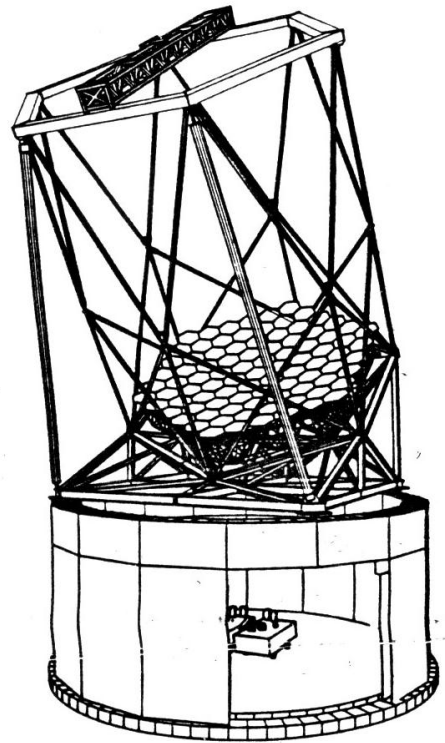


ЕРМОЛАЕВА Е.В., ЗВЕРЕВ В.А., ФИЛАТОВ А.А.

АДАПТИВНАЯ ОПТИКА



Санкт-Петербург
2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

Е.В. Ермолаева, В.А. Зверев, А.А. Филатов

АДАПТИВНАЯ ОПТИКА

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2012

Е.В. Ермолаева, В.А. Зверев, А.А. Филатов. Адаптивная оптика. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 297 с.

В пособии рассмотрены основные принципы и схемы построения адаптивных систем в оптике. Представлены области применения адаптивной оптики, при этом дан анализ соответствующих схем построения. Описаны фотометрические и структурные свойства атмосферы, влияние турбулентной атмосферы на структуру и качество изображения, показана роль адаптивной оптики в компенсации влияния турбулентности, при этом рассмотрены предельные возможности её в решении этой задачи. Рассмотрены оптические свойства возможных схем построения устройств адаптивной оптики, приведены схемы оптических систем некоторых из них. Приведены требования к юстировке элементов этих оптических систем.

Учебное пособие предназначено для студентов по направлению подготовки “Оптотехника”, а также может быть полезным для инженерно-технических работников, занимающихся проектированием оптических систем, конструированием оптических приборов и для технологов оптического производства.

Учебное пособие подготовлено на кафедре Прикладной и компьютерной оптики Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики.

Рецензент: д.т.н., профессор М.Н. Сокольский (ОАО «ЛОМО»)

Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения и оплотехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки магистров 200400 "Оптотехника" и оптическим специальностям.(протокол № 9 от 20 ноября 2012)



В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

© Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2012

© Е.В. Ермолаева, В.А. Зверев, А.А. Филатов, 2012

Оглавление

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1	
ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ АДАПТИВНОЙ ОПТИКИ.....	12
1.1 Принципиальные схемы систем адаптивной оптики	12
1.2 Основные типы систем адаптивной оптики	16
1.3 Сравнительный анализ типовых систем адаптивной оптики.....	21
1.4 Применение адаптивной оптики	23
1.4.1 Оптическая астрономия.....	23
1.4.2 Передача световой энергии на далекие расстояния	34
1.4.3 Адаптивные резонаторы.....	37
1.4.4 Лазерное сверхсжатие вещества.....	40
ГЛАВА 2	
ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ, ПОЛОЖЕННЫЕ В ОСНОВУ ПОСТРОЕНИЯ ДАТЧИКОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА	42
2.1 Интерференционный метод измерения.	43
2.2 Метод Гартмана.....	72
ГЛАВА 3	
СТРУКТУРА ИЗОБРАЖЕНИЯ, ОБРАЗОВАННОГО ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ, И ОЦЕНКА ЕГО КАЧЕСТВА	89
3.1 Оптическая система как фильтр пространственных частот	93
3.2 Структура изображения точечного предмета, образованного оптической системой	101
3.2.1 Оптическая передаточная функция.....	101
3.2.2 Оптическая передаточная функция при центральном экранировании зрачка оптической системы	105
3.3 Структура изображения, образованного оптической системой с синтезированной апертурой.....	112
3.4 Критерии оценки качества изображения, образованного оптической системой	119
ГЛАВА 4	
ОПТИКА АТМОСФЕРЫ	121
4.1 Поглощение газами.....	122

4.2	Рассеяние на частицах	124
4.3	Турбулентность	127
4.4	Атмосферная турбулентность.....	129
4.5	Структурная функция	133
4.6	Теория локальной структуры турбулентности	140
ГЛАВА 5		
ФОРМИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ		
СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД 145		
5.1	Влияние тонких случайных фильтров на качество изображения.....	146
5.1.1	Случайные поглощающие фильтры.....	148
5.1.2	Случайные фазовые фильтры	151
5.2	Влияние протяженной случайной неоднородной среды на распространение волн.....	157
5.2.1	Модель атмосферной турбулентности.....	160
5.2.2	Распространение электромагнитной волны в неоднородной атмосфере	166
5.2.3	Логарифмически-нормальное распределение амплитуды	171
5.3	ОПФ при длительной экспозиции	173
5.3.1	ОПФ при длительной экспозиции, выраженная через волновую структурную функцию	174
5.3.2	Волновая структурная функция в ближней зоне.....	178
5.3.3	Обобщение теории на случай большого пути распространения.....	185
5.3.4	Влияние плавных изменений структурной постоянной C_n^2	193
5.3.5	Атмосферный радиус когерентности.....	196
5.3.6	Волновая структурная функция при сферической форме волнового фронта.....	199
5.4	ОПФ при короткой экспозиции	200
5.4.1	Длиительные и короткие экспозиции	200
5.5	Статистическое определение формы волнового фронта, деформированного случайной оптически неоднородной средой	210

ГЛАВА 6	
ОПТИЧЕСКИЕ ТЕЛЕСКОПЫ.....	229
6.1 Краткий исторический очерк развития оптических систем астрономических телескопов.....	229
6.1.1 Рефракторы.....	231
6.1.2 Рефлекторы.....	236
6.1.3 Крупнейшие рефлекторы XX века.....	240
6.1.4 Телескопы следующего поколения.....	243
6.2 Главное зеркало телескопа.....	248
6.2.1 Деформация поверхности главного зеркала.....	248
6.2.2 Материалы, применяемые для изготовления оптических зеркал.....	251
6.3 Эффективность применения телескопов.....	254
ГЛАВА 7	
АНАЛИЗ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ СХЕМ ОПТИКИ ТЕЛЕСКОПОВ С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ.....	259
7.1 Анализ условий совместного применения системы объективов, образующих синтезированную апертуру высокоапертурного телескопа.....	262
7.2 Анализ оптической схемы телескопа с синтезированной апертурой, составленной из афокальных модулей.....	273
7.3 Варианты композиции оптических систем с синтезированной апертурой при традиционной схеме построения телескопа.....	278
ЛИТЕРАТУРА.....	294

ВВЕДЕНИЕ

В начале 70-х годов прошлого столетия стал вполне ощутим повышенный интерес специалистов к проблемам адаптации в оптике. И в отечественной, и в зарубежной литературе находили применение три тождественных термина: "адаптивная оптика" (adaptive optics), "активная оптика" (active optics) и "живая оптика" (vive optics). Однако, с течением времени, применение термина "адаптивная оптика" стало преобладать. В сравнительно короткое время в работы по адаптивной оптике включилось большое число исследователей, занимающихся самыми различными проблемами: конструированием астрономических приборов, созданием мощных лазеров, системами оптической связи, оптической обработкой информации, нелинейной оптикой и т.д. В результате границы понятия адаптивной оптики расширились настолько, что однозначное определение этого термина превратилось в проблему.

Чтобы как-то разобраться с терминологическими проблемами и убедиться в правомерности применения столь неопределённого понятия, как адаптивная оптика, уместно вспомнить, что в теории управления адаптивные системы известны сравнительно давно, задолго до появления адаптивной оптики. К основным понятиям автоматики следует отнести: управляемый объект, управление, автоматическое управляющее устройство, автоматическую систему, воздействие, сигнал, обратную связь и др. Эти понятия являются общими для автоматического управления в самых различных областях науки и техники независимо от конкретных особенностей, принципа действия и практического назначения той или иной автоматической системы [1]. Автоматическая система любой сложности состоит из управляемого объекта (объекта автоматического управления) и автоматического управляющего устройства.

Автоматической системой (системой автоматического управления, или системой автоматического регулирования) называют совокупность управляемого объекта и управляющего устройства, взаимодействующих между собой в соответствии с законом (алгоритмом) управления.

Управляемый объект – это совокупность технических средств (машин, аппаратов, устройств), которая нуждается в оказании специально организованных воздействий извне для достижения поставленной цели управления.

Автоматическим управляющим устройством называется устройство, осуществляющее воздействие на управляемый объект в соответствии с заложенным в нём законом управления.

Физические величины (координаты) объекта, которые преднамеренно изменяются или сохраняются неизменными в процессе управления, называются регулируемыми, или управляемыми, величинами.

Если в автоматической системе управляющее воздействие вырабатывается на основе информации об отклонении управляемой величины от требуемого значения, то говорят, что система построена на основе принципа управления по отклонению, или принципа обратной связи. Первыми промышленными автоматическими системами, в которых был реализован принцип управления по отклонению, явились автоматический регулятор уровня воды в котле паровой машины, изобретённой И.И. Ползуновым в 1765 году, и центробежный регулятор скорости вращения вала паровой машины Уатта (1784г.). Принцип управления по возмущению, или принцип компенсации возмущений, состоит в том, что управляющее воздействие в системе вырабатывается в зависимости от результатов измерения возмущения, действующего на объект. Системы, построенные по этому принципу, работают по разомкнутой цепи, т.е. не имеют обратной связи. Современные автоматические системы высокой точности строят на основе принципа комбинированного управления, сочетающего в себе принципы управления по отклонению и по возмущению. При этом недостатки обоих принципов при их объединении в основном устраняются.

Названные принципы автоматического управления долгое время были единственными. В предисловии к книге У.Р.Эшби "Введение в кибернетику" академик А.Н.Колмогоров так определяет кибернетику: "Кибернетика занимается изучением систем любой природы, способных воспринимать, хранить и преобразовывать информацию, и использовать её для управления и регулирования". Такое определение позволяет любую науку считать кибернетикой. Техническую кибернетику обычно отождествляют с автоматикой. Успешное развитие автоматики позволило применить в автоматических системах новый принцип управления, называемый принципом адаптации (приспособления). Отличительные особенности этого принципа можно пояснить на примере самонастраивающейся автоматической системы, которая состоит из основной системы и

дополнительных устройств [1]. Блок-схема системы представлена на рис.1.1.

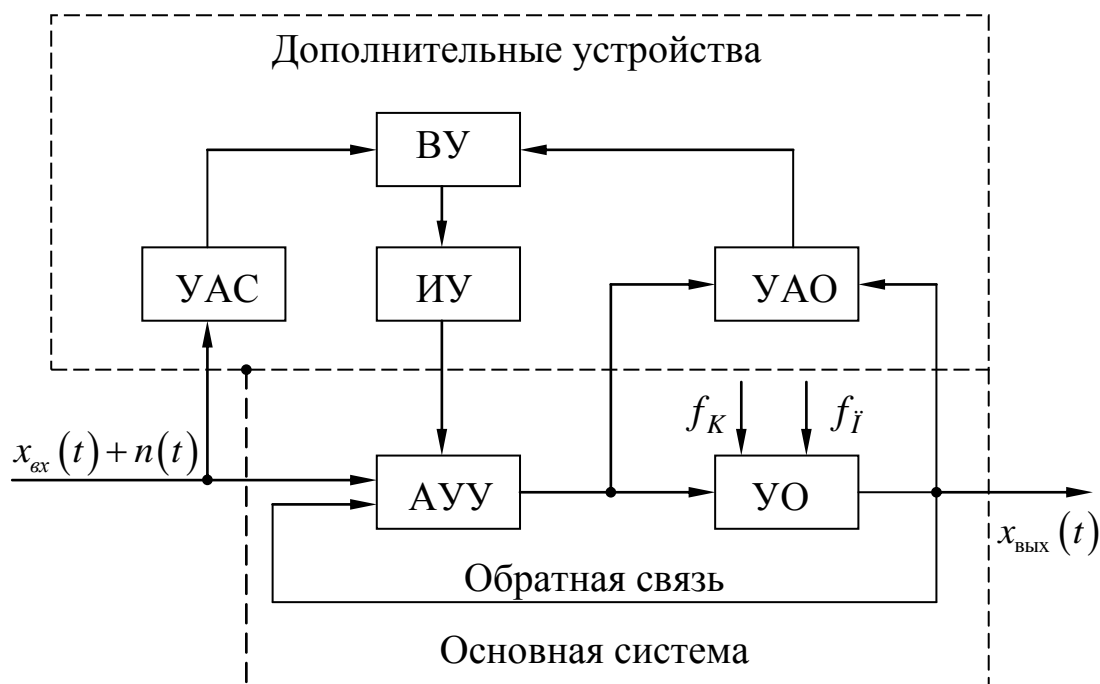


Рис.1.1. Блок-схема адаптивной системы автоматического управления

Основная система построена на основе принципа управления по отклонению и включает управляемый объект (УО) и автоматическое управляющее устройство (АУУ). На её вход вместе с полезным сигналом $x_{\text{вх}}(t)$ поступает помеха $n(t)$. Спектральные плотности этих функций могут изменяться в процессе работы системы. Кроме координатного возмущения $f_K(t)$, на УО действует параметрическое возмущение $f_I(t)$, при этом динамические характеристики управляемого объекта изменяются в широких пределах. В таких сложных условиях работы система должна обладать способностью настройки своего основного управляющего устройства (АУУ).

Для достижения требуемых показателей качества процесса управления к основной системе подключены следующие дополнительные устройства, образующие контур самонастройки:

- устройство анализа входного сигнала (УАС) оценивает свойства входного сигнала, например, скорость и ускорение изменения задающего воздействия $x_{\text{вх}}(t)$, а также определяет спектральную плотность помехи $n(t)$ или отношение сигнал/шум. Такой анализ необходим для выбора критерия оптимальности системы;

- устройство анализа объекта (УАО) предназначено для оценки изменений динамических характеристик управляемого объекта. Если, например, под воздействием параметрического возмущения $f_{II}(t)$ коэффициент передачи объекта изменяется, то это изменение можно оценить количественно на основе анализа функций $u(t)$ и $x_{вых}(t)$; где $u(t)$ – управляющее воздействие:

$$u = F(x_{вх}; f_k);$$

- вычислительное устройство (ВУ) определяет способ изменения характеристик основного управляющего устройства (параметров, структуры или закона управления) на основе заложенных в нём критериев оптимальности системы и информации, получаемой от устройств анализа сигнала и объекта;

- исполнительное устройство контура самонастройки (ИУ) выполняет функцию настройки управляющего устройства в соответствии с сигналами, получаемыми от вычислительного устройства. Воздействие самонастройки V является функцией многих переменных:

$$V = F(x_{вх}, x_{вых}, n, u, t, \dots).$$

Таким образом, работу контура самонастройки можно представить как процесс автоматической настройки управляющего устройства основной системы по совокупности текущей информации об изменяющихся условиях работы для достижения поставленной цели управления.

Современная адаптивная оптика переживает время своего становления и только вступает в период подлинной адаптации. Развитие адаптивной оптики было стимулировано в первую очередь такими задачами, для успешного решения которых необходимо устранять возмущения волнового фронта, вызываемые неконтролируемыми случайными воздействиями. К наиболее известным системам такого типа относятся:

- наземные телескопы для астрономических исследований, разрешающая способность которых ограничивается оптической неоднородностью земной атмосферы;

- системы формирования и фокусировки лазерного излучения;
- лазерные измерительные системы, работающие в атмосфере;
- оптические системы мощных лазеров.

Важную область, примыкающую к перечисленным вопросам, составляет проблема создания лазерных информационно-

измерительных систем и комплексов с адаптивной пространственной структурой.

При измерении блеска яркой звезды эффективность телескопа пропорциональна квадрату его диаметра и не зависит от качества построенного им изображения, что совпадает с весьма распространенным, в том числе и в некоторых астрономических кругах, интуитивным мнением. Именно эта точка зрения определяет, по-видимому, создание гигантских телескопов. С другой стороны, эффективность телескопа, понимаемая как способность обнаружения слабых точечных объектов, определяется его диаметром, качеством образованного им изображения и свойствами используемых приёмников [2]. Однако, по мере роста апертуры телескопа искажения, вносимые атмосферой, всё в большей мере снижают качество изображения. Поэтому высокая потенциальная разрешающая способность большого телескопа практически никогда не реализуется. Эта проблема может быть решена средствами адаптивной оптики. Дэвид Фрид в предисловии к тематическому сборнику в журнале "Journal of the Optical Society of America", 67, №3, 1977 так высказался об этой проблеме [3]: "Так же как о погоде, многие имели обыкновение рассуждать о турбулентности земной атмосферы, но никто не пытался бороться с ней. Однако теперь ситуация быстро меняется. Оптическая техника достигла такого уровня развития, что у нас появилась возможность как-то противостоять вредному влиянию турбулентности на распространение оптического сигнала. Это "как-то" получило название "адаптивная оптика". К этому следует добавить, что средства адаптивной оптики позволяют не только уменьшить искажающее действие атмосферы, но и скомпенсировать искажения, вызываемые другими причинами, например, тепловыми деформациями зеркал или неточностью их изготовления. Возможность коррекции динамических искажений давно привлекала исследователей. Во всяком случае, проблема создания адаптивных телескопов представляет широкое поле деятельности для исследователей и основные результаты в этой области, по-видимому, принадлежат будущему.

Создание адаптивных систем для формирования лазерных пучков вызвано стремлением уменьшить их расходимость в атмосфере до дифракционных пределов. В отличие от адаптивных телескопов, где применяются исключительно управляемые зеркала, здесь использовалась более разнообразная техника коррекции волнового фронта.

Особо следует отметить возможность применения для формирования лазерных пучков явления обращения волнового фронта (ОВФ), наблюдаемого при нелинейных оптических процессах. При использовании ОВФ в системе отсутствуют такие элементы, как корректор волнового фронта, анализатор рассеянного объектом поля и система управления. Все эти функции объединены в одном нелинейном оптическом устройстве. Системы с ОВФ обладают высоким разрешением, что позволяет компенсировать мелкомасштабные флуктуации фазы, и весьма малым временем реакции, недостижимым с помощью адаптивных устройств другого типа. При этом следует иметь в виду, что для ОВФ излучения в реальном масштабе времени необходимо, чтобы процесс обращения успевал срабатывать быстрее, чем исказится форма волновой поверхности [4].

В лазерных измерительных системах методы адаптивной оптики получили пока значительно меньшее развитие, чем в задачах формирования световых пучков. Одной из причин было, по-видимому, мнение, что в измерительных системах, например, интерферометрах, необходима высокая степень компенсации искажений, недостижимая обычно с помощью простых корректоров.

В оптических системах мощных лазеров возникают различные нерегулярные искажения волнового фронта, что приводит к ухудшению параметров выходного излучения. Причиной искажений в этих устройствах являются флуктуации оптических параметров среды, а также нелинейные эффекты, вызываемые интенсивным излучением. Для компенсации искажений и получения пучка дифракционного качества перспективно применение внутрирезонаторных корректирующих элементов. Это могут быть устройства ОВФ или управляемые зеркала. Применение внутрирезонаторной коррекции является одним из главных отличий последней задачи от задачи формирования лазерного пучка в атмосфере.

Задачи адаптивной оптики достаточно разнообразны. Однако их объединяет общая идея – устранение нерегулярных искажений, возникающих при распространении света в неоднородной среде с помощью управляемых оптических элементов.

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ АДАПТИВНОЙ ОПТИКИ

1.1 Принципиальные схемы систем адаптивной оптики

Для того чтобы выявить типичные черты систем адаптивной оптики, обратимся к нескольким простым примерам. На рис. 1.1а показана структурная схема телескопа с сегментированным зеркалом, представленная для простоты в виде двух субапертур.

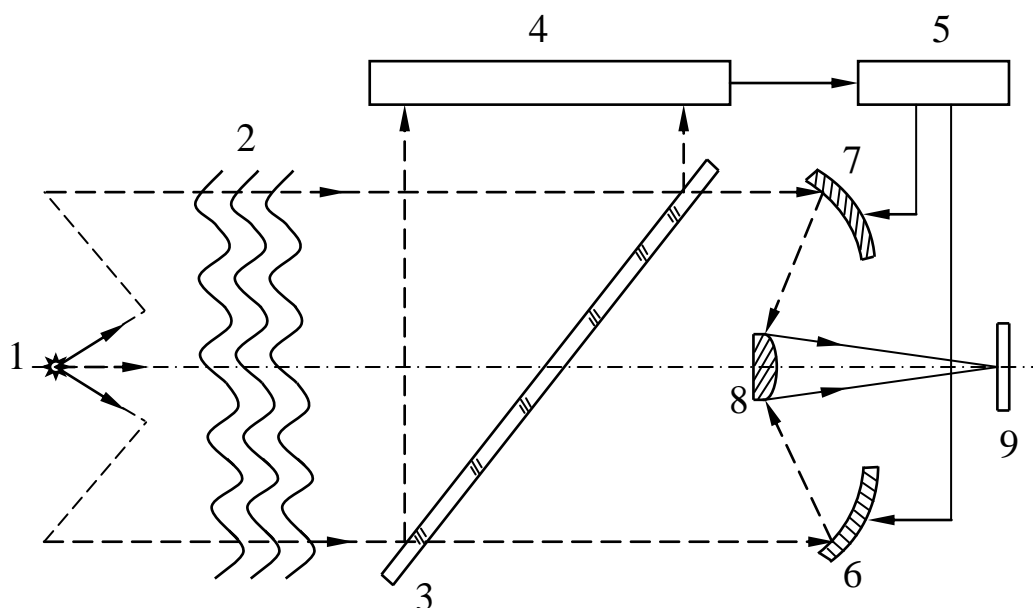


Рис. 1.1а Принципиальная схема адаптивного телескопа с прямым управлением

Свет от звезды 1 проходит через атмосферу 2, искажающую волновой фронт, и далее попадает на светоделитель 3. Отраженный светоделителем свет попадает на датчик 4, где регистрируется деформация (искажения) приходящего от объекта волнового фронта. Информация об этом поступает в управляющее устройство 5, где вычисляются требуемые величины подвижек управляемых зеркал 6 и 7 и формируются соответствующие сигналы управления. Основным пучок света проходит светоделитель 3 и отражается зеркалами 6, 7 и 8. Эти зеркала образуют изображение звезды в плоскости 9. Особенностью такой системы является то, что она не содержит контура обратной связи и является системой прямого управления. Системы прямого управления обладают высоким быстродействием, определяемым постоянной времени корректора и временем,

необходимым для выработки управляющих сигналов. В таких системах нет проблемы обеспечения устойчивости контура управления. Вместе с тем таким устройствам присущи серьезные недостатки. Во-первых, такая система не устраняет искажения волнового фронта, возникающие после прохождения световым пучком светоделителя 3, поскольку датчик 4 расположен до формирующей изображение системы. Во-вторых, поскольку положение корректирующих элементов в системе прямого управления ничем не контролируется, все элементы цепи управления, включая приводы зеркал 6 и 7, должны обеспечить высокую точность воспроизведения управляющих сигналов. Отмеченные недостатки весьма существенны для систем адаптивной оптики, а поэтому схема прямого управления не находит широкого применения.

На рис. 1.16 показана схема того же телескопа с системой управления, построенной на основе принципа обратной связи.

В этой системе светоделитель 3 и датчик искажений волнового фронта 4 расположены после системы зеркал 6, 7 и 8, образующих изображение звезды. Всякое искажение волнового фронта, независимо от вызвавшей его причины (атмосферная турбуленция, деформации зеркал, погрешности коррекции искажений, определяемые погрешностью работы привода и т.п.) фиксируется датчиком 4 и вызывает появление управляющих сигналов, а, следовательно, и соответствующую коррекцию искажений волнового фронта. При идеальной работе системы управления и приводов корректора на датчик 4 должен падать неискажённый волновой фронт.

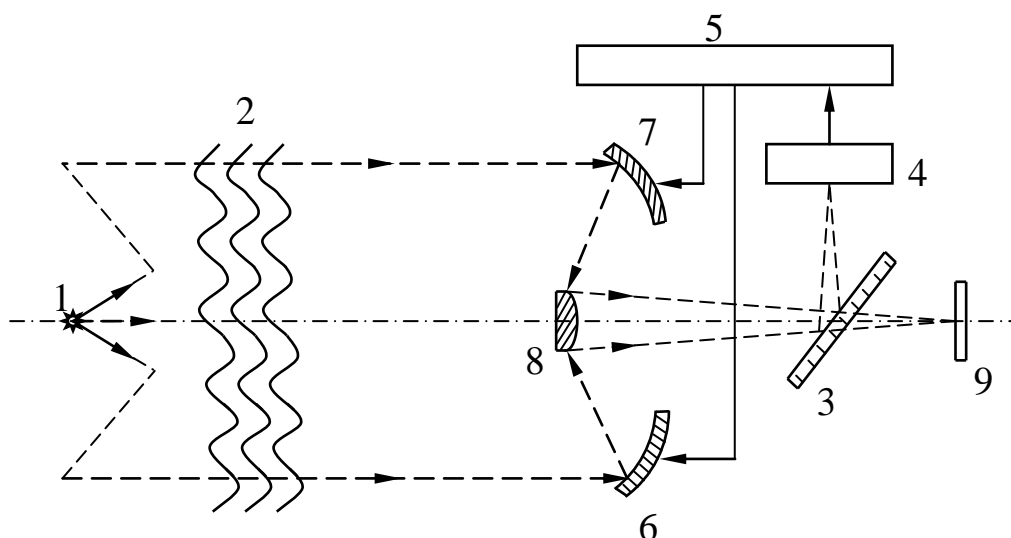


Рис. 1.16 Принципиальная схема адаптивного телескопа с системой обратной связи

В такой схеме датчик выполняет функцию индикатора, фиксирующего лишь отклонения волнового фронта от его идеальной формы. При этом требования к динамическому диапазону его работы по сравнению со схемой на рис. 1.1а значительно снижаются.

