В. Источники и приёмники излучения: Учебное пособие для студентов оптических специальностей вузов. СПб.: Политехника, 1991. 240 с.
11. Марешаль А., Франсон М. структура оптического изображения, М.: Мир, 1964. 295 с.
12. О'Нейл Э. Введение в статистическую оптику. М.: Мир, 1966. 254 с.
13. Родионов С.А. Основы оптики. Конспект лекций. СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2000. 167 с.
14. Русинов М.М. Габаритные расчёты оптических систем. Геодезиздат, 1959. 258 с.
15. Русинов М.М. Техническая оптика: Учебное пособие для вузов. Л.: Машиностроение, 1979. 488 с.
16. Русинов М.М. Несферические поверхности в оптике. М.: Недра, 1973. 296 с.
17. Слюсарев Г.Г. Геометрическая оптика. М.-Л., АН СССР, 1946. 332 с.
18. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
19. Поланский С. Революция в оптике. М.: Мир, 1971. 223 с.

20. Чуриловский В.Н. Теория оптических приборов. М.-Л.: Машиностроение, 1966. 564 с.

21. Чуриловский В.Н. Теория хроматизма и аберраций третьего порядка. Л.: Машиностроение, 1968. 312 с.

**Зверев В.А., Точилина Т.В. Основы оплотехники. Учебное пособие.** – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2005. – 293с.

Дизайн обложки Т.В. Точилина  
Редакционно-издательский отдел СПбГУ ИТМО  
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова  
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99.  
Подписано в печать 10.11.05.  
Заказ 876. Тираж 100 экз.