Схемы с обратной связью также не лишены недостатков: их быстродействие, как правило, заметно меньше, чем у систем прямого управления, а постоянные времени управляющего устройства должны выбираться так, чтобы обеспечить устойчивость работы контура обратной связи. Однако, достоинства систем с замкнутым контуром управления настолько существенны, что такие устройства получили наибольшее распространение.

В системе адаптивной оптики, схема которой показана на рис. 1.1б, датчик искажений волнового фронта 4 можно заменить другим устройством, регистрирующим лишь уровень интенсивности в энергетическом центре изображения точечного объекта. Процесс управления в такой системе решает задачу максимизации этой интенсивности, играющей теперь роль целевой функции (критерия качества). Для осуществления этого субапертурам 6 и 7 можно сообщить пробные движения и, наблюдая за изменением целевой функции, получить необходимую информацию для выработки сигналов управления движением корректора. Такой способ организации управления называют апертурным зондированием, которое обеспечивает максимизацию целевой функции методом, называемым "восхождением на холм".

Другим примером системы адаптивной оптики может служить система формирования лазерного пучка, для достижения максимальной плотности потока излучения (освещённости) на некотором объекте. Схема такой системы показана на рис. 1.2а.

Плоский волновой фронт, излучаемый лазером 1, преобразуется корректором 2 таким образом, чтобы после прохождения через искажающую среду (турбулентную атмосферу) 3 плотность потока излучения на объекте 4 была максимальной. При этом информация о неоднородностях среды может быть получена как при прямом (от источника 1 к объекту 4), так и при обратном (от объекта 1 к датчику 5) распространении излучения. В обоих случаях для получения информации для выработки управляющих сигналов необходимо время двойного прохождения излучения от излучателя 1 до объекта 4.

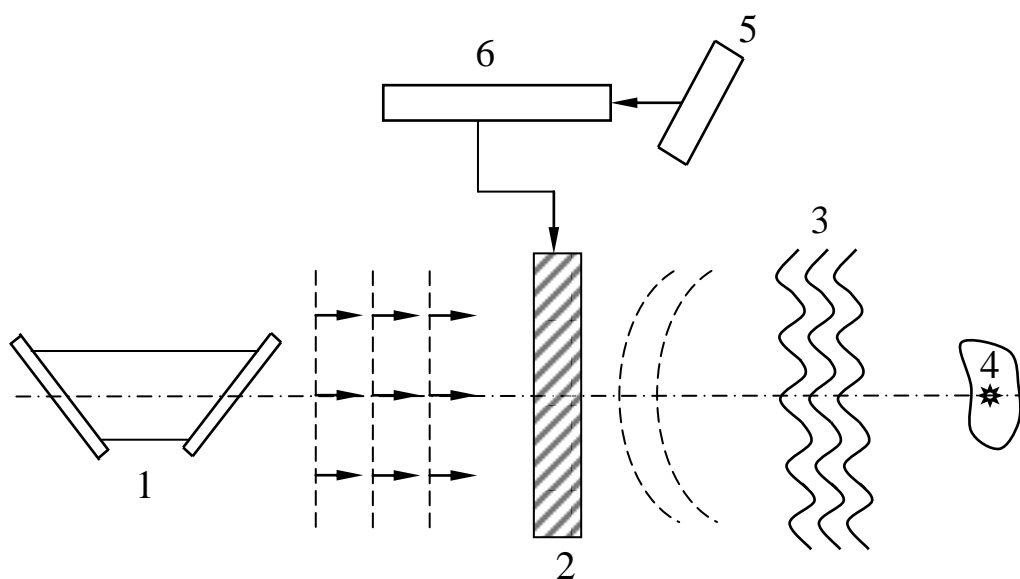


Рис. 1.2а Принципиальная схема системы фокусировки излучения с датчиком, регистрирующим рассеянное световое поле перед корректором волнового фронта

Заметим, что расположение датчика 5 перед корректором (или при разнесённых апертурах в стороне от него) не означает теперь размыкания цепи обратной связи, поскольку корректор 2 влияет на характер освещения объекта 4 и, следовательно, на отражённое им световое поле.

Возможно и другое размещение датчика 5, как показано на рис. 1.2б.

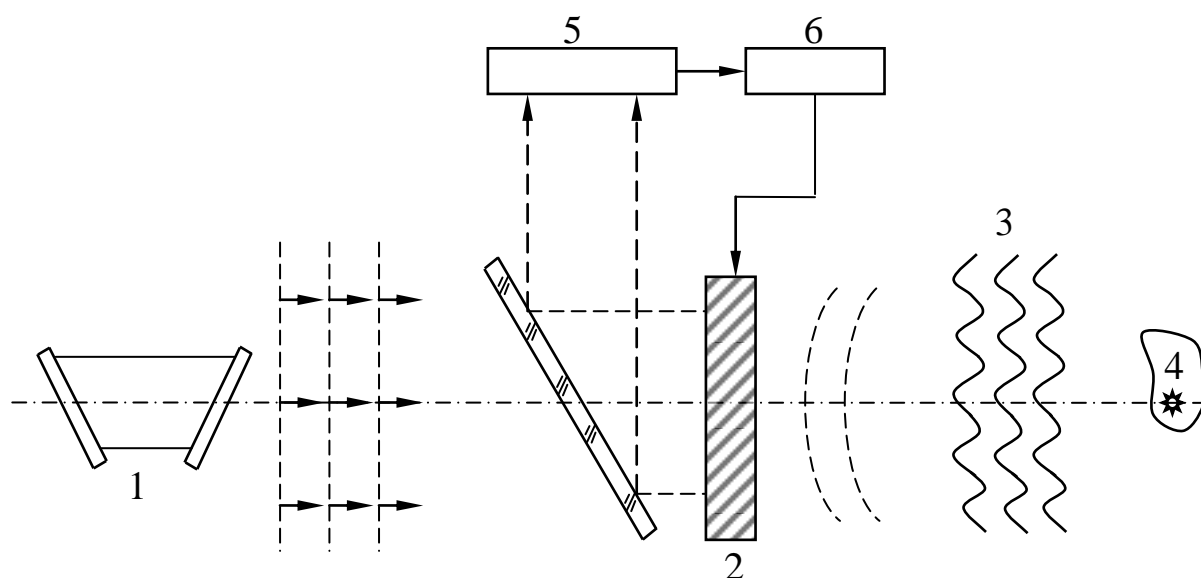


Рис. 1.2б Принципиальная схема системы фокусировки излучения с датчиком, регистрирующим рассеянное световое поле после вторичного прохождения корректора

В этом случае отражённое излучение регистрируется после вторичного прохождения корректора.

1.2 Основные типы систем адаптивной оптики

Для выполнения своих функций система адаптивной оптики должна содержать три основных компонента:

1) устройство воздействия на волновой фронт, которое может быть отражающим или преломляющим;

2) измерительное устройство, которое принимает свет и вырабатывает сигнал, связанный с оптимизируемым свойством;

3) устройство обработки информации, воспринимающее результаты измерений и преобразующее их в сигналы для управления устройством воздействия на волновой фронт.

Расположение основных компонентов определяется назначением системы. Всё многообразие систем адаптивной оптики, предназначенных для коррекции случайных искажений волнового фронта, можно свести к следующим основным типам. На рис. 1.3а и на рис. 1.3б представлены схемы систем, предназначенных для наблюдения удаленных объектов через турбулентную атмосферу. Очевидным примером таких систем могут

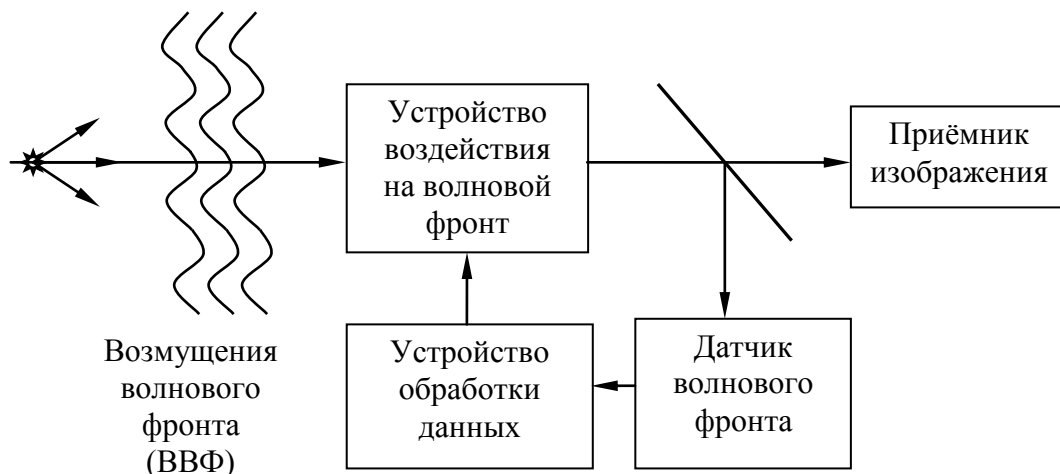


Рис. 1.3а Адаптивная система для наблюдения удалённых объектов, построенная на применении метода компенсации отклонений формы волнового фронта от номинальной

служить как наземные астрономические телескопы, предназначенные для наблюдения через земную атмосферу объектов, излучающих или отражающих свет в широкой области спектра, так и космические телескопы, предназначенные для получения информации об объектах на земной поверхности. В основу построения системы на рис.1.3а

положен метод, называемый методом компенсации отклонений формы волнового фронта от номинальной. В этом случае объект наблюдения должен удовлетворять требованиям материальной точки,

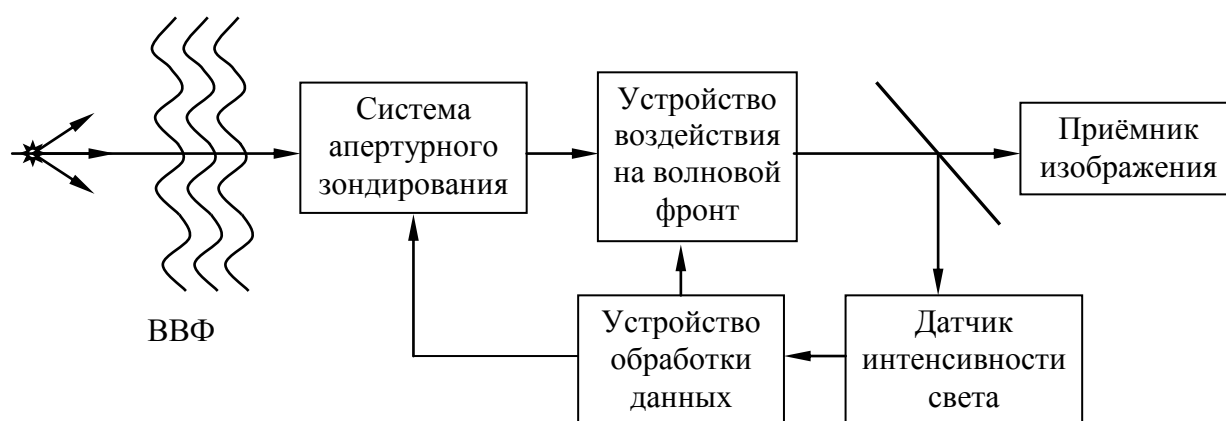


Рис. 1.3б Адаптивная система для наблюдения удалённых объектов, построенная на применении принципа повышения резкости изображения.

излучающей сферическую волну, форма которой искажается при прохождении через турбулентную атмосферу. Пучок световых лучей, падающий на оптическую систему телескопа в пределах её входного зрачка и прошедший через устройство воздействия на волновой фронт, которое находится сначала в исходном (нулевом) положении, делится светоделителем по интенсивности на две части. Одна часть пучка направляется на датчик волнового фронта, который позволяет определить положение (наклон) волнового фронта и параметры отклонения его от номинальной формы, т.е. позволяет получить исходную информацию для вычисления в устройстве обработки данных соответствующих каждому участку апертуры управляющих сигналов, которые, в свою очередь, подаются на устройство воздействия на волновой фронт. Погрешность положения и формы волнового фронта на входе датчика становится равной нулю, благодаря чему на приёмнике формируется изображение, качество которого ограничивается практически лишь дифракцией света на зрачке.

В основу построения системы на рис.1.3б положен принцип повышения резкости изображения. В этом случае производят пробные возмущения принимаемого волнового фронта и с помощью датчика интенсивности света, расположенного в плоскости, оптически сопряженной с плоскостью изображения, оценивают их

влияние по критерию максимальной резкости. Заметим, что принцип повышения резкости применим как в случае "точечного" предмета наблюдения, так и в том случае, когда угловая величина предмета конечна. Реальное распределение освещённости в изображении $E_i(x', y')$ отличается от идеального $E_0(x', y')$ из-за влияния на размер пятна рассеяния в изображении точки явления дифракции света на входном зрачке, остаточных aberrаций и атмосферной турбулентности. При этом степень отличия E_i от E_0 можно считать мерой качества изображения. Для сравнения распределений света на предмете и изображении Э.Линфут (Linfoot E.H.) предложил три параметра. Этими параметрами являются [5]:

- относительное содержание (ёмкость) структуры T_L :

$$T_L = \iint E_i^2(x', y') dx' dy' / \iint E_0^2(x', y') dx' dy'; \quad (1.1)$$

- правдоподобие изображения Φ_L :

$$T_L = 1,0 - \frac{\iint [E_0(x', y') - E_i(x', y')]^2 dx' dy'}{\iint E_0^2(x', y') dx' dy'}; \quad (1.2)$$

- корреляционное качество Q_L :

$$Q_L = \iint E_0(x', y') E_i(x', y') dx' dy' / \iint E_0^2(x', y') dx' dy'. \quad (1.3)$$

Формально пределы интегрирования здесь $-\infty; +\infty$, но обычно достаточно интегрировать в пределах формата данного изображения. Следует заметить, что

$$Q_L = (T_L + \Phi_L) / 2.$$

Относительное содержание структуры наиболее близко подходит к тому, что обычно подразумевается под качеством изображения, поскольку величина T_L определяет искажения вариаций функции $E_0(x', y')$ в процессе ее регистрации. Величина T_L не зависит от дисторсии. Эти искажения хорошо описываются величиной Φ_L . Корреляционное качество отражает сочетание требований как к подобию изображения предмету, так и к структурному содержанию изображения. Параметры качества Э.Линфута представляют собой удобные оценочные характеристики для случаев, когда параметры поверхности предмета (распределение яркости излучения) априорно хорошо известны. В рассматриваемом случае распределение освещенности $E_0(x', y')$, как правило, неизвестно. Однако, следует заметить, что чем больше величина интеграла в числителе выражения (1.1), тем выше качество изображения. Поэтому интеграл в числителе

выражения (1.1) вполне можно принять в качестве критерия максимальной резкости. Вполне очевидно, что по мере увеличения значения интеграла будет объективно повышаться резкость изображения. Однако, метод повышения резкости изображения – это косвенный метод оценки искажений волнового фронта, а, следовательно, не гарантирует предельно высокого качества изображения.

На рис.1.4а и на рис.1.4б представлены схемы излучающих систем, предназначенных для создания максимальной плотности потока излучения (освещённости) на цели. Эти системы работают, как правило, в узком спектральном диапазоне, используя излучение лазера.

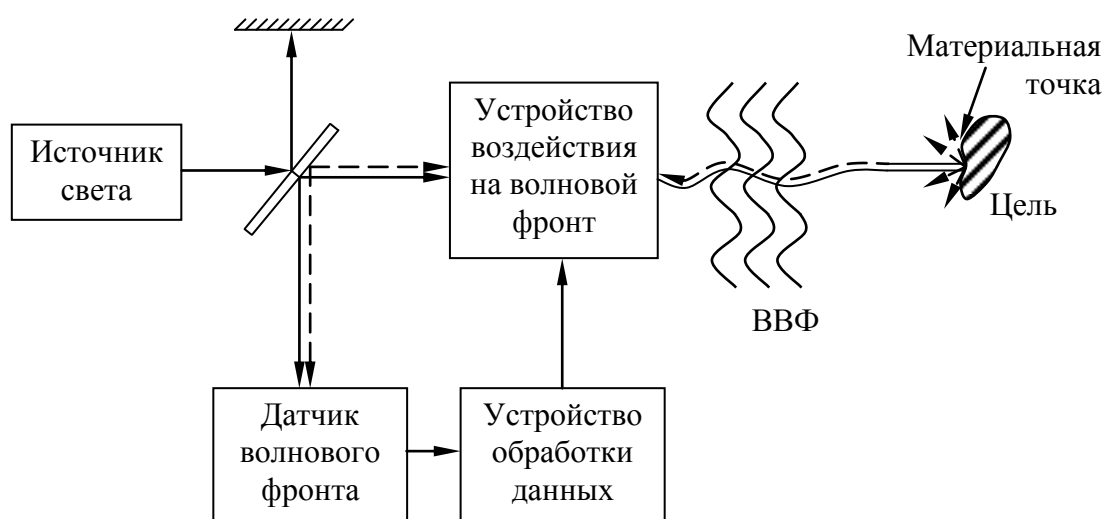


Рис.1.4а Адаптивная излучающая система, построенная на применении метода фазового сопряжения волновых фронтов

В системе с фазовым сопряжением, схема которой представлена на рис.1.4а, пучок световых лучей, достигающий цели, отражается от малых её участков, которые можно считать материальными точками, образуя сферические волны. Эти отраженные волны проходят путь распространения в обратном направлении, и, следовательно, атмосферная турбуленция оказывает на их пространственные параметры такое же воздействие, как и на излучаемый поток световых лучей. В датчике волнового фронта принимаемая волна сравнивается с опорной волной, создаваемой в приборе, и устройство обработки данных вычисляет необходимую коррекцию, которая сопряжена по фазе с измеренным искажением фронта. Затем по команде устройство воздействия на волновой фронт производит требуемую коррекцию излучаемого волнового фронта. Таким образом, предыскажение, наложенное на излучаемую волну, компенсирует искажения на пути

распространения, благодаря чему на цель придёт волновой фронт сферической формы, которая максимизирует плотность светового потока на цели. При этом следует иметь в виду, что суммарное время двойного прохождения светом турбулентной среды и осуществления коррекции формы волнового фронта должно быть меньше или равно времени допустимого изменения турбулентности.

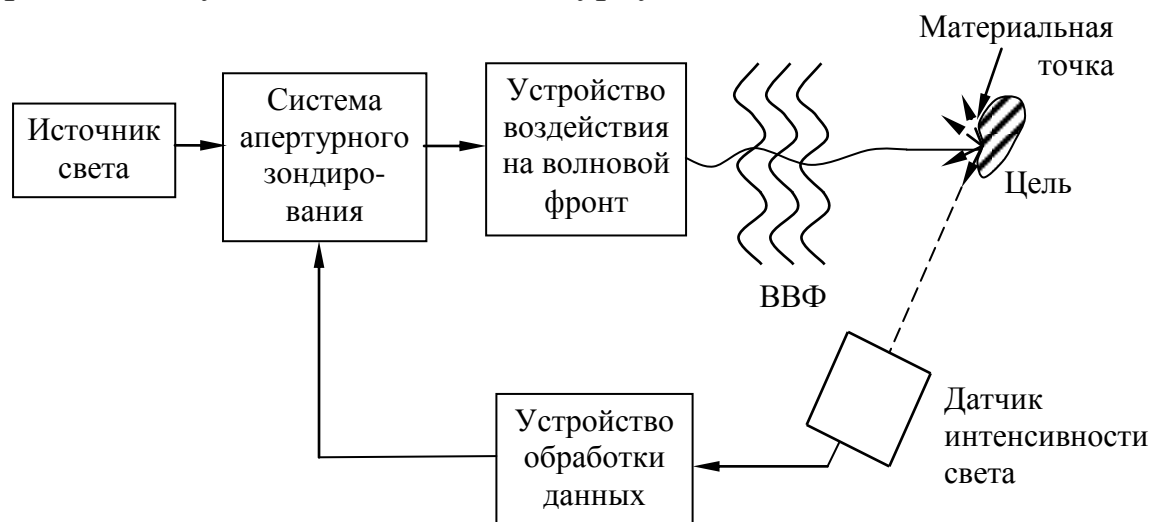


Рис.1.4б Адаптивная излучающая система, построенная на применении принципа повышения резкости изображения.

Вторая излучающая система, схема которой представлена на рис.1.4б, построена по принципу апертурного зондирования. В этой системе производят пробные возмущения излучаемого волнового фронта, анализируют световой поток, вернувшийся от цели, и на основании этого определяют, какие возмущения увеличивают плотность светового потока. Эти возмущения добавляют в волновой фронт, и процесс итераций продолжается до тех пор, пока плотность потока не станет максимальной.

Качество работы рассмотренных типов систем адаптивной оптики зависит от таких факторов, как погрешность измерения отклонений формы волнового фронта, быстродействие цепи обратной связи по сравнению с постоянной времени возмущений, пространственное разрешение корректора волнового фронта. Есть, однако, важные и существенные различия между методом компенсации волнового фронта и методом фазового сопряжения с одной стороны, и методом апертурного зондирования и повышения резкости – с другой. Они связаны с эффективностью использования принимаемого потока фотонов, сложностью аппаратуры и оптимизируемыми параметрами.

1.3 Сравнительный анализ типовых систем адаптивной оптики

В методах фазового сопряжения и компенсации погрешности формы волнового фронта отклонения формы волнового фронта от номинальной на каждом участке апертуры (на элементарной апертуре, субапертуре) измеряют отдельным приёмником, при этом приёмников столько, сколько субапертур, и работают они одновременно. Пусть плотность потока падающего излучения равна E фотонов в секунду на квадратный метр, площадь субапертуры равна S_i квадратных метров и допустимое время реакции следящей системы составляет t секунд. Тогда число фотонов, регистрируемых на субапертуре за время t , равно

$$N = \eta ES_i t, \quad (1.4)$$

где η – квантовый выход приёмника. Глубина модуляции сигнала $m_1 \leq 1$ определяется только параметрами датчика волнового фронта и не зависит от числа субапертур, так как для каждой из них есть свой приёмник света. Отсюда максимальное отношение сигнала к среднеквадратичному шуму при каждом измерении равно

$$\rho_1 = m_1 \frac{N}{\sqrt{N}}, \quad (1.5)$$

так как статистическая флуктуация числа зарегистрированных фотонов равна \sqrt{N} . При этом максимальная величина

$$\rho_{1\max} = \sqrt{N}.$$

В результате получаем, что в методах фазового сопряжения и компенсации отклонений формы волнового фронта от номинальной отношение сигнал/шум и, следовательно, точность измерения фазы не зависит от полного числа субапертур (при одинаковых их размерах). Это даёт возможность компенсировать искажения на больших апертурах, не снижая эффективности.

В системах с апертурным зондированием и в системе повышения резкости изображения приёмник света регистрирует изменение полного потока от всей апертуры для каждого пробного возмущения. Полный поток равен kN . Но так как за время t нужно сделать теперь k независимых измерений, эффективное число фотонов на одно измерение снова оказывается равным N . Из-за того, что работает один приёмник света, глубина модуляции сигнала каждым из k пробных возмущений равна $m_2 \leq \frac{1}{k}$. Следовательно, отношение сигнала к среднеквадратичному значению шума для одного измерения составляет

$$\rho_2 = m_2 \frac{N}{\sqrt{N}}, \quad (1.6)$$

максимальная величина которого равна

$$\rho_{2\max} = \frac{\sqrt{N}}{k}.$$

Таким образом, при постоянной плотности светового потока и постоянном размере субапертуры отношение сигнал/шум и, соответственно, точность фазовых измерений по методу апертурного зондирования и повышения резкости обратно пропорциональны числу субапертур k , а, следовательно, полной площади апертуры.

Пусть $S_{i1} = S_{i2}$; $\eta_1 = \eta_2$, а $t_1 = t_2$. При этом при $\rho_{1\max} = \rho_{2\max}$ получаем

$$E_2 = k^2 E_1.$$

Из сопоставления полученных соотношений следует, что при неизменном размере субапертуры плотность потока фотонов, необходимая для обеспечения заданной точности измерения деформаций волнового фронта, не зависит от k в методах фазового сопряжения и компенсации деформации волнового фронта и пропорциональна k^2 в методах апертурного зондирования и повышения резкости.

Сложность систем фазового сопряжения и компенсации деформаций волнового фронта определяется числом субапертур и увеличивается по мере роста числа k . В системах апертурного зондирования и повышения резкости применяется один приёмник независимо от числа субапертур k . Однако, в этом случае сложность систем определяется необходимостью управления каждой из субапертур при их последовательной и многочастотной вибрациях. На практике общее число субапертур, а, следовательно, и общая площадь апертуры, ограничивается частотной характеристикой управляющего устройства.

Заметим, что в системах фазового сопряжения деформации волнового фронта компенсируются, используя принцип оптической обратимости, согласно которому фазовые искажения волнового фронта, распространяющегося по данной траектории в одном направлении, равны комплексно-сопряжённым искажениям волнового фронта, идущего в противоположном направлении. Этот принцип справедлив только для линейных сред. Мощные пучки лазерного излучения вызывают нелинейные эффекты, так как нагревают среду, в которой они распространяются. При этом условие

оптической обратимости нарушается и поток излучения удается лучше сконцентрировать, если непосредственно оптимизировать интенсивность излучения на цели. Именно так и работает система с апертурным зондированием.

1.4 Применение адаптивной оптики

1.4.1. Оптическая астрономия

Созданная Г. Галелеем и впервые направленная на небо в 1610 году зрительная труба позволила ему сделать поразжающие воображение современников открытия. Такой эффект применения определил потребность в развитии оптики телескопов и, прежде всего, его объектива. Совершенствовалась технология обработки оптических поверхностей, однолинзовая конструкция объектива заменялась ахроматической двухлинзовой, создавались объективы все большего диаметра. Развитие теоретических основ оптики способствовало лучшему пониманию структуры изображения, образованного оптикой телескопа, а совершенствование производства – улучшению качества изображения. По мере совершенствования инструментальной оптики астрономы все больше убеждались в переменном и весьма заметном влиянии атмосферы на качество изображения наблюдаемых объектов. В 1953 году американский астроном Х.У. Бэбкок предложил нанести на поверхность главного зеркала слой масла и, управляя толщиной этого слоя в реальном времени, компенсировать атмосферные искажения волнового фронта [6]. Идеи положившие начало развитию линейной адаптивной оптики, были высказаны академиком В.П. Линником [7].

В 1957 году В.П. Линник рассмотрел принципиальную возможность компенсации атмосферных искажений при астрономических наблюдениях с помощью зеркальных устройств с составной или сплошной деформируемой поверхностью. Годом позже Х.У. Бэбкок предложил использовать для этой цели управляемые оптические элементы с обратной связью [8], [9].

При атмосферной нестабильности астрономы наблюдали не только увеличение размера изображения звезды, но и хаотичные поперечные смещения его, вызванные хаотичным наклоном волнового фронта. Очевидные пути компенсации влияния последнего явления определили соответствующее направление работ в области адаптивной оптики.

В 1979 году в Государственном астрономическом институте им. П.К. Штернберга при Московском государственном университете

(ГАИШ) были начаты работы по созданию и исследованию адаптивной системы [10], которая в реальном времени компенсирует сдвиг изображения в фокальной плоскости телескопа. Первый вариант системы на базе телескопа Цейсс-600 был изготовлен в 1980 году. Структурная схема адаптивной системы представлена на рис. 1.5.

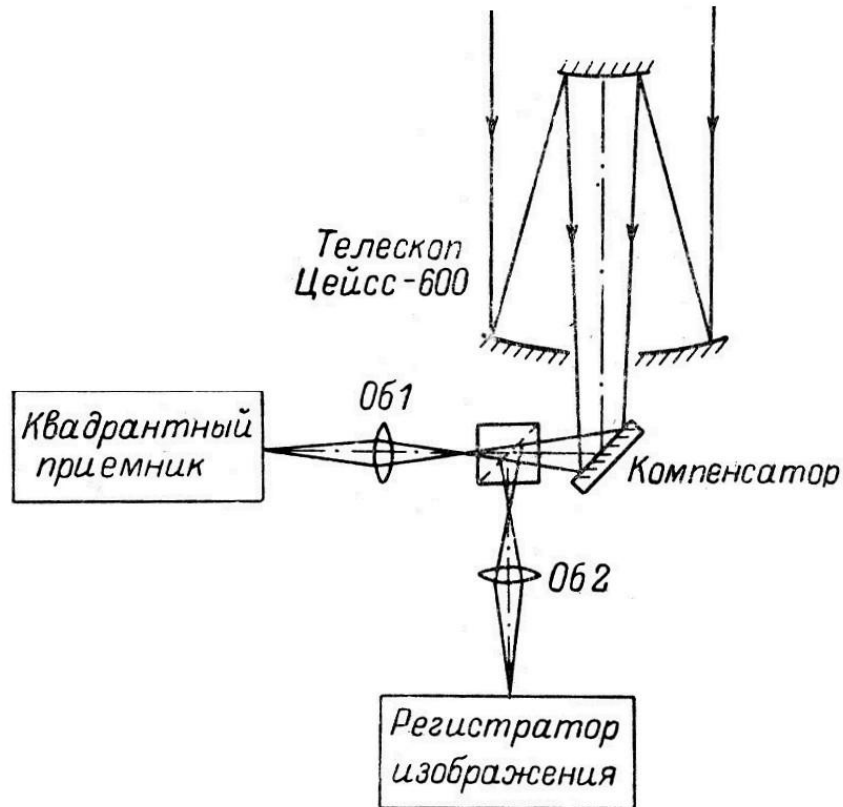


Рис. 1.5. Схема телескопа Цейсс-600

Элементом, компенсирующим поперечный сдвиг изображения в фокальной плоскости телескопа, является плоское зеркало, закрепленное на карданном подвесе. Зеркало, установленное в сходящемся пучке лучей под углом 45° к оптической оси телескопа, может вращаться вокруг двух пересекающихся и взаимно перпендикулярных осей. Отраженный от зеркала световой пучок лучей светоделительным кубиком делится на две части. Одна (основная) часть пучка объективом Об1 направляется в канал регистрации изображения, а другая — таким же объективом Об2 на координатно-чувствительный приемник (КЧП), в основу построения которого положена известная схема с четырехгранной пирамидой. Свет от звезды, отраженный от каждой из граней, попадает в свой

фотометрический канал, работающий в режиме счета фотонов. В качестве приемников излучения использованы четыре фотоэлектронных умножителя ФЭУ-119.

КЧП вырабатывает сигналы рассогласования u_x и u_y , содержащие информацию о положении энергетического «центра тяжести» изображений звезды в системе координат x, y , заданной ребрами светоделительной пирамиды; при этом

$$u_x = \frac{(\Phi_2 + \Phi_3) - (\Phi_1 + \Phi_4)}{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4} = f_x(\Delta x, t),$$

$$u_y = \frac{(\Phi_1 + \Phi_2) - (\Phi_3 + \Phi_4)}{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4} = f_y(\Delta y, t),$$

где $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ - световые потоки от объекта наблюдаемого объекта, попавшие на соответствующие грани пирамиды. Вид функций f_x, f_y определяется распределением освещенности $E(x, y, t)$ в изображении звезды. Сигналы рассогласования с КЧП поступают в блок формирования управляющих сигналов, где из них и из сигналов скорости качания зеркала \dot{x}, \dot{y} формируются напряжения u'_x, u'_y для управления электромагнитными приводами зеркала: $\tilde{u}_x = F_x(\Delta x, \dot{x}, t)$, $\tilde{u}_y = F_y(\Delta y, \dot{y}, t)$.

Предельная полоса частот, в которой система может компенсировать дрожание звезды, определяется моментом инерции зеркала и составляет 0-80 Гц.

Цикл наблюдений, выполненных сотрудниками ГАИШ с помощью телескопа Цейсс-600, оснащенного разработанной системой, показал, что рассматриваемая адаптивная система эффективно улучшает разрешение телескопа практически при всех астроклиматических условиях наблюдения.

В отечественном телескопостроении первый адаптивный инструмент с составным главным зеркалом (телескоп АСТ-1200), представляющий новое поколение астрономических телескопов, был установлен в Крымской астрофизической обсерватории АН СССР в 1978 году. Он создавался как прообраз одного из вариантов крупногабаритной оптической системы и позволял вести отработку устройств адаптивной оптики в натуральных условиях, характерных для обсерватории. После первых испытаний телескоп был доработан и в 1983 году применен для проведения исследований небесных объектов [11]. Схема телескопа представлена на рис. 1.6. Оптическая система телескопа представляет собой систему из двух отражающих

поверхностей сферической формы с двухлинзовым афокальным компенсатором в сходящемся пучке лучей В.Н. Чуриловского. Главное зеркало телескопа – составное; оно образовано из семи шестигранных элементов, как показано на рис. 1.6а, вписанных в круг диаметром 1,2 м; фокусное расстояние оптической системы телескопа $f' = 12$ м; угловое поле наблюдаемого пространства предметов $2W = 5'$.

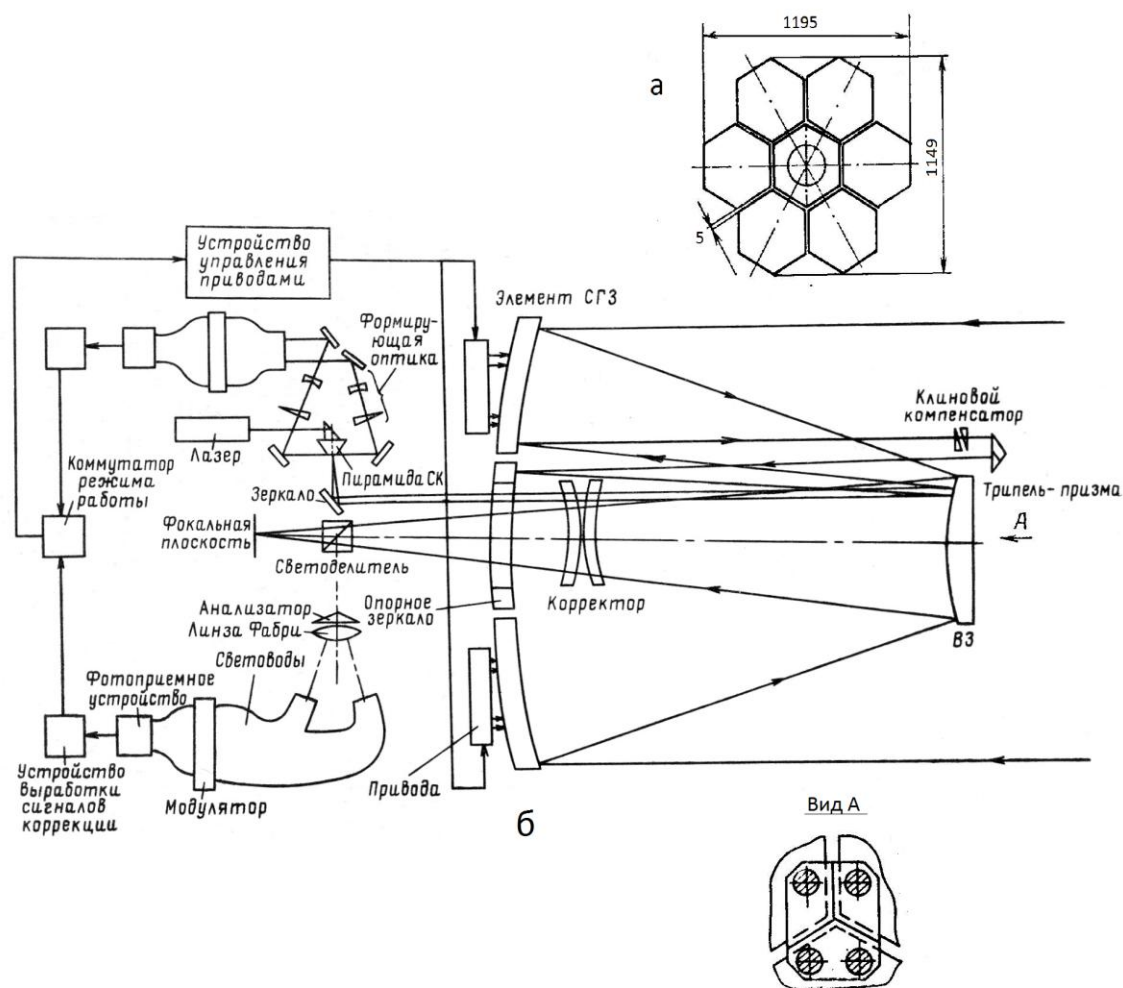


Рис. 1.6. Схема телескопа АСТ-1200

Труба телескопа представляет собой равнопрогибную конструкцию М. Серрюрьеера, т.е. систему пустотелых труб, сечение которых подобрано так, что под действием веса происходит параллельное смещение оптических элементов с сохранением их центрировки в пределах 0,1 мм.

Система управления элементами составного зеркала решает задачу непрерывной коррекции их углового положения. Отдельные изображения, формируемые этими элементами, удерживаются в

совмещенном друг с другом положении. Система управления функционирует в двух режимах:

- контролируется и восстанавливается угловое положение элементов составного зеркала,
- осуществляется адаптивное управление угловым положением элементов составного зеркала.

Принципиальное различие этих режимов заключается в том, что при втором режиме работы системы управления элементы составного зеркала удерживаются в положении, при котором совмещаются энергетические центры формируемых ими изображений точечного объекта. Таким образом, фазовое сопряжение волновых фронтов, отраженных составным зеркалом, а, по сути дела, характер сложения световых колебаний, определяется начальной юстировкой элементов зеркала, некомпенсируемыми изменениями конструкции телескопа и деформаций волновых фронтов в результате нестабильности атмосферных условий в процессе выполнения наблюдений астрономических объектов.

При работе в первом режиме для контроля взаимного углового положения элементов составного главного зеркала используется *He-Ne*-лазер, излучение которого длиной волны $\lambda = 0,6328$ мкм вводится в схему телескопа через плоскую вершину четырехгранной усеченной пирамиды с зеркальными гранями, расположенную в фокальной плоскости телескопа вне поля изображения. После отражения от плоского зеркала узкий пучок лазерного излучения, пройдя двухлинзовый компенсатор, отражается вторичным зеркалом (ВЗ) на край центрального (опорного) элемента главного зеркала. Отраженное опорным зеркалом излучение направляется в призмную возвратную систему, состоящую из трипель-призмы и клинового компенсатора. Эта система расположена так, что вышедший из нее пучок лучей попадает на край элемента составного главного зеркала (СГЗ), положение которого контролируется. После отражения от контролируемого элемента зеркала пучок лучей падает на вторичное зеркало, проходит двухлинзовый компенсатор и фокусируется на вершине пирамиды.

При отсутствии углового рассогласования между опорным и контролируемым зеркалами на противоположные грани пирамиды попадают равные по величине потоки контрольного излучения. Пройдя формирующую оптику, излучение через световоды направляется на фотоприемное устройство. Его схема устроена так, что излучение от противоположных граней пирамиды поочередно

поступает на один фотоприемник. В результате вырабатывается последовательность импульсов равной амплитуды. При появлении углового рассогласования между контролируемым и опорным зеркалами пятно контрольного излучения смещается с вершины пирамиды, равенство сравниваемых потоков нарушается и на нагрузке фотоприемника появляется последовательность импульсов, разность амплитуд которых пропорциональна угловому рассогласованию контролируемого зеркала относительно опорного. Для контроля углового положения шести элементов составного главного зеркала использовано 12 фотоприемников.

Благодаря тому, что трипель-призмы установлены напротив стыков трех соседних элементов (двух в составе главного зеркала и одного опорного), как показано на рис. 1.6 (вид б), для контроля положения всех шести элементов потребовалось только три трипель-призмы.

С выхода фотоприемного устройства сигналы поступают в устройство выработки сигналов коррекции, где формируются аналоговые электрические сигналы коррекции для каждого контролируемого зеркала по двум координатам. Далее усиленный сигнал через коммутатор режима работы поступает на соответствующие исполнительные механизмы (привода). В результате каждое элементарное зеркало разворачивается относительно двух координатных осей в направлении уменьшения величины рассогласования, т.е. возвращается в положение, заданное ему при первоначальной юстировке.

При наблюдении одиночной звезды система управления переключается в режим адаптивного управления элементами составного зеркала. При этом часть излучения, принятого телескопом от звезды, отводится светоделителем на датчик угла (анализатор положения изображения), который представляет собой стеклянную (прозрачную) четырехгранную пирамиду с острой вершиной, расположенной в осевой точке фокальной плоскости телескопа. Преломляющие грани пирамиды делят изображение звезды на четыре части. Линза Фабри, установленная за пирамидой, формирует четыре изображения входного зрачка телескопа. Каждое из этих изображений образовано излучением, прошедшим через одну из граней пирамиды. С изображениями зрачков совмещены входные торцы световодов, которые подводят излучение к фотоприемному устройству. Излучение от каждого из зеркал, прошедшее противоположные грани пирамиды, поочередно подается на один фотоприемник. При

смещении изображения звезды с вершины пирамиды освещенность на входах световодов меняется, и на нагрузке фотоприемника вырабатывается последовательность импульсов, отличающихся по амплитуде. Последующая обработка сигналов выполняется как и при первом режиме работы системы управления.

Система коррекции атмосферных искажений со значительно большим числом степеней свободы, названная RTAC (Real-Time Atmospheric Compensation), разработанная в начале семидесятых годов прошлого столетия фирмой Jtek (США), содержала телескоп с апертурой 30 см и корректор на базе монолитного пьезоэлектрического зеркала с 21 каналом управления [12]. Блок-схема системы RTAC показана на рис.1.7.

Сходящиеся в фокальной плоскости телескопа световые пучки лучей, излучаемые наблюдаемым объектом, оптической системой L_1 преобразуются в параллельные (коллимированные), падающие на корректор волнового фронта. При разработке системы RTAC исследовались различные способы коррекции волнового фронта.

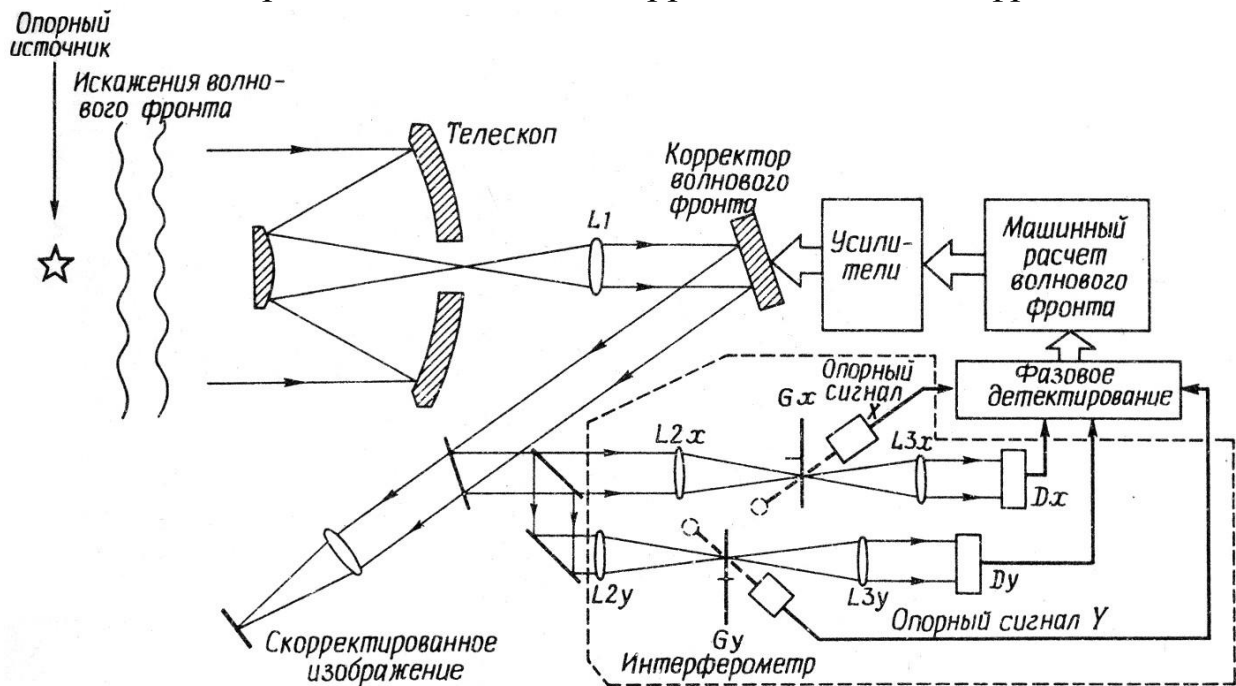


Рис. 1.7. Блок-схема системы компенсации атмосферных искажений в реальном времени

В частности, были рассмотрены тонкие плоские зеркала с дискретными решетками пьезоэлектрических приводов, устройства с переменным показателем преломления, использующие электрооптические кристаллы, а также монолитное

пьезоэлектрическое зеркало. Это зеркало оказалось наилучшим устройством для коррекции волнового фронта в видимом диапазоне длин волн.

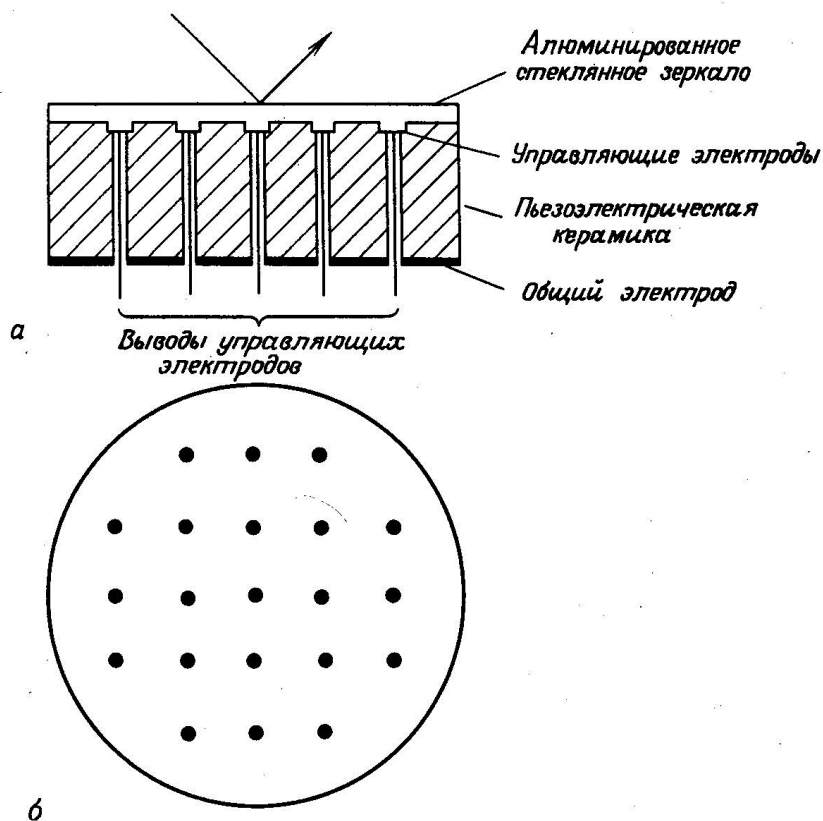


Рис. 1.8. Монолитное пьезоэлектрическое зеркало. а – поперечное сечение; б – вид сверху; показана конфигурация индивидуально управляемых электродов

Монолитное пьезоэлектрическое зеркало выполнено из единого пьезокерамического блока (цирконат-титанат свинца) с наклеенной на верхнее основание отражающей пластиной, как показано на рис.1.8. Зеркало представляет собой пластину высотой 1,5 см и диаметром 12 см с 21 управляющим электродом [9]. Общий электрод расположен на нижнем основании, а управляющие электроды, на которые подается управляющее напряжение, подведены под отражающую пластину. Резонансные частоты зеркала расположены выше 25 кГц, что позволяет использовать их в широкополосных адаптивных системах. Зеркало в системе РТАС обладает достаточно широкой частотной характеристикой (от 0 до 10 кГц), высокой стабильностью и надежностью работы.

Часть излучения, формирующего изображение наблюдаемого объекта, плоской светоделительной пластиной направляется в датчик

волнового фронта. Основным элементом датчика волнового фронта является интерферометр поперечного сдвига, с помощью которого измеряются наклоны волнового фронта. Плоский светоделитель датчика делит анализируемый пучок лучей на два, один из которых направляется в канал, где осуществляется поперечный сдвиг пучка в направлении оси OX , а другой – в канал, где осуществляется сдвиг в направлении оси OY . В каждом из каналов интерференционная картина образуется в результате сложения сдвинутых пучков лучей и проецируется на матрицу приемников, как показано на рис. 1.9 [9].

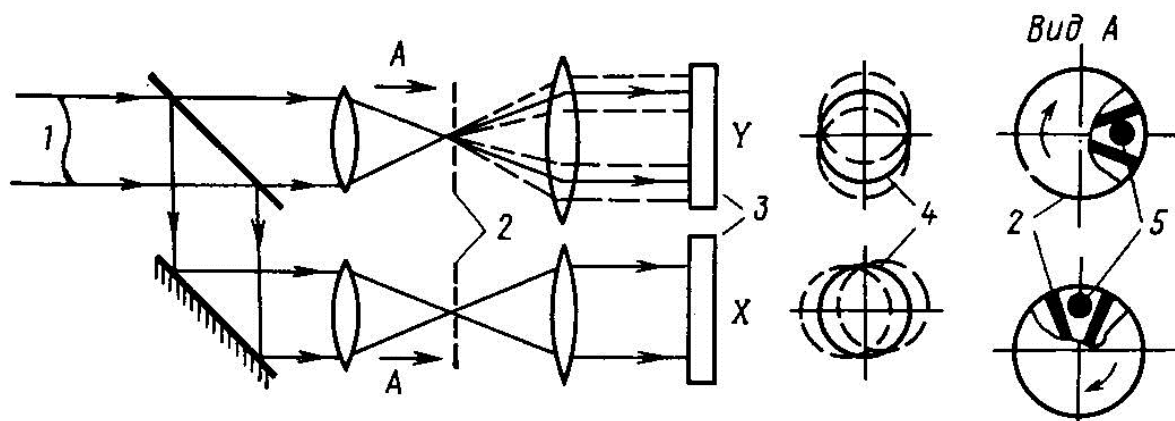


Рис. 1.9. Схема интерферометра поперечного сдвига: 1 – излучение; 2 – радиальные дифракционные решетки; 3 – матрицы приемников; 4 – сдвиговые интерференционные картины; 5 – положение перетяжки пучка относительно оси вращения

Сдвиг производится дифракционными решетками, установленными в фокальных плоскостях оптических систем L_2 и L_3 . На рис. 1.9 показаны смещения световых пучков лучей 0, +1 и -1 дифракционных порядков. Дифракционные решетки имеют вид радиальных решеток (решетки Ронки) и выполнены из круглых пластин с чередующимися прозрачными и непрозрачными секторами. Решетки вращаются вокруг оси симметрии, что вызывает модуляцию освещенности интерференционной картины. Частота модуляции равна произведению частоты вращения и числа полос на решетке. Изменение интенсивности на матрице приемников определяется зависимостью $0,5 + 2 \frac{\gamma}{\pi} \cos[\omega t + \varphi(x)]$ (по осям OX и OY зависимость аналогична), где ω , γ - частота и глубина модуляции соответственно; $\varphi(x)$ - фаза переменного сигнала.

Деформации волнового фронта анализируемого пучка отображаются на матрице приемников так, что каждый участок

деформаций соответствует определенному приемнику. Выделенные электронными средствами значения $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ связаны с наклоном волнового фронта относительно осей OX и OY в точке (x, y) соотношениями, где $\varphi(x) \sim \frac{\partial W}{\partial x}$, $\varphi(y) \sim \frac{\partial W}{\partial y}$; W - деформация волнового фронта. Зная наклоны в точках (x, y) расположения приемников, можно восстановить весь профиль анализируемого волнового фронта. Заметим, что локальный наклон волнового фронта приводит к поперечному смещению образованного им изображения в плоскости радиальной решетки, а, следовательно, к смещению фазы колебаний интенсивности на соответствующем приемнике [13], пропорциональному наклону волнового фронта. Для телескопа, входной зрачок которого равен одному метру, при атмосферной турбулентности, характеризующейся длиной когерентности 10 см, система коррекции даёт улучшение предельного углового разрешения в десять раз [12].

Развитие астрономического приборостроения наряду с совершенствованием и созданием новой навесной аппаратуры идет в направлении увеличения входного зрачка телескопа, совпадающего, как правило, с поверхностью главного зеркала. Из технологических соображений при диаметре входного зрачка, превышающем 8-10 м, поверхность зеркала должна быть сферической, поскольку в этом случае она может состоять из отдельных сегментов.

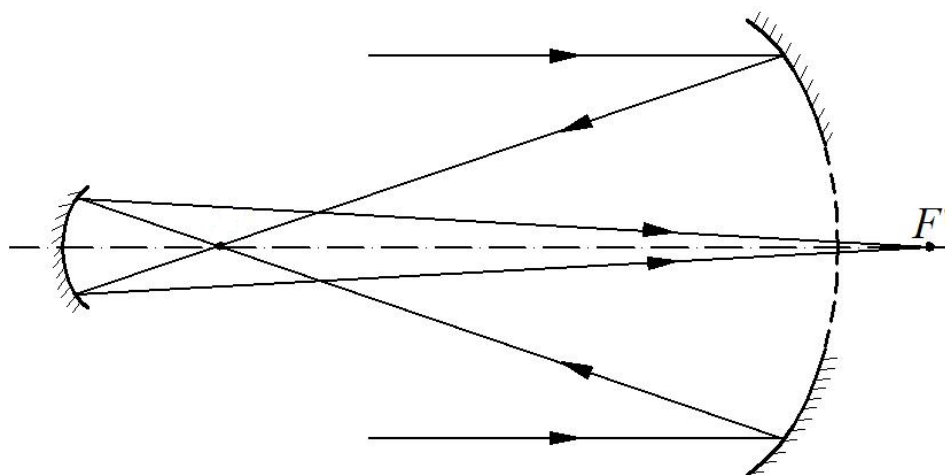


Рис. 1.10. Система Грегори

На рис.1.10 представлена схема телескопа Грегори, при этом осевая точка изображения (задний фокус оптической системы)

расположена в осевой точке (в вершине) главного зеркала [14]. Таким образом, если в плоскости промежуточного изображения расположить поверхность плоскопараллельной пластинки [14] или отражающую поверхность [13], то их изображение, образованное вторичным зеркалом, будет расположено на поверхности главного зеркала. Как показал профессор М.М. Русинов, в области первичных aberrаций (в области aberrаций, третьего порядка) деформация одной поверхности оптической системы эквивалентна деформации другой, оптически ей сопряженной. Следовательно, представляется возможным вместо деформации сферической поверхности первого (главного) зеркала осуществить соответствующую деформацию поверхности, расположенной в плоскости его изображения, образованного вторичным зеркалом. Заметим, что в общем случае эта поверхность может и не совпадать с промежуточным изображением в системе Грегори. Однако, при этом могут возникнуть проблемы, связанные с экранированием световых пучков лучей или с ограничением углового поля изображаемого пространства предметов. Схема крупногабаритного телескопа с коррекционной отражающей поверхностью, расположенной в плоскости изображения составного главного зеркала сферической формы, образованного вторичным зеркалом, представлена на рис. 1.11.

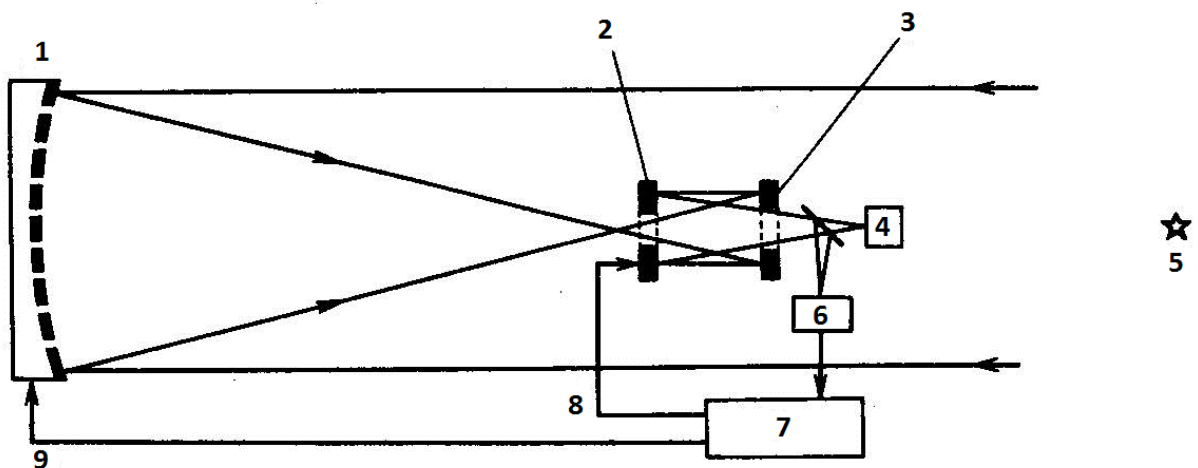


Рис. 1.11. Схема активной оптики крупного телескопа. 1 – составное сферическое главное зеркало, 2 – деформируемое зеркало – корректор, на котором строится изображение главного зеркала; 3 – вторичное зеркало Грегори; 4 – датчик изображения; 5 – опорная звезда, 6 – датчик волнового фронта; 7 – ЭВМ; 8 – компенсация турбулентности и тонкое отслеживание формы оптических поверхностей; 9 – грубое управление формой оптических поверхностей

Датчик волнового фронта вырабатывает сигналы управления элементами главного зеркала, выполняющими грубую крупномасштабную коррекцию, и деформацией коррекционной поверхности, которая осуществляет тонкую компенсацию деформаций волнового фронта. Вполне очевидно, что при компенсации наклона волнового фронта в пределах каждого элемента главного зеркала образуется разность хода (фазовый сдвиг) между волновыми фронтами при их сложении. Поэтому кроме наклона необходимо и осевое перемещение элементов зеркала.

1.4.2. Передача световой энергии на далекие расстояния

Интерес к проблемам адаптации в оптике особенно возрос в связи с приложениями к лазерной физике. Создание адаптивных систем для формирования лазерных пучков лучей вызвано стремлением уменьшить их расходимость в атмосфере до дифракционных пределов. Влияние атмосферной турбулентности на распространение лазерного излучения связано с появлением в первую очередь первичных аберраций волнового фронта [15]. Если характерный размер атмосферной неоднородности, определяющей фазовые искажения волнового фронта, одного порядка или больше диаметра лазерного пучка лучей, то основной вклад в искажения волнового фронта вносят его случайные наклоны. Поэтому компенсация случайных наклонов является необходимым звеном любой системы коррекции искажений волнового фронта излучения на атмосферных трассах. Для исследования характеристик случайных наклонов волнового фронта лазерного пучка лучей на атмосферной трассе со сложным профилем подстилающей поверхности была разработана и изготовлена импульсная адаптивная система, схема оптической части которой представлена на рис. 1.12 [15].

Излучение лазера, отраженное полупрозрачным зеркалом, падает на корректор наклонов волнового фронта, а от него – в телескоп Максудова с выходной апертурой 120 мм (объектив МТО-1000). На расстоянии 820 м от телескопа устанавливался уголкового отражатель с апертурой от 8 до 20 мм. Угол наклона трассы к горизонту составлял 11° . Отраженное излучение принималось тем же телескопом и, отразившись от корректора, направлялось на квадрантный датчик наклонов волнового фронта.

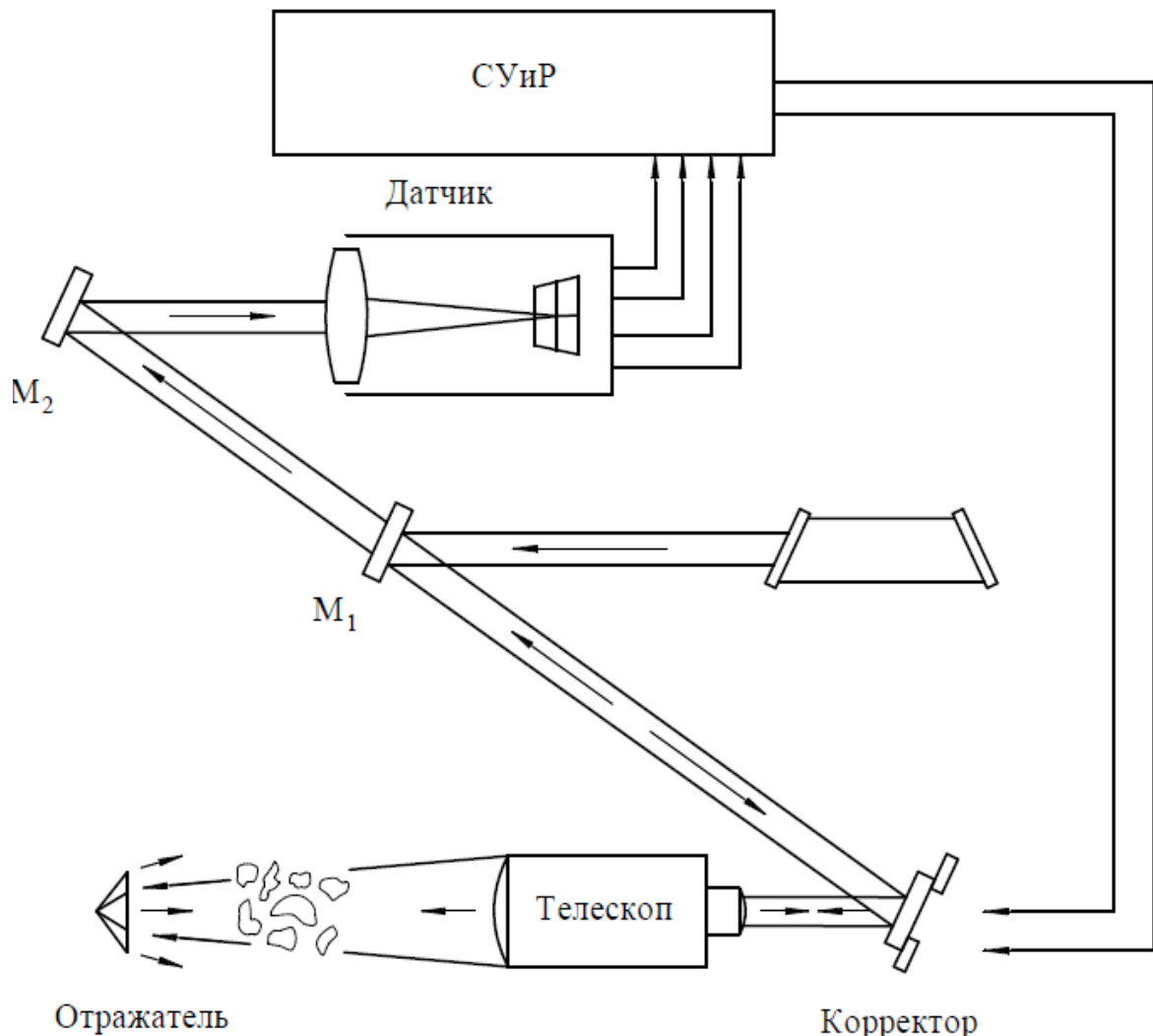


Рис. 1.12. Оптическая схема системы коррекции наклонов волнового фронта на атмосферной трассе; M_1 – полупрозрачное зеркало, M_2 – зеркало, СУ и Р – схема управления и регистрации

В конструкцию датчика наклонов входит собирающая линза, из фокальной плоскости которой световой поток с помощью стекловолоконных жгутов разводится на четыре фотоэлектронных умножителя. Импульсные сигналы с ФЭУ поступают на электронную подсистему управления и регистрации.

Одним из крупных проектов 90-х годов прошлого столетия был проект передачи световой энергии в направлении Земля-космос, предназначенной для питания искусственного спутника Земли (орбитальной станции) [9]. При пролете ИСЗ над местом расположения передатчика световой энергии необходимо направить излучение ИК-диапазона спектра с Земли на приемное устройство спутника и затем преобразовать полученную спутником световую

энергию в те виды энергии, которые нужны для поддержания его жизнедеятельности.

По проекту фирмы Rockwell International (США), разработанному по заказу NASA, мощность передатчика должна быть равна 5 МВт. При тщательном выборе длины волны излучения на спутник может быть передано не менее 50 % полной мощности. Для решения этой задачи должен быть использован генератор излучения длиной волны $\lambda = 9,1 \text{ мкм}$ на изотопах $^{12}\text{C}^{18}\text{O}_2$.

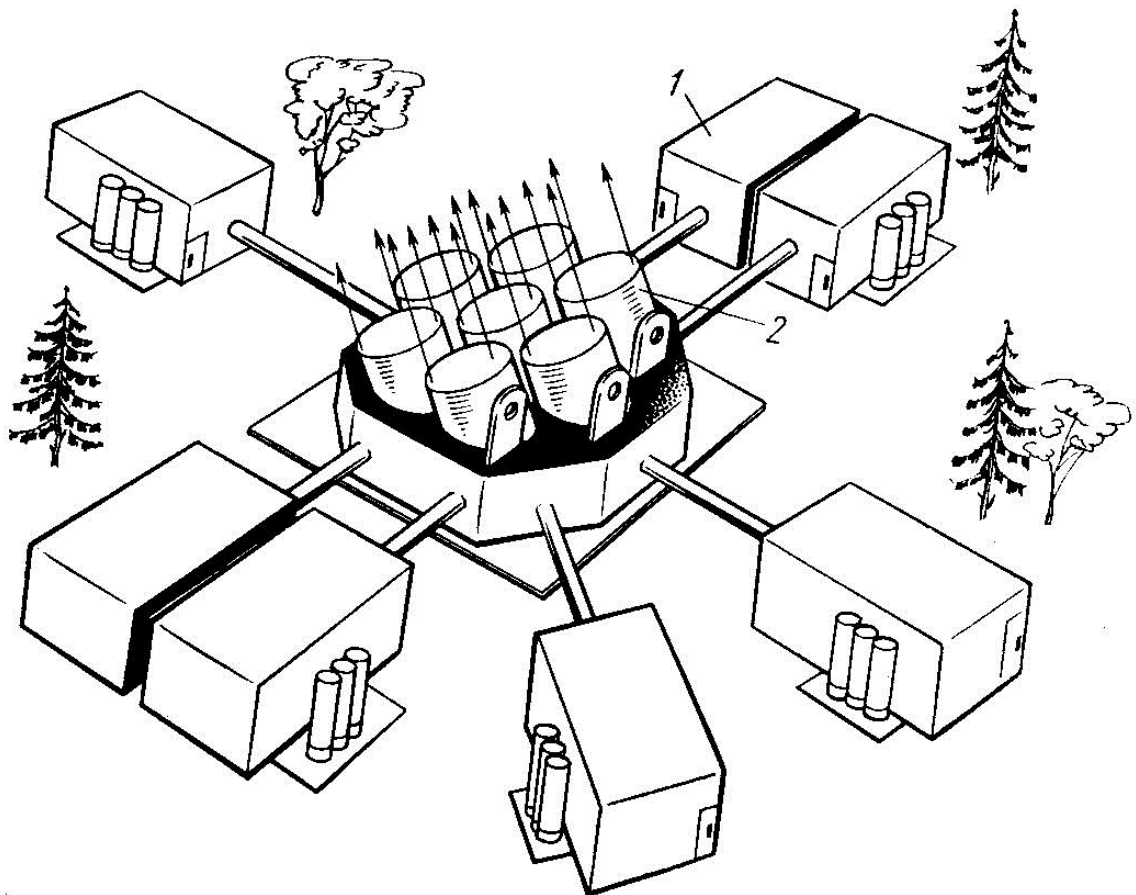


Рис. 1.13. Система передачи энергии на искусственный спутник Земли: 1 – генератор, 2 – оптический телескоп

Схема общего вида передатчика представлена на рис. 1.13. Передатчик представляет собой фазированную систему из семи телескопов, объединяющих излучение семи генераторов. Общая апертура системы состоит из семи субапертур диаметром 1,4 м каждая, вписанных в контур диаметром 4,9 м. Передатчик размещается в горах на высоте 3500 м над уровнем моря, что позволяет снизить влияние атмосферы на волновой фронт излучения.

Предполагается, что спутник пролетает на расстоянии ~ 200 км от поверхности Земли (на низкой орбите) и имеет приемную антенну диаметром 2 м, снабженную уголковым отражателем с апертурой, равной 10 см. Спутник находится в пределах углового поля передатчика приблизительно 80 секунд.

Техническое устройство такой системы весьма сложно, поскольку в рассматриваемом случае адаптивная система должна решать задачу не только компенсации атмосферных искажений волнового фронта передаваемого излучения, но и задачу точного наведения пучка лучей на ИСЗ.

1.4.3. Адаптивные резонаторы

Перспективы развития лазерной технологии во многом связаны с разработкой и использованием новых типов источников излучения и, пожалуй, прежде всего, эксимерных лазеров. Эксимерные лазеры – это газовые лазеры, работающие на переходах между электронными уровнями эксимерных молекул (молекул, существующих только в электронно-возбужденном состоянии). В эксимерных лазерах используются двухатомные эксимерные молекулы – короткоживущие соединения атомов инертных газов друг с другом, с галогенами или с кислородом. Излучение этих молекул соответствует видимой или УФ областям спектра. Малая длина волны и сравнительно большая мощность излучения эксимерных лазеров делают их прекрасным инструментом для решения целого ряда задач микроэлектроники и лазерной хирургии. Аномально большая ширина линии усиления открывает возможность перестройки частоты генерации.

Критерием качества излучения лазера может быть угловая расходимость пучка лучей, величина флуктуаций оси пучка, неравномерность амплитудного или фазового распределения излучения в поперечном сечении пучка лучей. С помощью адаптивной оптики можно улучшать различные характеристики излучения. Однако выбор критерия работы адаптивной системы является непростой задачей. Так, например, стремление выиграть в мощности может обернуться значительным увеличением расходимости пучка лучей или колебаниями оси пучка и т.д.

К недостаткам эксимерных лазеров следует прежде всего отнести невысокое качество излучения (неравномерность интенсивности в поперечном сечении пучка лучей, большая расходимость излучения) и нестабильность параметров. В этом случае особую актуальность приобретает использование внутриврезонаторных методов управления

излучением. Для проведения эксперимента использовался эксимерный лазер на молекулах $XeCl$ при $\lambda = 0,3080$ мкм [15]. В резонатор лазера, образованный двумя плоскими зеркалами, помещался телескоп с угловым увеличением изображения, равным $2,5^x$, как показано на рис. 1.14.

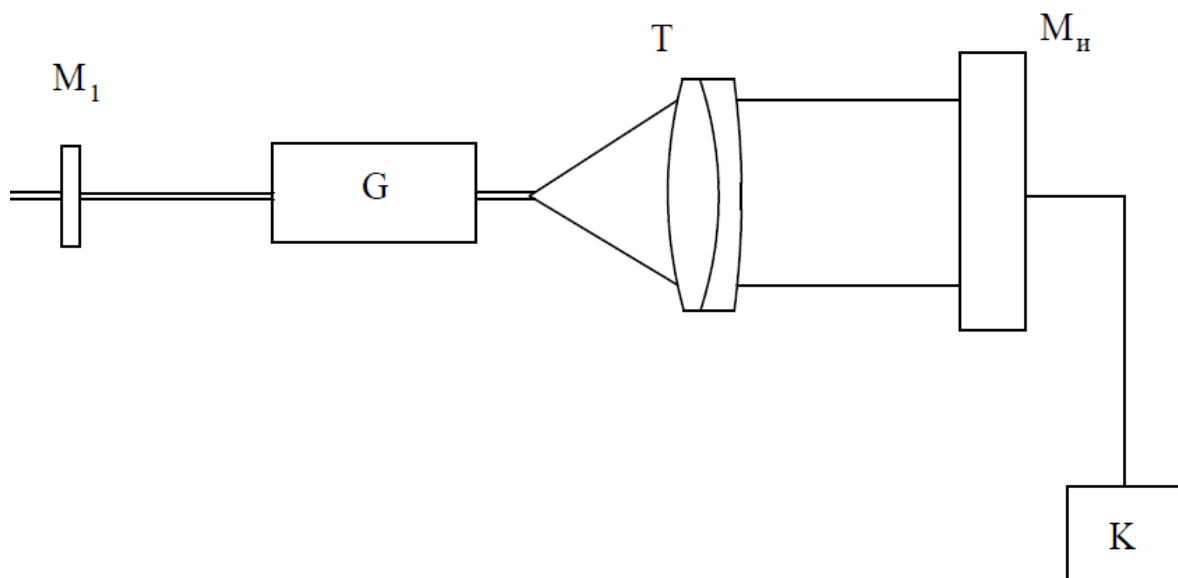


Рис.1.14. Оптическая схема эксимерного лазера:
 M_1 – выходное зеркало, $M_{н}$ – управляемое зеркало, G – активная среда, T – телескоп, K – система управления

Одно из зеркал резонатора заменялось полупассивным биморфным зеркалом, состоящим из двух соединенных вместе тонких пластин, одна из которых – стеклянная с отражающей поверхностью, а вторая – из пьезокерамики с 13 электродами управления. На это зеркало падал пучок лучей диаметром 35 мм. При подаче управляющих напряжений на электроды отражающая поверхность зеркала деформировалась, причем амплитуда деформаций достигала 3-5 мкм, что соответствовало $10-15\lambda$.

При длине резонатора $L = 100$ см за время импульса $\tau = 7$ нс световая волна совершала около 10 проходов через резонатор. При этом в результате последовательных отражений от управляемого зеркала амплитуда деформации волнового фронта достигала $100-150\lambda$. Такой диапазон изменения деформации волнового фронта позволял существенным образом воздействовать на параметры излучения. Проведенные эксперименты продемонстрировали большие потенциальные возможности внутрирезонаторного управления параметрами эксимерных лазеров. При применении той

же системы управления в CO_2 -лазере ($\lambda = 10,6 \text{ мкм}$) соотношение длины волны излучения и деформации зеркала было сравнительно небольшим. В этом случае наблюдалось лишь изменение выходной мощности излучения за счет модуляции потерь в резонаторе.

В другой серии экспериментов исследовалась возможность внутррезонаторной компенсации тепловых искажений активного элемента твердотельного лазера. Эти искажения – одна из главных причин большой расходимости излучения. Схема установки представлена на рис.1.15.

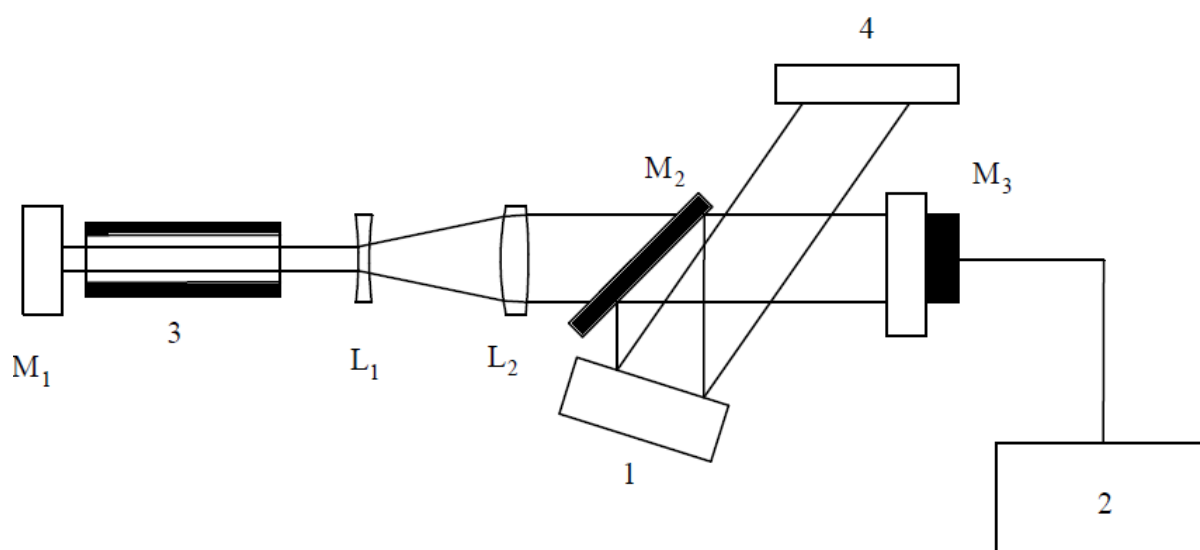


Рис.1.15. Схема экспериментальной установки для внутррезонаторной коррекции искажений в твёрдотельном лазере:

M_1 – выходное зеркало, L_1 - L_2 – телескоп, M_2 – светоделитель, M_3 – управляемое зеркало, 1 – сдвиговой интерферометр, 2 – блок управления зеркалом, 3 – активный элемент, 4 – схема регистрации

В резонатор, образованный зеркалами M_1, M_3 , помещался телескоп $L_1 - L_2$. Форма поверхности M_3 управлялась 8 электродами. Для диагностики волнового фронта внутри резонатора располагалась светоделительная пластина M_2 , направляющая часть излучения на интерферометр сдвига 1, что позволяло контролировать искажения волнового фронта излучения, отраженного от зеркала M_3 . Управляя профилем поверхности зеркала M_3 , искажения волнового фронта, обусловленные термодформациями активного элемента, удалось существенно ослабить.

1.4.4. Лазерное сверхсжатие вещества

Возможность получения с помощью фокусировки излучения мощных лазерных систем интенсивностей света порядка $10^{16} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}$, приводящей к быстрому разогреву вещества и его чрезвычайно сильному сжатию за счет светореактивного давления, стимулировала работы в области лазерного термоядерного синтеза [16]. Расчет показывает, что для преодоления кулоновских сил отталкивания необходимо нагреть смесь дейтерия и трития (термоядерную плазму) до температуры порядка 10^8K . Кроме того, нужно, чтобы за время существования плазмы в ней произошло достаточно большое число единичных актов взаимодействия и выделившаяся энергия превысила бы затраченную на разогрев. Это приводит к критерию Лоусона $n\tau \geq 10^{14} \frac{\text{с}}{\text{см}^3}$,

связывающему концентрацию частиц n и время удержания плазмы τ . Физический смысл этого критерия достаточно ясен: чем больше частиц в единице объема, тем скорее ион дейтерия встретит ион трития. С другой стороны, чем дольше удерживается плазма, тем больше времени для поисков партнера по реакции.

В 1962 году Н.Г. Басов и О.Н. Крохин выдвинули идею быстрого нагрева плазмы и инерциального удержания с помощью мощных лазерных импульсов. Возможность нагрева вещества до термоядерных температур с помощью мощных световых импульсов легла в основу разработки мощных лазерных комплексов, которые, начиная с 70-х годов прошлого столетия, велись в СССР, США, Франции, Японии и в других странах. Для исследований в этой области были созданы мощные многоканальные установки с генераторами на неодимовом стекле и многокаскадным усилением импульса: «Дельфин» (СССР) и «Шива-Нова» (США). Установки имеют сложный оптический тракт, включающий ряд пространственных фильтров и оптических усилителей для получения необходимой мощности светового импульса. Оптические элементы, усилители и даже воздушные промежутки тракта искажают волновой фронт излучения. Адаптивная оптика позволяет значительно (в 2-3 раза и более) увеличить плотность световой энергии на сжимаемой мишени.

В современных установках лазерного термоядерного синтеза используются сферические мишени диаметром около 100 мкм, симметрично облучаемые со всех сторон. Под действием света

происходит быстрый разогрев вещества, сопровождаемый испарением поверхности мишени. Возникающее при этом светореактивное давление порождает волну сжатия, распространяющуюся к центру мишени. В свою очередь, кинетическая энергия ударной волны превращается в тепло. Все эти процессы разыгрываются за время $\tau \sim 10^{-9}$ с и носят характер микровзрыва. Плотность плазмы в центре мишени по теоретическим оценкам возрастает почти в 10^4 раз относительно исходной.

Уже проведены успешные эксперименты по сверхсжатию вещества при всестороннем облучении. Достигнута плотность плазмы около $30 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ при температуре $T \sim 10^7 \text{К}$. В России и США созданы сверхмощные лазерные системы на неодимовом стекле ($\lambda = 1,06 \text{ мкм}$) с энергией в импульсе $10^3 - 10^5 \text{ Дж}$. На пути к решению проблемы лазерного термоядерного синтеза (на пути создания практически чистого и неисчерпаемого источника энергии) достигнуты значительные успехи. Однако, принципиальная возможность создания опытной термоядерной электростанции возникает скорее всего после создания мощных импульсных лазеров с КПД около 10-20 %.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ, ПОЛОЖЕННЫЕ В ОСНОВУ ПОСТРОЕНИЯ ДАТЧИКОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Датчик волнового фронта является одним из главных элементов в системе адаптивной оптики, поскольку получаемая с его помощью информация служит исходной для функционирования последующих элементов системы, откуда следует, что погрешность работы датчика определяет погрешность работы всей системы в целом. Суть работы датчика волнового фронта сводится к определению структуры светового пучка лучей, поступающего на вход датчика.

Деформацию формы волнового фронта (отклонение формы волнового фронта от номинальной) принято называть волновой аберрацией. Пусть $W(m', M', l')$ – волновая аберрация в некоторой точке $P'(m', M')$ выходного зрачка при расстоянии от оптической оси до некоторой точки $Q'(x', y')$ в плоскости изображения, равном l' . При $W(m', M', l') \neq 0$ нарушается гомоцентричность светового пучка лучей (нормалей к волновому фронту), при этом величина поперечных аберраций в меридиональной и сагиттальной плоскостях равна [17]:

$$\delta g' \approx -\frac{m'z'}{R'} + R' \frac{\partial W}{\partial m'}; \quad \delta G' \approx -\frac{M'z'}{R'} + R' \frac{\partial W}{\partial M'}, \quad (2.1)$$

где R' – радиус сферы сравнения, вершина которой (осевая точка) совмещена с центром выходного зрачка.

В гауссовой плоскости изображения, т.е. при $z' = 0$, выражения (2.1) принимают вид:

$$\delta g'_0 \approx R' \frac{\partial W}{\partial m'}; \quad \delta G'_0 \approx R' \frac{\partial W}{\partial M'}. \quad (2.2)$$

В системе полярных координат ρ', φ координаты

$$m' = a' \rho' \cos \varphi, \quad M' = a' \rho' \sin \varphi;$$

$$\rho' = \sqrt{\frac{m'^2 + M'^2}{a'^2}}, \quad 0 \leq \rho' \leq 1; \quad \varphi = \arctg \frac{M'}{m'}, \quad \text{где } a' \text{ – радиус выходного}$$

зрачка. При этом выражения (2.2) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta g'_0 &\approx \frac{R'}{a'} \left(\cos \varphi \frac{\partial W}{\partial \rho'} - \frac{\sin \varphi}{\rho'} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right); \\ \delta G'_0 &\approx \frac{R'}{a'} \left(\sin \varphi \frac{\partial W}{\partial \rho'} - \frac{\cos \varphi}{\rho'} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Распределение освещённости в изображении точки, определяемое величиной aberrаций и дифракцией на зрачках оптической системы, принято называть функцией рассеяния точки (ФРТ). Отношение максимальной величины освещённости в пределах ФРТ к максимальной величине освещённости при отсутствии aberrаций (т.е. к освещённости в осевой точке ФРТ) называют числом Штреля или определяющей яркостью. Вполне очевидно, что чем меньше величина aberrаций в изображении точки, тем меньше размер ФРТ и тем выше значение числа Штреля. С другой стороны, чем меньше aberrации системы, тем выше плотность излучения на точечной цели, тем больше отражённый ею световой поток и тем больше световой поток, поступающий в датчик интенсивности (освещённости) света. Из изложенного следует, что любой критерий качества определяется величиной и характером деформации волнового фронта; в конечном счёте эффективность работы адаптивной системы определяется величиной и характером компенсации деформации волнового фронта. Тем не менее, в зависимости от решаемой задачи находят применение датчики, предназначенные для измерения следующих величин, характеризующих качество изображения:

- волновых aberrаций;
- поперечных aberrаций;
- распределения и уровня освещённости в изображении точки, образованном пучком лучей в пределах субапертуры;
- интенсивности отражённого света.

В основных идеях построения датчиков волнового фронта нашли отражение известные методы контроля астрономической оптики. Перечислим основные методы контроля, на основе которых может быть построен датчик волнового фронта:

- интерференционный метод;
- метод Гартмана и Гартмана-Шека;
- фотометрический.

2.1 Интерференционный метод измерения.

Интерферометрами называют измерительные приборы, основанные на использовании интерференции света. Рассмотрим кратко основные понятия интерференции света.

В соответствии с волновой теорией световое возмущение u в некоторой точке пространства на расстоянии r от источника света описывается уравнением

$$u = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda} \right) = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{r}{V} \right), \quad (2.4)$$

где a – амплитуда; T – период колебания; t – время; λ – длина волны света, а V – скорость его распространения.

Величину $\nu = \frac{1}{T}$ называют частотой колебаний, а величину $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ называют круговой, или циклической, частотой.

Произведение расстояния r , проходимого лучом в данной среде, на показатель преломления n этой среды называют оптической длиной пути l , т.е. $l = rn$. Если луч проходит k сред с показателями преломления n_1, n_2, \dots, n_k , то суммарная оптическая длина пути

$$L = \sum_{i=1}^{i=k} r_i n_i. \quad (2.5)$$

При этом уравнение (2.4) можно написать в виде

$$u = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda} \right).$$

Под разностью хода двух лучей понимают разность оптических длин L_1 и L_2 , проходимых этими лучами, т.е.

$$\Delta = L_2 - L_1. \quad (2.6)$$

Отношение разности хода Δ к длине волны λ называют порядком интерференции m :

$$m = \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (2.7)$$

Число m может быть как целым, так и дробным. При этом разность фаз двух колебаний равна

$$\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Delta}{\lambda} = 2\pi m. \quad (2.8)$$

При сложении двух одинаково направленных колебаний равного периода $u_1 = a_1 \sin \omega t$ и $u_2 = a_2 \sin(\omega t + \delta)$, имеющих амплитуды a_1 и a_2 и разность фаз δ , возникает колебание того же периода $u = a \sin(\omega t + \psi)$, при этом

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \delta \quad (2.9)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a_2 \sin \delta}{a_1 + a_2 \cos \delta}. \quad (2.10)$$

Под интенсивностью колебания I понимают величину, равную квадрату амплитуды: $I = a^2$. В соответствии с выражением (2.9) интенсивность результирующего колебания I связана с интенсивностями I_1 и I_2 формулой

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta. \quad (2.11)$$

Эта формула является основной для теории двухлучевых интерферометров. Из этой формулы следует, что величина I принимает максимальное значение, равное I_{\max} при $\delta = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$ или при $\Delta = 0; \pm \lambda; \pm 2\lambda; \dots$, а минимальное значение I_{\min} – при $\delta = \pm\pi; \pm 3\pi; \dots$ или при $\Delta = \frac{\lambda}{2}; \frac{3}{2}\lambda; \dots$. При этом

$$\left. \begin{aligned} I_{\max} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = (a_1 + a_2)^2 \\ I_{\min} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = (a_1 - a_2)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.12)$$

При равенстве интенсивностей складываемых колебаний, т.е. при $I_1 = I_2 = I_0$, имеем

$$I = 2I_0(1 + \cos \delta) = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} = 4I_0 \cos^2 \pi \frac{\Delta}{\lambda}. \quad (2.13)$$

Из выражения (2.13) следует, что при изменении δ интенсивность I изменяется по синусоидальному закону, при этом $I_{\max} = 4I_0$, а $I_{\min} = 0$. Обычно в разных точках поля интерференции, т.е. в плоскости, в которой наблюдают интерференционную картину, разности фаз δ имеют различные значения. Геометрическое место точек поля, лежащих на одной линии, в которых величины δ одинаковы, называют интерференционной полосой, а расстояние b между серединами двух соседних полос – шириной полосы. Переходу от одной полосы к соседней полосе соответствует изменение δ , равное 2π (или изменение Δ , равное λ) независимо от ширины полос. При изменении разности хода Δ интерференционные полосы перемещаются в направлении, обратном направлению увеличения разности хода перпендикулярно к их длине. Изменение Δ на длину волны λ вызывает перемещение полос на расстояние, равное ширине полосы. Практически нетрудно измерить смещение полос с точностью до 0,05–0,1 ширины полосы, т.е. измерить изменение Δ с погрешностью 0,05 – 0,1 λ .

Для характеристики чёткости интерференционных полос Майкельсон ввёл функцию видности, называемую контрастностью интерференционной картины, которая определяется отношением

$$K = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (2.14)$$

где I_{\max} и I_{\min} – максимальное и минимальное значения интенсивности света в светлой и тёмной полосах соответственно. В идеальном случае, т.е. при $I_1 = I_2$, величина $I_{\min} = 0$, при этом контрастность $K = 1$. В общем случае $I_1 \neq I_2$. Пусть $I_2 = qI_1$. Тогда формула (2.11), определяющая интенсивность результирующего колебания, принимает вид

$$I = (1 + 2\sqrt{q} \cos \delta + q)I_1. \quad (2.15)$$

При этом из выражения (2.14) находим, что

$$K = \frac{2\sqrt{q}}{1 + q}. \quad (2.16)$$

Заметим, что контрастность интерференционной картины одна и та же при $q_2 = \frac{1}{q_1}$. Легко убедиться, что даже при $q = 5$ контрастность интерференционной картины остаётся хорошей ($K = 0,75$).

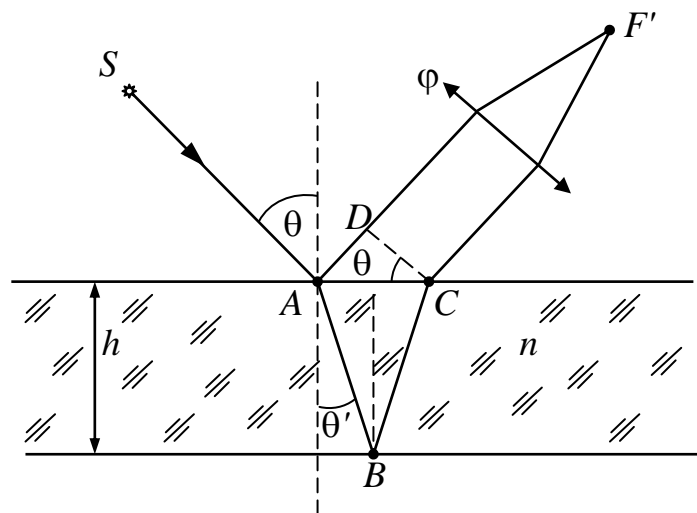


Рис. 2.1 Интерференция света, отражённого от поверхностей плоскопараллельной пластинки

Среди множества других особенно важен частный случай интерференции света, отражённого от двух поверхностей плоскопараллельной пластинки, как показано на рис.2.1. На этом рисунке луч света от источника S падает на первую (переднюю) поверхность пластинки в точке A . Частично отражаясь от этой

поверхности, луч после преломления в точке A проходит в точку B на второй (задней) поверхности. Частично отражаясь от этой поверхности в точке B , луч приходит в точку C на первой поверхности, преломляясь в которой, выходит из плоскопараллельной пластинки параллельно лучу, отражённому в точке A . Разность оптических путей этих лучей на линии DC , перпендикулярной лучам, как показано на рисунке, равна

$$\Delta = n(|AB| + |BC|) - |AD|.$$

Здесь n – показатель преломления материала пластинки, при этом предполагается, что источник S расположен в воздухе ($n_1 \approx 1$). Обозначив угол падения луча буквой θ , а толщину пластинки – буквой h , получаем

$$\Delta = 2nh \cos \theta', \quad (2.17)$$

при этом $\sin \theta' = \frac{1}{n} \sin \theta$. Поскольку при отражении волны от первой поверхности пластинки в соответствии с формулами Френеля её фаза изменяется на π , то разность фаз δ рассматриваемых волн равна

$$\delta = 4\pi n \frac{h}{\lambda_0} \cos \theta' \pm \pi = 4\pi \frac{h}{\lambda_0} \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta'} \pm \pi, \quad (2.18)$$

где λ_0 – длина волны света в вакууме. Результат сложения двух колебаний можно наблюдать либо глазом, аккомодированным на бесконечность, либо в точке F' на экране, расположенном в фокальной плоскости объектива ϕ . Из формулы (2.18) следует, что разность фаз δ определяется углом θ падения луча на поверхность пластинки и не зависит от положения источника света S . Отсюда вытекает, что при использовании протяжённого источника интерференционные полосы будут столь же отчётливыми, как и с точечным источником: каждый элемент протяжённого источника создаёт в фокальной плоскости объектива ϕ свою интерференционную картину, причём положение полос во всех этих картинах совершенно одинаково. Так как это справедливо для одной вполне определённой плоскости наблюдения, то про такие полосы говорят, что они локализованы. В данном случае они локализованы в бесконечности (или в фокальной плоскости объектива). В соответствии с формулой (2.17) светлые полосы расположены под углами θ , для которых $2nh \cos \theta' \pm \frac{1}{2} \lambda_0 = m \lambda_0$, где m – целое число, называемое порядком интерференции. Полоса, соответствующая некоторому порядку интерференции, обусловлена светом, падающим

на пластинку под вполне определённым углом θ . Поэтому такие полосы называют интерференционными полосами равного наклона. Если ось объектива расположена перпендикулярно пластинке, полосы имеют вид концентрических колец с центром в фокусе. В центре картины порядок интерференции максимален.

Интерферометр Майкельсона

Для наблюдения полос равного наклона вместо плоскопараллельной пластинки удобно использовать интерферометр Майкельсона. Его упрощённая схема показана на рис. 2.2. Свет от протяжённого источника S падает на пластинку P_1 , задняя сторона которой покрыта тонким полупрозрачным отражающим слоем серебра или алюминия. Здесь световой пучок лучей разделяется на два взаимно перпендикулярных пучка. Отражённый пластинкой P_1 пучок падает на зеркало M_1 , отражается от него, вновь падает на пластинку P_1 , где снова разделяется на два пучка. Один из них идёт к источнику S и интереса не представляет, а другой попадает в зрительную трубу, установленную на бесконечность, или на объектив ϕ , в фокальной плоскости которого расположен экран для наблюдения интерференции. Прошедший сквозь пластинку P_1 световой пучок лучей падает на зеркало M_2 , отражаясь от него, возвращается на пластинку P_1 , на задней поверхности которой вновь делится на два пучка, при этом отражённый пучок направляется в объектив ϕ . Таким образом, от одного источника S получаются два пучка примерно одинаковой интенсивности, которые распространяются после разделения пластинкой P_1 в разных "плечах" интерферометра, затем снова встречаются и создают интерференционную картину в фокальной плоскости объектива ϕ . Зеркало M_2 неподвижно, а зеркало M_1 можно передвигать с помощью микрометрического винта в направлении к пластинке P_1 и от неё. Световой пучок, отражённый от зеркала M_1 , на пути к объективу ϕ трижды проходит сквозь пластинку P_1 , а пучок, отражённый зеркалом M_2 проходит сквозь пластинку P_1 только один раз. Чтобы устранить это различие в оптическом пути, не позволяющее работать с полосами в белом свете, между пластинкой P_1 и зеркалом M_2 помещена компенсирующая

пластинка P_2 из такого же материала и такой же толщины, как у пластинки P_1 , и параллельная ей.

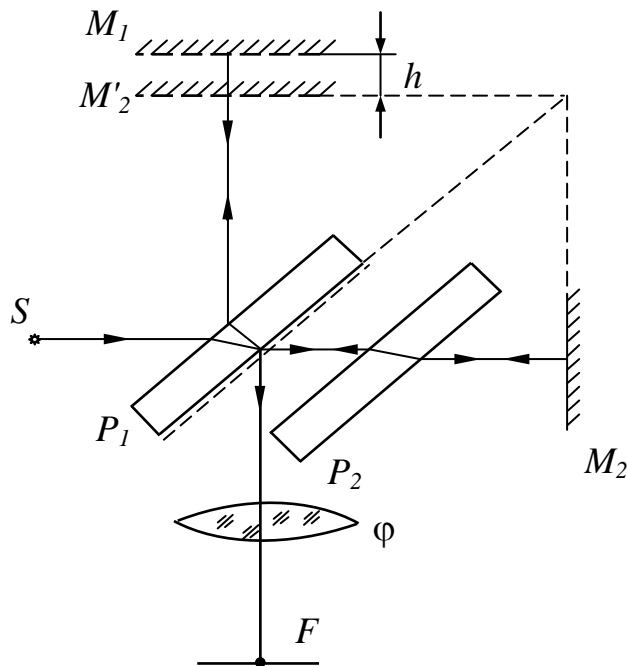


Рис.2.2 Интерферометр Майкельсона

На рис. 2.2 показано изображение M'_2 зеркала M_2 , образованное отражающей поверхностью пластинки P_1 . Оптическая длина пути от источника до точки наблюдения для луча, отразившегося от зеркала M_2 , будет такой же, как и для воображаемого луча, отразившегося от мнимой отражающей поверхности M'_2 . Поэтому можно считать, что интерференционная картина, наблюдаемая в фокальной плоскости объектива ϕ , возникает из-за воздушного слоя между отражающей поверхностью M_1 и мнимой отражающей поверхностью M'_2 . При параллельных поверхностях M_1 и M'_2 полосы имеют вид концентрических окружностей с центром в фокусе F' объектива.

Если после разделительной пластинки P_1 пучки имеют одинаковую интенсивность, то распределение интенсивности в фокальной плоскости объектива описывается формулой (2.13), где разность хода волновых фронтов Δ , как и в случае плоскопараллельной пластинки, в соответствии с формулой (2.17) равна

$$\Delta = 2h \cos \theta.$$

Разность хода при заданном расстоянии h между зеркалом M_1 и изображением M'_2 зеркала M_2 , т.е. при фиксированном положении подвижного зеркала, зависит только от угла θ наклона лучей по отношению к оптической оси. Конкретному значению угла θ соответствует кольцо в фокальной плоскости объектива, радиус которого равен $f'tg\theta$, где f' – фокусное расстояние объектива. Поэтому положение и размер светлых и тёмных колец не зависит от положения источника S , т.е. можно использовать протяжённый источник. При этом интерференционная картина (интерференционные кольца или полосы) локализована в фокальной плоскости объектива φ . Центру интерференционной картины ($\theta = 0$) соответствует максимальная разность хода $\Delta_{\max} = 2h$, равная удвоенному расстоянию между зеркалом M_1 и изображением M'_2 зеркала M_2 .

До сих пор предполагалось, что источник S излучает монохроматический свет. Определим требование, которому должен удовлетворять источник излучения в интерференционном устройстве. Предположим, что источник излучает две очень узкие, близкие друг к другу спектральные линии с частотами ω_1 и ω_2 . При этом можно считать, что вместо одного имеется два расположенных в одном месте источника, независимо друг от друга излучающих волны с частотами ω_1 и ω_2 . В интерферометре с таким источником каждая из волн создаёт свою интерференционную картину, и эти картины просто накладываются одна на другую. Полная интенсивность при наложении двух интерференционных картин определится равенством вида

$$I(\Delta) = I_1(\Delta) + I_2(\Delta) = 2I_{10}(1 + \cos k_1\Delta) + 2I_{20}(1 + \cos k_2\Delta), \quad (2.19)$$

где $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, а I_0 – равномерная интенсивность волны.

При $I_{10} = I_{20} = I_0$ равенство (2.19) принимает вид:

$$I(\Delta) = 4I_0 \left[1 + \cos \frac{\delta k}{2} \Delta \cos k\Delta \right], \quad (2.20)$$

где $k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$; $\delta k = k_2 - k_1$.

Из формулы (2.20) следует, что при разности хода волнового фронта, равной Δ , ближайший максимум определяется условием

$\cos k\Delta = \pm 1$ при $\cos \frac{1}{2} \delta k \Delta \cos k\Delta > 0$, а ближайший минимум определяется тем же условием при $\cos \frac{1}{2} \delta k \Delta \cos k\Delta < 0$, т.е. в соответствии с формулой (2.20) $I_{\max} = 4I_0 \left[1 + \left| \cos \frac{1}{2} \delta k \Delta \right| \right]$, а $I_{\min} = 4I_0 \left[1 - \left| \cos \frac{1}{2} \delta k \Delta \right| \right]$. При этом в соответствии с формулой (2.14) получаем $K = \left| \cos \frac{1}{2} \delta k \Delta \right|$.

Контрастность интерференционной картины принимает своё максимальное значение, равное единице, при $\Delta = 0$, т.е. вблизи полосы нулевого порядка, где освещённость в минимумах приближается к нулю. С увеличением разности хода контрастность уменьшается и обращается в нуль при $\frac{1}{2} \delta k \Delta = \frac{\pi}{2}$. При этом при малой разности частот $\delta \omega = \omega_1 - \omega_2 = c \delta k$ получаем, что светлые полосы интерференционной картины излучения одной спектральной линии совпадают с тёмными полосами излучения другой линии при $\Delta = \frac{\lambda^2}{2\delta \lambda}$. Введение разности хода между волновыми фронтами эквивалентно задержке одного из них во времени. Поэтому способность световых колебаний в одной точке исходного волнового фронта к интерференции после его разделения на два фронта и последующего их соединения с некоторой разностью хода называется временной когерентностью. Максимальная разность хода, при которой возможна интерференция, называется длиной когерентности излучения $l_{\text{ког}}$, а соответствующее ей запаздывание – временем когерентности $\tau_{\text{ког}} = \frac{l_{\text{ког}}}{c}$. Уменьшение когерентности световых колебаний с увеличением временной задержки, т.е. уменьшение видности интерференционных полос при возрастании разности хода, связано с конечной шириной спектральной линии источника квазимонохроматического света. Такое излучение можно рассматривать как совокупность не скоррелированных между собой отдельных монохроматических волн, частоты которых сплошь заполняют некоторый интервал $\delta \omega$, малый по сравнению со средней

частотой ω . Каждая монохроматическая волна из этой совокупности создаёт в интерферометре свою картину полос, при этом полное распределение освещённости определяется простым наложением этих картин.

Будем считать, что отдельные монохроматические компоненты равномерно заполняют спектральный интервал шириной $\delta\omega$ ("прямоугольный" контур линии). Разделим мысленно этот интервал на две равные части. При этом вполне очевидно, что любой из монохроматических компонент первой части найдётся монохроматическая компонента из второй части с разностью частот, равной $\frac{1}{2}\delta\omega$. Распределение освещённости в интерференционной картине от каждой пары определяется формулой (2.20) при $\delta k = \frac{1}{2c}\delta\omega \cong \pi \frac{\delta\lambda}{\lambda^2}$. Контрастность полос полной интерференционной картины в этом случае становится равной нулю при такой разности хода $\Delta_{\max} = l_{\text{ког}}$, когда $\frac{1}{2}\delta k \Delta_{\max} = \frac{\pi}{2}$. В результате получаем

$$l_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda}. \quad (2.21)$$

Длине когерентности $l_{\text{ког}}$ соответствует максимально возможный порядок интерференции

$$m_{\max} = \frac{l_{\text{ког}}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta\lambda}.$$

Для белого света (солнце, лампа накаливания, дуга с угольными электродами) и визуального наблюдения эффективный диапазон длин волн $\delta\lambda$ простирается приблизительно от 400 до 700 нм, т.е. $\delta\lambda = 300$ нм при $\lambda \approx 600$ нм. Однако, учитывая селективную чувствительность глаза, можно считать, что возможный порядок интерференции

$$m > \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 2.$$

Используя излучение узких спектральных линий газоразрядных источников низкого давления, можно наблюдать интерференцию при оптической разности хода, достигающей нескольких десятков сантиметров. Основная причина, ограничивающая в этом случае длину когерентности, – хаотическое тепловое движение излучающих атомов, приводящее к доплеровскому уширению спектральных линий. Так, например, для излучения оранжевой линии $\lambda = 605,78$ нм

стандартной криптоновой лампы, используемой в современном эталоне длины (по определению, 1 м равен 1650763,73 длин волн этой линии), длина когерентности достигает 0,8 м. Исключительно высокая монохроматичность излучения стабилизированных по частоте газовых лазеров позволяет получить интерференцию при разности хода в несколько километров.

Условие временной когерентности световых колебаний можно записать в виде $\Delta < l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}$.

Интерферометр Тваймана-Грина

Заменим в схеме, представленной на рис. 2.2, протяжённый источник излучения S точечным, расположенным в переднем фокусе объектива φ_k , как показано на рис. 2.3. Интерферометр, типовая схема которого представлена на рис. 2.3, предложен и запатентован Твайманом и Грином в 1916 году. Коллимированный пучок лучей образует плоский волновой фронт, соответствующий осевому на рис. 2.2, при этом угол $\theta = 0$. Поэтому кольцевые полосы в интерференционной картине будут отсутствовать, и всё интерференционное поле будет иметь равномерную освещённость. Возникающие при перемещении зеркала M_1 изменения интенсивности измеряются с помощью показанного на рисунке объектива $\varphi_{\text{п}}$ и расположенного в его заднем фокусе $F'_{\text{п}}$ приёмника излучения Π . При равных амплитудах колебаний складываемых после светоделителя P монохроматических волновых фронтов интенсивность света определится формулой (2.13) в виде

$$I_{\sigma}(\Delta) = 2I_{0\sigma}(1 + \cos 2\pi\sigma\Delta), \quad (2.22)$$

где $\sigma = \frac{1}{\lambda}$; в спектроскопии величину σ принято называть волновым числом. Как было показано, характер изменения контрастности интерференционных полос при изменении разности хода (например, путём перемещения зеркала M_1 на рис. 2.3 в направлении оптической оси) определяется спектральным составом света. Следовательно, при спектральной плотности лучистого потока $P(\sigma)$ в параллельном пучке лучей за объективом φ_k интенсивность света, падающего на объектив $\varphi_{\text{п}}$ приёмного устройства, без учёта потерь в оптической системе интерферометра определяется очевидным выражением

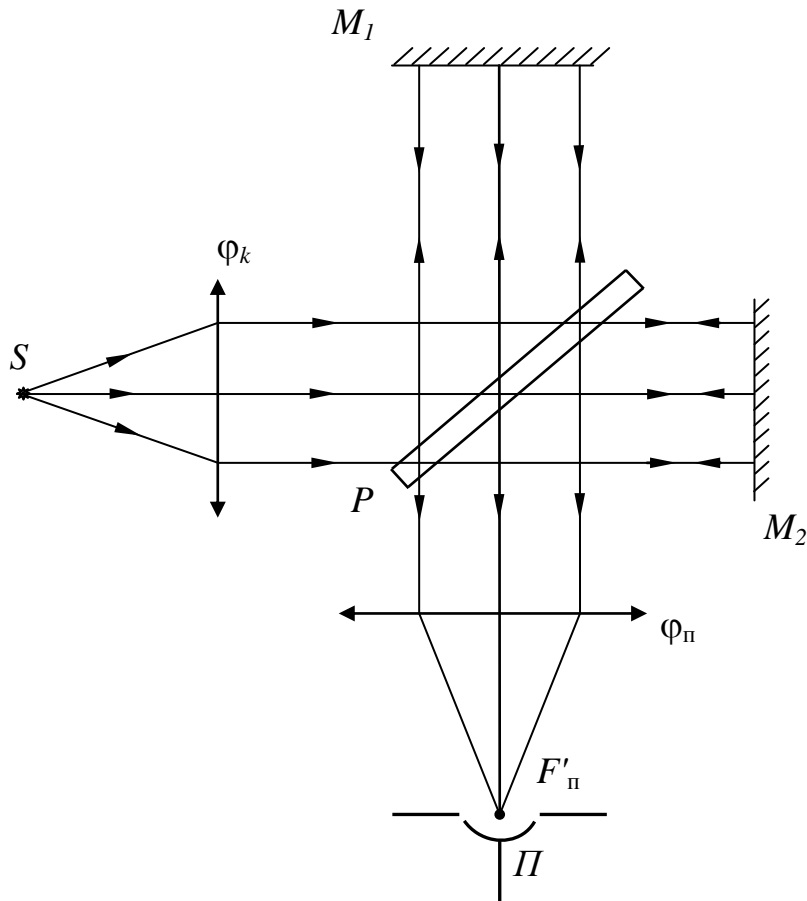


Рис. 2.3 Интерферометр Тваймана-Грина

$$I(\Delta) = \int_0^{\infty} P(\sigma)(1 + \cos 2\pi\sigma\Delta) d\sigma. \quad (2.23)$$

Этот интеграл можно записать в виде

$$I(\Delta) = \int_0^{\infty} P(\sigma) d\sigma + \int_0^{\infty} P(\sigma) \cos(2\pi\sigma\Delta) d\sigma. \quad (2.24)$$

Когда два зеркала расположены на равном оптическом расстоянии от разделителя пучка, то $\Delta = 0$ и $I(\Delta) = I(0) = 2 \int_0^{\infty} P(\sigma) d\sigma$.

При этом имеем

$$I(\Delta) - \frac{1}{2} I(0) = \int_0^{\infty} P(\sigma) \cos(2\pi\sigma\Delta) d\sigma. \quad (2.25)$$

Левая часть выражения (2.25) определена при $\sigma > 0$, а при $\sigma < 0$ можно считать её равной нулю. При этих условиях выражение (2.25) представляет собой обратное косинус-преобразование Фурье для

зависимости $I(\Delta) - \frac{1}{2}I(0)$. Тогда косинус-преобразование Фурье этой зависимости принимает вид

$$P(\sigma) = \int_0^{\infty} \left[I(\Delta) - \frac{1}{2}I(0) \right] \cos(2\pi\sigma\Delta) d\Delta. \quad (2.26)$$

Уравнение (2.26) часто называют основным уравнением Фурье-спектроскопии. Оно даёт возможность вычислить для каждого конкретного значения σ , а, следовательно, для каждого конкретного значения длины волны λ , спектральную плотность $P(\sigma)$ светового потока, излучаемого источником S , путём интегрирования выражения в правой части.

Изменение Δ достигается при перемещении зеркала. Точность, с которой можно контролировать величину перемещения, ставит предел точности прибора в целом. В результате рассматриваемый метод измерения спектральной плотности излучения применим, главным образом, для работы на длинных волнах и широко использовался на протяжении многих лет в инфракрасной области спектра. Однако в настоящее время, благодаря всестороннему техническому совершенствованию, область длин волн расширена в видимый и даже ультрафиолетовый диапазоны.

Интерферометр Физо

Обратимся к рис. 2.4, где представлено главное сечение прозрачной плёнки с плоскими поверхностями, образующими клин, угол которого достаточно мал и равен α . Из точечного источника S световой луч падает на первую поверхность плёнки в точку A под углом θ к нормали к поверхности. Преломлённый в точке A луч в результате френелева отражения от второй поверхности в точке B выходит из плёнки в точке C на первой поверхности. Вторым луч, исходящий из точки S , падает на поверхность плёнки в некоторую точку D . Отражённый в результате френелева отражения в этой точке луч встречается с первым лучом в некоторой точке P . При этом разность оптических путей этих лучей между точками S и P равна:

$$\Delta = nSA + n'(AB + BC) + nCP - n(SD + DP).$$

Представляет интерес частный случай, когда точка D совпадает с точкой C , т.е. когда вторым луч падает в точку C . При этом вполне очевидно, что точка P также будет совпадать с точкой C , как показано на рис. 2.4. В этом случае разность оптических путей для

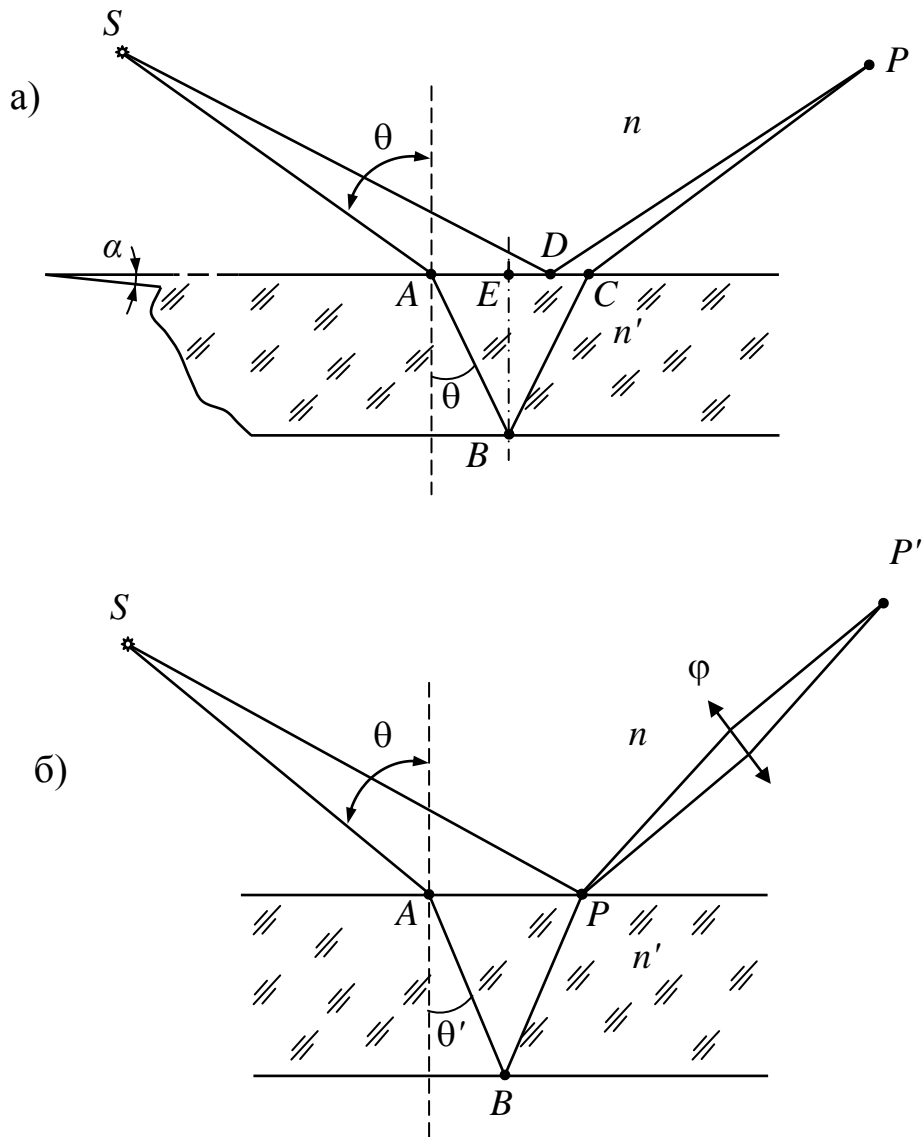


Рис. 2.4 Тонкая плёнка, освещённая точечным источником света

рассматриваемых лучей равна:

$$\Delta = nSA + n'(AB + BP) - nSP. \quad (2.27)$$

Полагая угол α и толщину плёнки $h = BE$ вблизи точки B измеренную по нормали к первой поверхности в точке B , достаточно малыми, равенство (2.26) заменим приближённым равенством вида:

$$\begin{aligned} \Delta &\approx nSA + n'(AB + BP) - n(SP + AP \sin \theta) = \\ &= n'(AB + BP) - n AP \sin \theta \end{aligned}$$

или

$$\Delta = n'(AB + BP - AP \sin \theta'). \quad (2.28)$$

Но

$$AB + BP \approx \frac{2h}{\cos \theta'}, \text{ а } AP \approx 2htg\theta'.$$

Полученные приближённые равенства позволяют преобразовать равенство (2.27) к виду

$$\Delta \approx 2n'h \left(\frac{1}{\cos \theta'} - \frac{\sin^2 \theta'}{\cos \theta'} \right) = 2n'h \cos \theta'. \quad (2.29)$$

При этом разность фаз световых колебаний в точке P равна

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n'h \cos \theta'. \quad (2.30)$$

При малой клиновидности (малом изменении толщины) плёнки величина h практически одинакова для всех пар лучей от протяжённого источника, приходящих в точку P' , сопряжённую с P , и различие величин δ в точке P' определяется главным образом различием значений $\cos \theta'$. Если интервал изменений $\cos \theta'$ достаточно мал, то интервал изменения величины δ в точке P' много меньше π даже с источником значительных размеров и полосы отчётливо видны. Очевидно, что они локализованы на первой поверхности плёнки. Практически условие малости интервала изменений $\cos \theta'$ можно выполнить при наблюдении в направлении, близком к нормальному, или при ограничении входного зрачка. Последнее условие вполне выполняется при наблюдении интерференционной картины невооружённым глазом, поскольку зрачок глаза и сам по себе может быть достаточно мал.

Учитывая изменение фазы на π при отражении на одной из поверхностей плёнки, из выражений (2.12) и (2.30) находим, что максимумы интенсивности в P' (и, очевидно, в P) определяются из условия

$$2n'h \overline{\cos \theta'} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (m-1)\lambda_0, \quad (2.31a)$$

а минимумы интенсивности – из условия

$$2n'h \overline{\cos \theta'} \pm \frac{\lambda_0}{2} = \frac{2m-1}{2} \lambda_0, \quad (2.31б)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$; $\overline{\cos \theta'}$ – среднее значение $\cos \theta'$ для точек источника, из которых свет приходит в точку P' . Из соотношений (2.31) следует, что если $\overline{\cos \theta'}$ достаточно постоянен, то интерференционные полосы соответствуют совокупности мест плёнки, где оптические толщины одинаковы. По этой причине такие полосы часто называют полосами равной толщины. Их можно наблюдать в тонкой воздушной прослойке между отражающими поверхностями двух прозрачных пластинок. Вблизи нормального

падения лучей условия (2.31) для тёмной полосы при $\overline{\cos\theta'} = 1$ и длине волны в воздухе $\lambda = \frac{\lambda_0}{n'}$ имеют вид

$$h = \frac{m\lambda}{2}, \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

Таким образом, интерференционные полосы определяют контуры слоёв равной толщины, причём расстояние между полосами соответствует изменению толщины на $\frac{\lambda}{2}$.

Итак, необходимым условием требуемого контраста (чёткости) интерференционных полос служит ограниченность диапазона изменения величины $\overline{\cos\theta'}$, соответствующего каждой точке плёнки, при этом при $\overline{\cos\theta'} \approx 1$ полосы определяют контуры слоёв равной оптической толщины. Оба эти условия одновременно выполняются на большой площади плёнки в интерферометре Физо, схема которого представлена на рис. 2.5. Расходящийся пучок света из квазимонохроматического источника S после отражения от диагонального зеркала M преобразуется объективом ϕ в параллельный пучок, который падает по нормали на плёнку P . Свет, отражённый поверхностями плёнки, снова проходит через объектив ϕ и собирается в отверстии S' в фокальной плоскости объектива ϕ . Глаз, помещённый сразу за S' и аккомодированный на плёнку, видит полосы, определяющие контуры слоёв оптической толщины на всей поверхности плёнки, освещённой объективом ϕ . Эти полосы часто называют полосами Физо. Полосы Физо можно получить и в толстых плёнках при условии, что источник света достаточно мал. Такие интерферометры находят применение в оптическом производстве для проверки постоянства оптических толщин плоскопараллельных прозрачных пластинок. Интерферометр Физо, варианты модифицированной схемы которого показаны на рис. 2.5, находит применение и для контроля формы оптических поверхностей. На этой схеме AM – апланатический мениск; CC – сфера сравнения (эталонная поверхность); $KП$ – контролируемая сферическая поверхность.

Схема интерферометра Тваймана-Грина, представленная на рис.2.3, эквивалентна схеме интерферометра Физо, но в отличие от последней здесь пути световых пучков полностью разделены. Оптическая разность хода между выходящими после делителя лучами

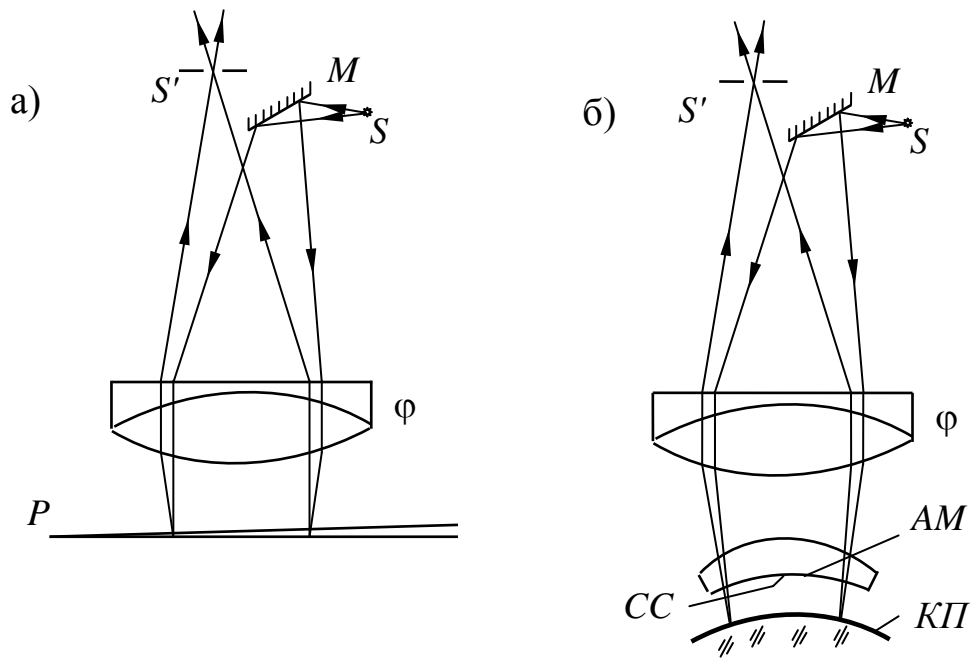


Рис. 2.5. Схема интерферометра Физо

равна

$$\Delta = 2nh, \quad (2.33)$$

где h – разность расстояний от осевой точки деления пучков до зеркал M_1 и M_2 . Соответствующая разность фаз равна

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} nh. \quad (2.34)$$

Заметим, что интерференционные полосы, являющиеся геометрическим местом точек, для которых величина δ постоянна, образуются в любой плоскости той области, где встречаются оба луча из S . В этом случае принято говорить, что такие полосы не локализованы. Они всегда наблюдаются с точечным источником и их контрастность (их видность) зависит только от относительной интенсивности обеих волн.

В соответствии с соотношениями (2.34) и (2.12) находим, что глаз, помещённый в фокальную плоскость объектива ϕ_{Π} , увидит в некоторой точке P светлую полосу, если

$$nh = \frac{m-1}{2} \lambda_0, \quad (2.35a)$$

или тёмную полосу, если

$$nh = \frac{2m-1}{4} \lambda_0, \quad (2.35b)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Если одно из зеркал в интерферометре Тваймана-Грина представляет собой сферу со стрелкой шарового сегмента h , то интерференционная картина будет выглядеть в виде системы чередующихся светлых и тёмных колец, при этом порядок интерференции будет равен $m = \frac{2nh}{\lambda_0}$. Различные модификации

интерферометра Тваймана-Грина находят широкое применение в оптическом производстве при контроле оптических поверхностей и деталей.

Интерферометры сдвига

Важная особенность интерферометров сдвига заключается в том, что они не требуют формирования эталонного волнового фронта (не требуют применения эталонных оптических поверхностей), так как в них интерференционная картина образуется в результате сложения волновых фронтов, образованных путём амплитудного деления контролируемого волнового фронта, при последующем смещении каждого или одного из них. Сдвиг может быть боковым, поворотным, реверсным или радиальным. Характер воздействия на волновой фронт в интерферометрах радиального, поворотного и реверсивного сдвига показан на рис. 2.6.

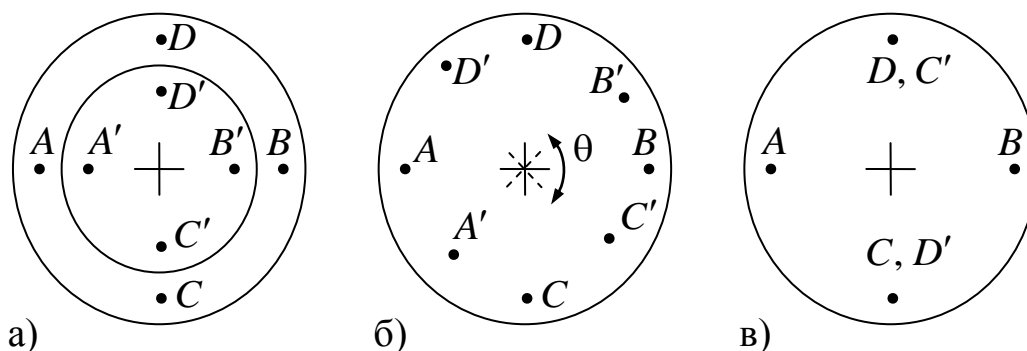


Рис. 2.6 Три метода получения сдвига между волновыми фронтами:
а) – радиального; б) – вращения; в) – реверсивного

В интерферометре радиального сдвига образуются два интерферирующих волновых фронта, имеющих идентичные деформации, но сжатые или расширенные относительно друг друга. Интерферометр поворотного сдвига образует два одинаковых взаимно повернутых волновых фронта. Интерферометр реверсивного

сдвига создаёт два волновых фронта, деформации которых симметричны друг другу относительно диаметра как оси симметрии.

Интерферометры бокового (поперечного) сдвига, являясь важной областью общей интерферометрии, широко применяются при исследовании оптических деталей и систем, при изучении потоков и явлений диффузии в газах и жидкостях. Основным принцип этой интерферометрии заключается в амплитудном делении волнового фронта и получении интерференционной картины между ними при последующем небольшом смещении полученных волновых фронтов относительно друг друга, как показано на рис.2.7.

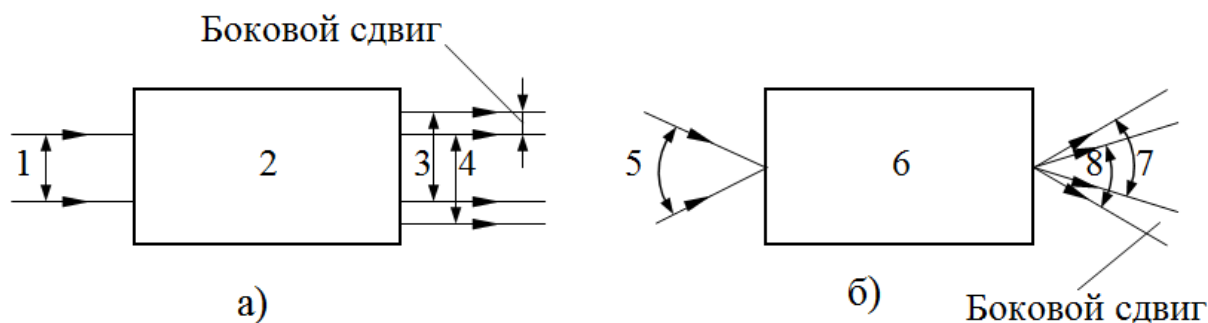


Рис. 2.7 Схематическое изображение бокового сдвига с коллимированными а) и сходящимся б) ходами лучей: 1, 3, 5, 7 – исходный волновой фронт; 2 – интерферометр бокового сдвига с параллельным ходом лучей; 4, 8 – волновой фронт с боковым сдвигом; 6 – интерферометр бокового сдвига со сходящимся ходом лучей

Если номинальная форма поверхности исходного волнового фронта плоская, то боковой сдвиг достигается его смещением в собственной плоскости, а при сферической форме – смещением волнового фронта относительно собственного исходного положения путём вращения вокруг оси, проходящей через центр его кривизны. Принцип работы интерферометра сдвига рассмотрим на примере схемы, представленной на рис.2.8.

Пусть на исследуемую оптическую систему 1, например, объектив, падает плоский волновой фронт, в общем случае отличающийся от сферического. Кубик 2 с полупрозрачной гипотенузной гранью делит пучок световых лучей на два и направляет полученные пучки к плоским зеркалам 3. Задний фокус исследуемой системы совмещён с плоскостью зеркала 3. Лучи света, отражённые от зеркал 3, возвращаются на светоделительный кубик 3 и направляются к экрану 4, на котором возникает интерференционная

картина. Вид, форма и расположение интерференционных полос зависят как от деформации исследуемого волнового фронта, так и от настройки интерферометра. Если зеркала 3 расположены на равных расстояниях от осевой точки C деления пучков в кубике 2, то

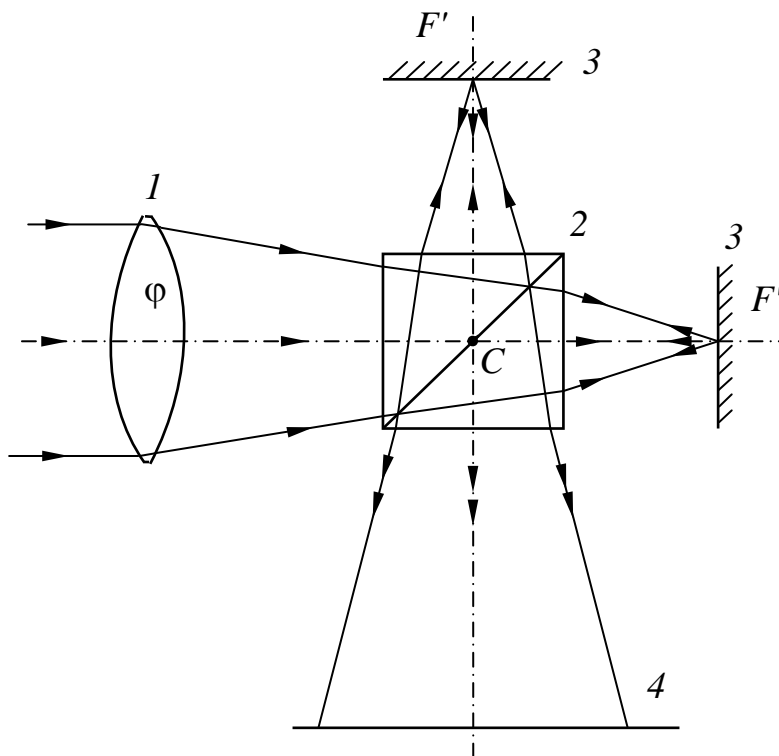


Рис. 2.8 Принципиальная схема интерферометра сдвига

поворотом одного из зеркал 3 вокруг точки F' можно получить интерференционную картину при боковом сдвиге волновых фронтов. При параллельном смещении вдоль оси одного из зеркал 3, т.е. при неравных расстояниях зеркал 3 от осевой точки деления пучков, можно получить интерференционную картину при радиальном сдвиге волновых фронтов.

Таким образом, интерференционная картина, образованная в интерферометре сдвига, во всех случаях является результатом сложения двух совершенно одинаковых, но смещённых один относительно другого волновых фронтов, полученных с помощью разделительного элемента. В качестве разделительных элементов применяют поляризационные призмы, зеркала, клинья, дифракционные решётки и другие оптические элементы.

Принципиально схему интерферометра бокового сдвига с параллельным ходом лучей можно построить, используя схему циклического интерферометра, в котором два когерентных пучка световых лучей распространяются во встречных направлениях и, в

конечном счёте, интерферируют. В этом смысле, например, интерферометр Харихарана и Сена с треугольным ходом параллельных лучей может рассматриваться как типичный циклический интерферометр, в котором боковой сдвиг волновых фронтов достигается параллельным смещением одного из плоских зеркал, как показано на рис. 2.9.

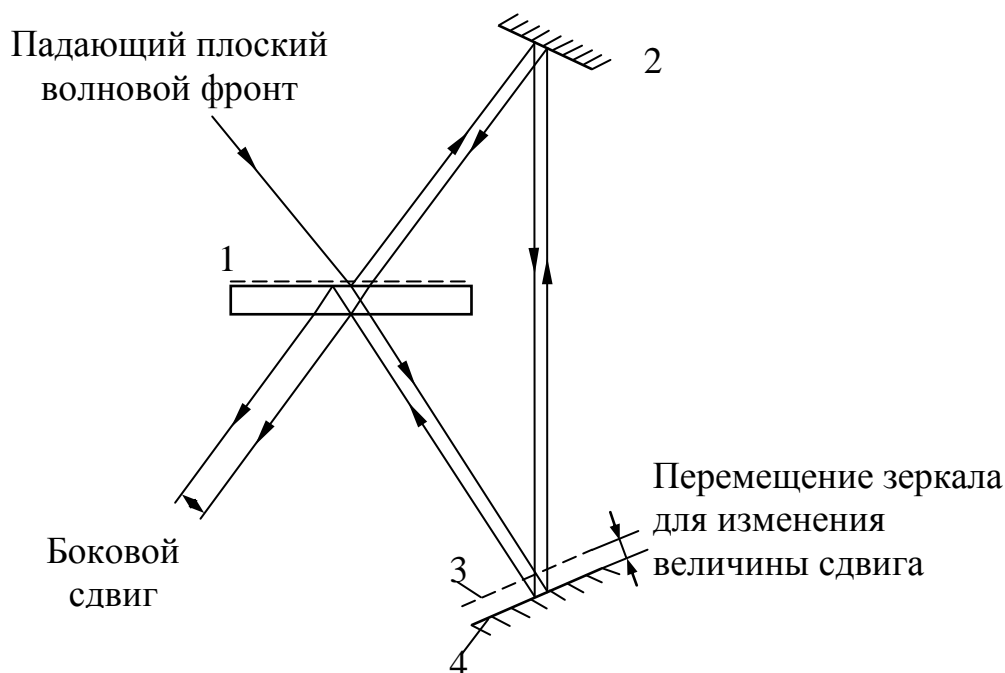


Рис. 2.9 Интерферометр с треугольным ходом лучей: 1 – полупрозрачное покрытие; 2, 4 – плоское зеркало; 3 – положение зеркала 4 при нулевом сдвиге

Рассмотрим образование интерференционной картины при сложении двух волновых фронтов L_1 и L_2 с центрами O_1 и O_2 , смещёнными на величину s , как показано на рис. 2.10, и определим форму волнового фронта по интерферограмме бокового сдвига.

Будем считать, что отклонения исходного волнового фронта от плоскости определяются его малыми деформациями, равными $W(x, y)$, где x, y – координаты произвольной точки P . При смещении волнового фронта на величину s в направлении, например, оси x его деформация в точке P будет равна $W(x-s, y)$, а результирующая разность хода ΔW для двух волновых фронтов определится разностью $W(x, y) - W(x-s, y)$.

Именно величина ΔW и определяется в интерферометрии бокового сдвига. Вполне очевидно, что при $s=0$ в любой точке волнового фронта разность хода отсутствует, а, следовательно, невозможно при этом оценить деформацию волнового фронта какой бы большой она ни была. Результат интерференции волновых фронтов в каждой точке интерференционной картины можно оценить из простого соотношения

$$\Delta W = m\lambda, \quad (2.36)$$

где m – порядок интерференции полосы; λ – длина волны используемого света.

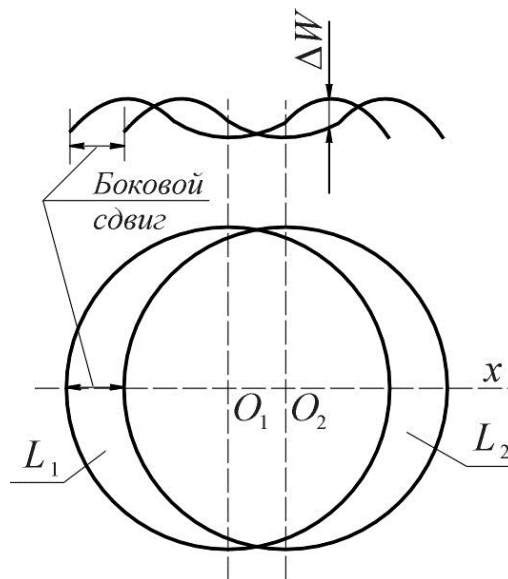


Рис.2.10. Сдвиг волновых фронтов в пределах круглой апертуры

Заметим, что при малых значениях смещения s уравнение (2.36) можно записать в виде

$$s \frac{\partial W}{\partial x} = m\lambda, \quad (2.37)$$

т.е. интерферометр бокового сдвига даёт информацию об абберации луча в угловой мере. Равенство (2.37) становится более точным при $s \rightarrow 0$. Однако, при этом снижается точность измерения. Следовательно, исходя из требуемой в каждом конкретном случае точности, необходимо находить оптимальное значение s .

Пусть диаметральные сечения волновых фронтов осевой плоскостью по линии O_1O_2 имеют вид, представленный на рис.2.11 первыми двумя кривыми, смещёнными друг относительно друга на величину s . Разобьём сечения волновых фронтов на отрезки, равные сдвигу s , и проведём вертикальные линии между обоими сечениями,

как показано на рисунке. По методу, предложенному Сондерсом, оценивают порядок интерференции в равноудалённых точках вдоль диаметра и затем определяют сечение волнового фронта, как показано на рис. 2.11, полагая $W_1 = 0$; $W_2 = W_1 + \Delta W_1 = \Delta W_1$; $W_3 = W_2 + \Delta W_2 = \Delta W_1 + \Delta W_2$ и т.д. Этот метод был распространён на двумерный случай. Форму волнового фронта можно определить, используя метод, основанный на предположении, что неизвестный волновой фронт $W(x, y)$ представляет собой "гладкую" функцию, описываемую полиномом, коэффициенты которого выражают интерферометрическую функцию $\Delta W(x, y)$. Измеряя положения интерференционных полос, определяют значения ΔW и по ним вычисляют искомые коэффициенты.

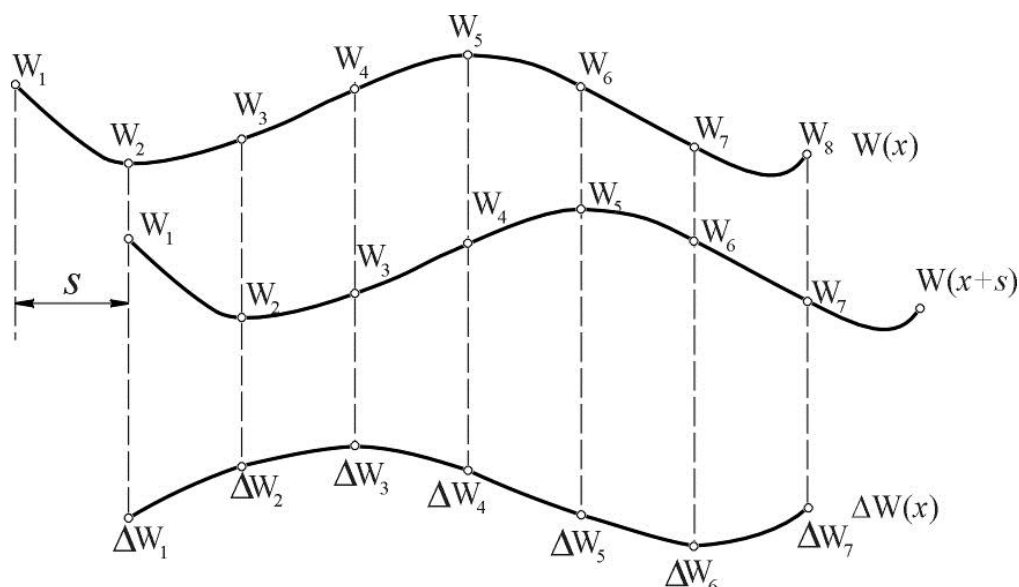


Рис. 2.11. Определение формы волнового фронта по интерферограмме бокового сдвига

Этот метод получил применение при определении формы волнового фронта вдоль диаметра, параллельного направлению сдвига, т.е. при определении сечения волнового фронта плоскостью. Малакара и Мендес использовали его для поверхностей вращения. Принципиально метод аппроксимации поверхности волнового фронта полиномом вполне применим и в случае двумерного варианта.

Пусть волновой фронт определяется функцией $W(x, y)$, которую можно представить двумерным полиномом степени k , содержащим $N = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ членов, в виде:

$$W(x, y) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n B_{nm} x^m y^{n-m}. \quad (2.38)$$

В этом случае для восстановления волнового фронта необходимы две интерферограммы, полученные в результате сдвига волнового фронта в двух взаимно перпендикулярных направлениях на величину s и t соответственно. При этом сдвинутые волновые фронты можно определить выражениями вида:

$$W(x + s, y) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n B_{nm} (x + s)^m y^{n-m} \quad (2.39)$$

$$W(x, y + t) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n B_{nm} x^m (y + t)^{n-m}. \quad (2.40)$$

Используя формулу бинома Ньютона, получаем

$$(x + s)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^{m-j} s^j, \quad (2.41)$$

где биномиальный коэффициент

$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{(m-j)! j!}. \quad (2.42)$$

Уравнения (2.39) и (2.40) можно преобразовать к виду

$$W(x + s, y) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^m B_{nm} \binom{m}{j} x^{m-j} y^{n-m} s^j \quad (2.43)$$

$$W(x, y + t) = \sum_{n=0}^k \sum_{m=0}^n \sum_{j=0}^{n-m} B_{nm} \binom{n-m}{j} x^m y^{n-m-j} t^j. \quad (2.44)$$

Учитывая, что эти функции при $j = 0$ равны $W(x, y)$, в результате преобразований получаем

$$\Delta W_s = W(x + s, y) - W(x, y) = \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^n C_{nm} x^m y^{n-m}, \quad (2.45)$$

$$\Delta W_t = W(x, y + t) - W(x, y) = \sum_{n=0}^{k-1} \sum_{m=0}^n D_{nm} x^m y^{n-m}, \quad (2.46)$$

где

$$C_{nm} = \sum_{j=1}^{k-n} \binom{j+m}{j} s^j B_{j+n, j+m}; \quad (2.47)$$

$$D_{nm} = \sum_{j=1}^{k-n} \binom{j+n-m}{j} t^j B_{j+n, m}. \quad (2.48)$$

В результате обработки интерферограмм находим значения величин ΔW_s и ΔW_t , входящих в уравнения (2.45) и (2.46). Решив систему уравнений (2.45) и (2.46), получаем значения коэффициентов C_{nm} и D_{nm} , что, в свою очередь, позволяет в результате решения системы уравнений (2.47) и (2.48) найти значения коэффициентов B_{nm} , определяющих форму волнового фронта. Если волновой фронт обладает симметрией вращения, то $B_{n0} = B_{0n} = 0$ для всех значений n . При этом достаточно иметь только одну интерферограмму и использовать уравнения (2.45) и (2.47) или (2.46) и (2.48).

Сохранив принцип получения интерферометрической функции ΔW , саму функцию W , определяющую деформацию волнового фронта, может оказаться удобным представить в виде разложения по ортогональным полиномам Цернике.

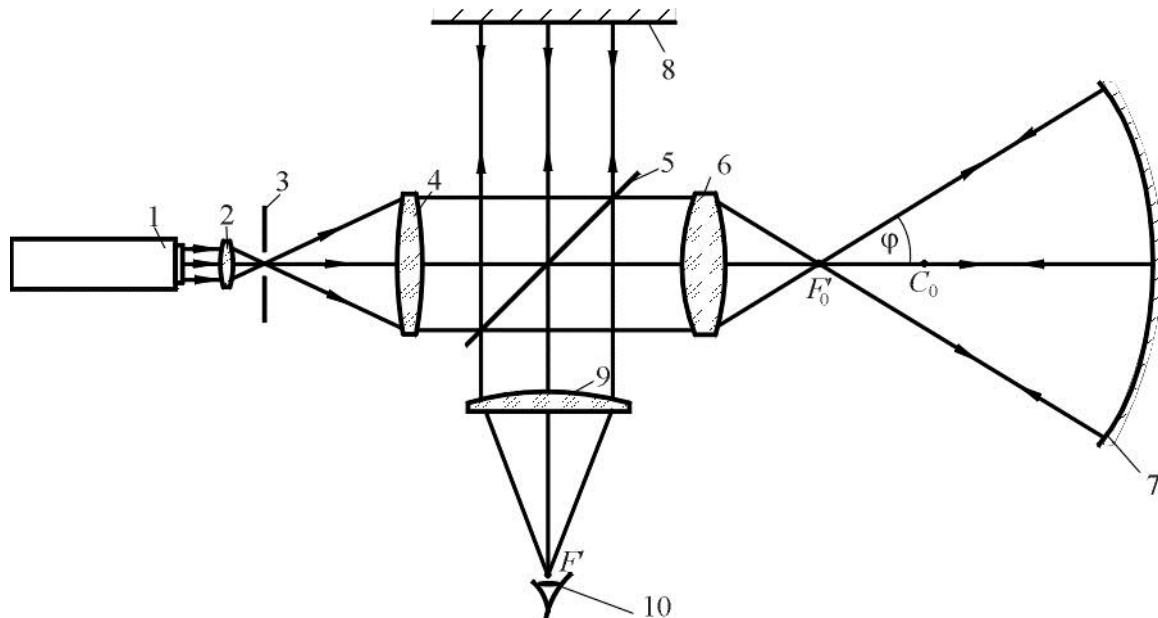


Рис. 2.12 Схема интерферометра с компенсатором в параллельном пучке лучей: 1 – лазерный источник излучения; 2 – фокусирующая линза; 3 – диафрагма; 4 – объектив коллиматора; 5 – светоделительная пластина; 6 – компенсатор; 7 – контролируемая несферическая поверхность; 8 – эталонное зеркало; 9 – глазная линза; 10 – глаз наблюдателя

Принципиальная схема интерферометра с компенсатором в параллельном пучке лучей для контроля несферических поверхностей представлена на рис. 2.12.

Ход лучей в интерферометре вполне очевиден из схемы. В качестве источника света 1 наиболее часто применяют гелий-

неоновый лазер, работающий в одномодовом режиме. Для фокусировки излучения на диафрагме 3, расположенной в передней фокальной плоскости объектива 4 коллиматора, применяют либо простую линзу 2, либо микрообъектив с соответствующей апертурой. Объектив 4 коллиматора формирует параллельный пучок световых лучей (плоский волновой фронт), поступающий в интерферометр. Отличием рассматриваемого интерферометра от интерферометра Тваймана-Грина является устройство рабочей ветви, в которой установлены компенсатор 6 и контролируемая поверхность 7. Компенсатор преобразует плоский волновой фронт, падающий на него, в волновой фронт, эквидистантный контролируемой поверхности при номинальной её форме. При этом задний фокус F'_0 компенсатора совмещён с центром кривизны C_0 при вершине контролируемой поверхности, а любой луч, выходящий из компенсатора под углом φ к оптической оси, направлен по нормали к ней. Если контролируемая поверхность имеет идеальную форму, то лучи, отразившись от неё, повторяют свой путь в обратном направлении, а, следовательно, из компенсатора выходит плоский волновой фронт. Волновой фронт, выходящий из компенсатора, после отражения от разделительной пластинки 5 интерферирует с плоским волновым фронтом, идущим из эталонной ветви от плоского зеркала 8. Поместив зрачок глаза 10 в задней фокальной плоскости объектива 9, наблюдают интерференционную картину, отображающую отклонение реальной формы контролируемой несферической поверхности от номинальной. Поместив входной зрачок объектива фотоаппарата в фокальной плоскости объектива 9, можно зафиксировать изображение наблюдаемой интерференционной картины для последующей её обработки.

При центрированной схеме интерферометра интерференционная картина имеет вид колец, при этом качество колец, расстояние от оптической оси до каждого из них и отклонение колец от окружности вполне определяют погрешности формы контролируемой поверхности. Действительно, расстояние между светлыми или тёмными кольцами на интерференционной картине (интерферограмме) соответствует оптической разности хода соответствующих лучей в рабочей и эталонной ветвях интерферометра, равной λ . Однако, отдельно взятая интерферограмма не несёт информации о знаке оптической разности хода и об изменении его в пределах поля интерферограммы. Сопоставительный анализ рассматриваемой интерферограммы с

интерферограммой, полученной при дозированном смещении вдоль оптической оси поверхности сравнения на расстояние порядка $\frac{1}{4}\lambda$, позволяет достаточно опытному исследователю оценить знак разности хода. Решить эту задачу можно методически гораздо проще.

Пусть в некотором сечении меридиональной плоскостью деформация волнового фронта в пределах контролируемой поверхности изменяет знак и определяется кривой, показанной на рис. 2.13. Если зеркало сравнения δ (рис.2.12) наклонить на малый угол ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка в точке пересечения поверхности зеркала с оптической осью, то к деформации волнового фронта, определяемой кривой W на рис. 2.13, добавится оптическая разность хода $W_3 = 2 \frac{D_3}{2} \rho \operatorname{tg} \omega = D_3 \rho \operatorname{tg} \omega$, где D_3 – диаметр светового пучка лучей в эталонной ветви интерферометра.

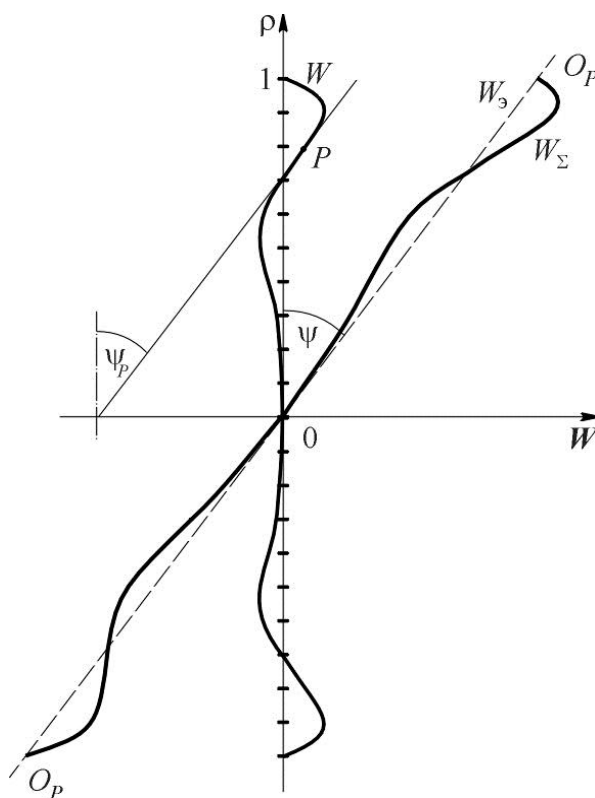


Рис. 2.13 Условие преобразования интерференционной картины, определяющее однозначность её расшифровки

Дополнительная оптическая разность хода W_3 на рис. 2.13 определяется прямой линией $O_p O_p$, образующей с осью ординат угол ψ , тангенс которого равен $\operatorname{tg} \psi = \frac{\partial W_3}{\partial \rho} = D_3 \operatorname{tg} \omega$. При этом суммарная

оптическая разность хода $W_{\Sigma} = W + W_3$ на рис. 2.13 определяется кривой $W_{\Sigma}(\rho)$. Если тангенс угла ψ равен по величине и по знаку наибольшей по абсолютной величине производной кривой $W = W(\rho)$, например, в точке P , т.е. если $|\operatorname{tg}\varphi_P| = \left| \frac{dW}{d\rho} \right|_{\text{наиб}}$, то зависимость $W_{\Sigma} = W_{\Sigma}(\rho)$ становится монотонно возрастающей или монотонно убывающей функцией. Заметим, кстати, что меридиональная составляющая поперечной аберрации равна

$$\delta g' = \frac{1}{\sin \sigma'} \frac{dW}{d\rho},$$

где σ' – угловая апертура луча, выходящего из объектива 9 коллиматора. Следовательно,

$$|\operatorname{tg}\psi| = |\delta g' \sin \sigma'|_{\text{наиб}}.$$

Вполне очевидно, что при $W_{\Sigma} = W_{\Sigma}(\rho)$ интерференционная картина будет иметь вид интерференционных полос, как показано на рис. 2.14, при этом оптическая разность хода в соответствующей точке контролируемой поверхности определится числом полос до неё, умноженном на λ .



Рис. 2.14 Вид интерференционной картины

От полученной таким образом кривой суммарной оптической разности хода аналитически или графически легко перейти к собственно деформации волнового фронта, обусловленной отклонением формы контролируемой поверхности от номинальной.

Определив значения деформации волнового фронта для ряда меридиональных (радиальных) сечений контролируемой

(исследуемой) поверхности, можно аппроксимировать её для всей поверхности, например, системой ортогональных полиномов Цернике. В результате получим функциональную зависимость, которую можно принять в качестве зрачковой функции. Преобразование Фурье зрачковой функции, как известно, с точностью до постоянной величины определяет световое возмущение $u(x', y')$ в изображении точки. Распределение освещённости в изображении точки определяется произведением комплексно сопряжённых величин, определяющих световое возмущение, т.е. $E(x', y') = u(x', y')u^*(x', y')$.

При этом функция рассеяния точки определится очевидным соотношением вида:

$$D(x', y') = \frac{E(x', y')}{\iint_{-\infty}^{\infty} E(x', y') dx' dy'}$$

Достаточно широко применяются интерферометры с компенсатором в расходящемся пучке лучей, типовая схема которых представлена на рис. 2.15. И в этом случае в качестве источника света наиболее часто применяют гелий-неоновый лазер. Компенсатор 5, предназначенный для контроля несферической поверхности 6, установлен в расходящемся пучке лучей, исходящих из диафрагмы 3. В качестве эталонного зеркала 7 применяют вогнутое сферическое зеркало. Для наблюдения интерференционной картины зрачок 8 глаза наблюдателя располагают в плоскости изображения диафрагмы 3 (точка A'). Важно отметить, что светоделительный кубик 4 должен удовлетворять высоким требованиям, предъявляемым к точности углов призм, составляющих кубик, и к качеству обработки их рабочих граней. По своим абберационным свойствам идеально изготовленный кубик эквивалентен плоскопараллельной пластинке, которая, будучи расположенной в расходящемся или сходящемся пучке лучей, нарушает его гомоцентричность. И хотя в рабочую и эталонную ветви интерферометра направляется одинаково искажённый волновой фронт, при достаточно больших апертурных углах световых пучков лучей абберации ветвей интерферометра далеко не всегда компенсируются при образовании интерференционной картины. Поэтому можно рекомендовать такие интерферометры в качестве средства для контроля несферических поверхностей при числовых апертурах пучков световых лучей, не превышающих $0,1 \div 0,15$.

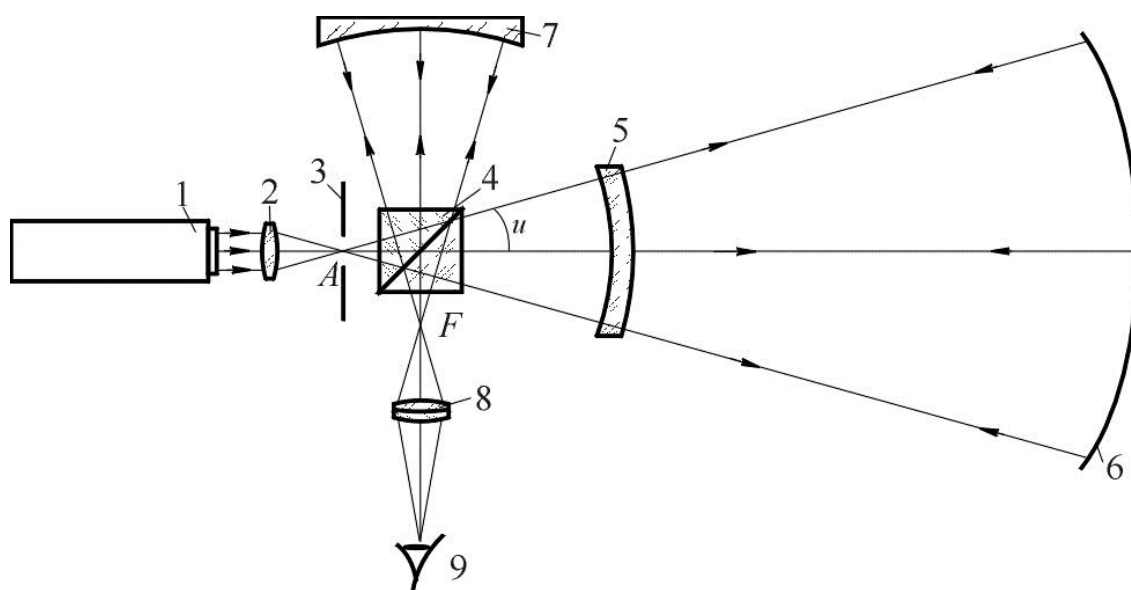


Рис. 2.15 Схема лазерного интерферометра с компенсатором в расходящемся пучке лучей: 1 – лазерный источник излучения; 2 – фокусирующая линза; 3 – диафрагма; 4 – разделительная призма-куб; 5 – компенсатор; 6 – контролируемая асферическая поверхность; 7 – эталонное сферическое зеркало; 8 – глазная линза; 9 – глаз наблюдателя

Интерференционный метод контроля несферических поверхностей незаменим особенно на заключительной стадии их обработки.

2.2. Метод Гартмана

И. Гартман в 1904 году опубликовал описание разработанного им количественного метода исследования объективов по звезде. Суть метода заключается в применении экрана с рядом отверстий, симметрично расположенных по зонам объектива. Такой экран называется диафрагмой Гартмана. Диафрагму располагают перед объективом (при исследовании качества изображения, образованного объективом телескопа, – на верхнем конце трубы) и делают два снимка яркой звезды: один при положении П фотопластинки перед фокальной плоскостью объектива (предфокальный снимок), а второй – в положении З за ней (зафокальный снимок), как показано на рис.2.16. Расстояние от произвольно выбранного на оптической оси объектива начала системы координат x, y, z до плоскости П обозначим через z_1 , а до плоскости З – через z_2 . Расстояние $z_2 - z_1$ должно быть точно измерено.

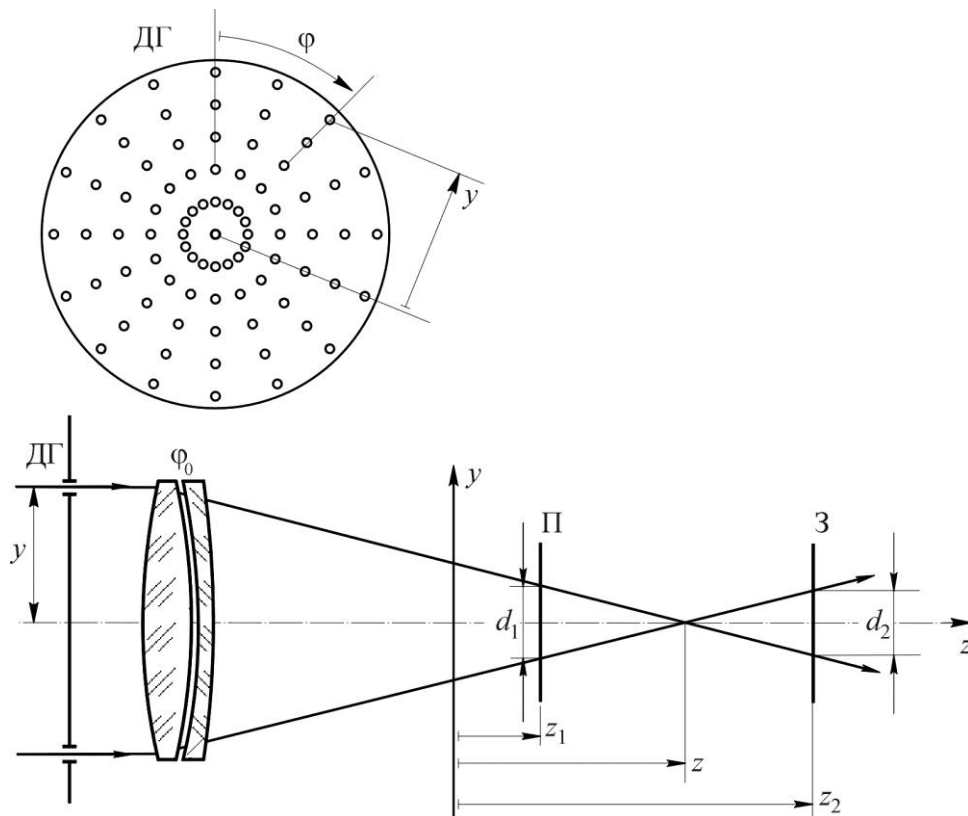


Рис.2.16 Схема метода Гартмана: ДГ – диафрагма Гартмана, ϕ_0 – испытываемый объектив; П – предфокальное и зафокальное положения фотопластины

Световые лучи от звезды пройдут через отверстия диафрагмы и узкие пучки лучей при фотографировании оставят на фотоснимке следы от диафрагмы Гартмана в виде пятен (светлых на позитиве), как показано на рис.2.17.

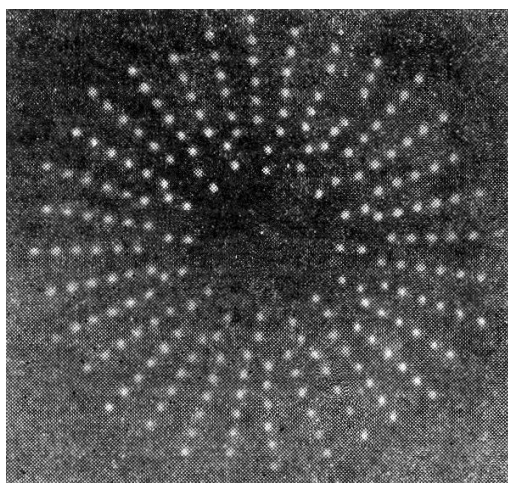


Рис.2.17. Вид гартманограммы

Измерив расстояния d_1 и d_2 между следами, соответствующими симметричным отверстиям диафрагмы, расположенным на расстоянии y от оптической оси объектива, находим, что положение фокальной плоскости для этой зоны равно:

$$z(y) = z_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_2} (z_2 - z_1). \quad (2.49)$$

Значения координаты z для ряда зон y объектива определяют зависимость $z(y)$, описывающую сферическую aberrацию объектива. Для отверстий, расположенных вдоль разных диаметров диафрагмы Гартмана, эта зависимость может быть различной, что указывает на наличие осевого астигматизма. Среднее положение фокуса для всего объектива определится выражением:

$$z_{\text{cp}} = \frac{\sum y z(y)}{\sum y}. \quad (2.50)$$

При этом величина поперечной расфокусировки изображения бесконечно удаленной точки (звезды) относительно среднего положения фокальной плоскости равна

$$\delta g'(y) = \frac{y}{f'} [z(y) - z_{\text{cp}}]. \quad (2.51)$$

Тогда средняя величина радиуса пятна рассеяния в изображении точки определится выражением

$$\delta q'_{\text{cp}} = \frac{1}{f'} \frac{\sum y^2 [z(y) - z_{\text{cp}}]}{\sum y}. \quad (2.52)$$

Полагая в радианной мере $1'' \approx 0,000005$, получаем, что угловая величина среднего радиуса пятна рассеяния в изображении точки равна

$$T = \frac{200\,000}{f'^2} \frac{\sum y^2 [z(y) - z_{\text{cp}}]}{\sum y}. \quad (2.53)$$

Величина T , введенная Г. Леманом, называется технической постоянной или постоянной Гартмана объектива. При этом диаметр изображения звезды, взвешенный по зонам и выраженный в секундах дуги, в средней плоскости равен

$$2\rho = 2T.$$

Было принято считать объектив первоклассным, если $T < 0,5$, хорошим, если $T < 1,5$, и удовлетворительным, если $T < 2,5$. В настоящее время к качеству изображения, образованному объективом

астрономического телескопа, предъявляются гораздо более жёсткие требования.

Диаметр отверстия диафрагмы Гартмана и положение фотопластинок относительно фокальной плоскости должны быть выбраны такими, чтобы, с одной стороны, световые пятна на фотопластинках не сливались, а с другой, – чтобы размер их, определяемый расфокусировкой изображения точки и дифракцией, был бы не слишком велик. М.Ф. Романова (Труды ГОИ, вып.35, с.1, 1927) рекомендует применять отверстия диаметром $d = 0,002f'$, располагая их на расстояниях $l \geq 0,005f'$ друг от друга, а предфокальные и зафокальные снимки выполнять на удалениях от фокальной плоскости, соответственно, равных

$$z - z_1 = \frac{L}{\frac{2\pi l}{15 \cdot 10^3 \lambda} \frac{f'}{L} + 1}, \quad z - z_2 = \frac{L}{\frac{2\pi l}{15 \cdot 10^3 \lambda} \frac{f'}{L} - 1},$$

где L – расстояние от диафрагмы до фокуса.

В основу определения положения плоскости фотосъемки в схеме контроля методом Гартмана могут быть положены следующие соображения. Пусть расстояние от диафрагмы Гартмана до плоскости изображения, образованного исследуемой системой, равно L . Тогда при смещении плоскости фотосъемки относительно плоскости изображения на расстояние Δ расфокусировка изображения точки в волновой мере равна

$$\frac{W}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\lambda} \sigma'^2 = \frac{1}{8} \frac{\Delta}{\lambda} \frac{D_k^2}{L^2}. \quad (2.54)$$

Пусть $\frac{W}{\lambda} = k$. При этом

$$\Delta = 8k\lambda \frac{L^2}{D_k^2}. \quad (2.55)$$

Из геометрических соотношений имеем

$$\frac{l}{L} = \frac{\tilde{l}}{\Delta},$$

где \tilde{l} – расстояние между центрами пятен на гартманограмме (фотоснимке следов лучей от диаграммы Гартмана).

Учитывая соотношение (2.55), находим, что

$$\tilde{l} = \frac{l}{L} \Delta = \frac{8k\lambda l L}{D_k^2}. \quad (2.56)$$

Диаметр первого тёмного кольца в дифракционном изображении точки на гартманограмме определяется выражением

$$d_g = \frac{2,44\lambda}{D_k}(L \pm \Delta) \approx \frac{2,44\lambda}{D_k} L. \quad (2.57)$$

Используя соотношения (1.56) и (1.57), имеем

$$\frac{\tilde{l}}{d_g} = \frac{8kl}{2,44D_k}. \quad (1.58)$$

При $k = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$: $\frac{l}{D_k} \geq (0,61 \div 1,22) \frac{\tilde{l}}{d_g}$, при этом должны соблюдаться очевидные условия: $\frac{l}{D_k} > 1$ и $\frac{\tilde{l}}{d_g} > 1$.

В соответствии с выражением (2.55) при $k = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$ имеем

$$\Delta = \frac{D_{ГГ}}{D_G} L \leq (2 \div 4) \frac{L^2}{D_k^2} \lambda, \quad (2.59)$$

где $D_{ГГ}$ – диаметр гартманограммы; D_G – диаметр диафрагмы Гартмана.

Атмосферные волнения приводят к тому, что внефокальные изображения точки (пятна на гартманограмме) непрерывно и по-разному смещаются. Если время экспозиции будет коротким, то положение каждого пятна на негативе будет определяться случайным влиянием атмосферы. Чтобы устранить (осреднить) её влияние, время экспозиции не должно быть менее 20 секунд.

Вполне очевидно, что метод Гартмана применим не только для исследования аберраций объективов, но и формы обрабатываемых (полируемых) поверхностей оптических деталей. Однако в изложенном виде этот метод применим лишь в тех случаях, когда отклонения формы волнового фронта симметричны относительно оптической оси, чего, как правило, не бывает. Всегда имеются местные деформации волнового фронта, нарушающие симметрию пучка световых лучей. Рассмотрим возможный вариант последовательности выполнения измерений и обработки результатов измерений.

Пусть A_{i1} и A_{j1} – следы диаметрально противоположных отверстий диафрагмы Гартмана на первом (предфокусном) снимке, а A_{i2} и A_{j2} – следы тех же отверстий на втором (зафокальном) снимке, как показано на рис.2.18.

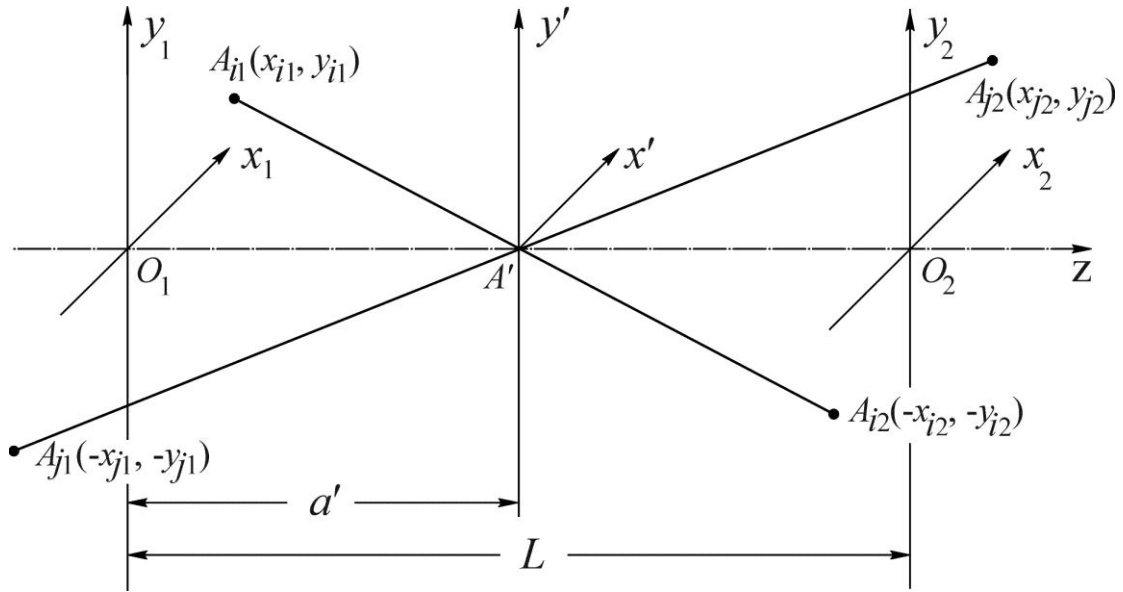


Рис.2.18 Координаты лучей на предфокальном и зафокальном снимках

Будем считать, что в системе координат $x_1O_1y_1$ координаты точки A_{i1} равны:

$$x_{iO_1} = \frac{x_{i1} - x_{j1}}{2}, \quad y_{iO_1} = \frac{y_{i1} - y_{j1}}{2},$$

при этом $d_1 = A_{i1}A_{j1} = \sqrt{(x_{i1} - x_{j1})^2 + (y_{i1} - y_{j1})^2}$.

Для точки A_{j2} в системе координат $x_2O_2y_2$, соответственно, имеем

$$x_{jO_2} = \frac{x_{j2} - x_{i2}}{2}, \quad y_{jO_2} = \frac{y_{j2} - y_{i2}}{2},$$

при этом $d_1 = A_{j2}A_{i2} = \sqrt{(x_{j2} - x_{i2})^2 + (y_{j2} - y_{i2})^2}$.

Естественно принять, например, что $x_i = x_j = 0$. Тогда

$$y_{iO_1} = \frac{y_{i1} - y_{j1}}{2}, \tag{2.60}$$

где $y_{iO_1} - y_{jO_1} = d_1$, при этом $y_{jO_1} = y_{iO_1} - d_1$;

$$y_{jO_2} = \frac{y_{j2} - y_{i2}}{2}, \tag{2.61}$$

где $y_{iO_2} - y_{jO_2} = d_2$, при этом $y_{jO_2} = y_{iO_2} - d_2$.

Кроме того, в соответствии с рисунком расстояние от предфокального положения фотопластинки до плоскости изображения F' (фокальной плоскости), определяемого точкой $A'_{ij}(0, 0)$, равно

$$a'_{ij} = a'_0 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} L, \quad (2.62)$$

где L – расстояние между снимками.

Итак, измерив расстояния между точками $A_{i1}A_{j1}$ и $A_{i2}A_{j2}$ и подставив их значения в формулы (2.60) и (2.61), в первом приближении определяем координаты точек A_{i1} и A_{j1} в системе координат $x_1O_1y_1$ и точек A_{i2} и A_{j2} в системе координат $x_2O_2y_2$. Относительно этих точек измеряем координаты центров следов всех остальных отверстий на первом и втором снимках. Координаты точек пересечения лучей с плоскостью изображения F' (поперечные aberrации) определяем из очевидных геометрических соотношений:

$$x'_k = \Delta x'_k = x_{k1} - \frac{x_{k1} - x_{k2}}{L} a'_0, \quad (2.63)$$

$$y'_k = \Delta y'_k = y_{k1} - \frac{y_{k1} - y_{k2}}{L} a'_0. \quad (2.64)$$

Заметим, что найденные приближенно начала O_1 и O_2 систем координат $x_1O_1y_1$ и $x_2O_2y_2$ могут не совпадать с оптической осью объектива, с одной стороны, а с другой, – определяют приближённое положение плоскости изображения. Кроме того, фотопластинки при фотосъемке могут располагаться не перпендикулярно оптической оси объектива. Отсюда следует, что выражения (2.63) и (2.64) определяют приближённые значения aberrаций.

Количество k измеренных значений aberrаций существенно превышает количество названных параметров t ($k > t$). Поэтому для уточнения значений параметров можно использовать известный математический метод, получивший название метода наименьших квадратов, при этом решение задачи определяется условием

$$\sum_{j=1}^{j=k} (\Delta x'_j{}^2 + \Delta y'_j{}^2) = \min .$$

$$\text{Итак, пусть } F = \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j^2, \quad (2.65)$$

где $\Phi_j^2 = \Delta x'_j{}^2 + \Delta y'_j{}^2$. Для решения задачи необходимо, чтобы

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = \frac{\partial F}{\partial p_2} = \dots = \frac{\partial F}{\partial p_i} = \dots = \frac{\partial F}{\partial p_t} = 0, \quad (2.66)$$

где p_1, p_2, \dots, p_t , – значения параметров. Пусть при исходном значении параметров $p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_i^{(0)}, \dots, p_t^{(0)}$ aberrационные функции равны $\Phi_1^{(0)}, \Phi_2^{(0)}, \dots, \Phi_j^{(0)}, \dots, \Phi_k^{(0)}$. Представим приращения функции в виде

разложений в ряды Тейлора по степеням приращений p_i , ограничиваясь в каждом ряду первым членом разложения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 - \Phi_1^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_i} \Delta p_i, \\ \Phi_2 - \Phi_2^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_i} \Delta p_i, \\ \dots \\ \Phi_j - \Phi_j^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i, \\ \dots \\ \Phi_k - \Phi_k^{(0)} &= \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_i} \Delta p_i, \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

Из выражения (2.65) находим, что

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}. \quad (2.68)$$

Подставив в это выражение значение Φ_j , определяемое рядом (2.67), и учитывая условие (2.66), получаем

$$\sum_{j=1}^{j=k} \left(\Phi_j^{(0)} + \sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i \right) \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} = 0 \quad (2.69)$$

или

$$\sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \left(\sum_{i=1}^{i=t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \Delta p_i \right) = - \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j^{(0)} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i}. \quad (2.70)$$

При этом условия (2.66) сводятся к системе t линейных уравнений с t неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_1 \sum_{j=1}^{j=k} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \right)^2 + \Delta p_2 \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} + \dots + \Delta p_t \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} &= - \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j^{(0)} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \\ \Delta p_1 \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} + \Delta p_2 \sum_{j=1}^{j=k} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \right)^2 + \dots + \Delta p_t \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} &= - \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j^{(0)} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} \\ \dots \\ \Delta p_1 \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} + \Delta p_2 \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} + \dots + \Delta p_t \sum_{j=1}^{j=k} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \right)^2 &= - \sum_{j=1}^{j=k} \Phi_j^{(0)} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

В результате получили систему линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных приращений параметров. По смыслу решаемой задачи система уравнений должна быть совместной, т.е. определитель системы $D \neq 0$, и определённой. В рассматриваемом случае определитель системы уравнений равен:

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{j=k} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \right)^2 & \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_2} & \dots & \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} & \sum_{j=1}^{j=k} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \right)^2 & \dots & \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} & \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \frac{\partial \Phi_j}{\partial p_1} & \dots & \sum_{j=1}^{j=k} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial p_t} \right)^2 \end{vmatrix}.$$

Заменяя столбец, составленный из коэффициентов при неизвестной разности Δp_i , столбцом, составленным из свободных членов, получаем определитель D_i , при этом в соответствии с формулой Крамера искомые разности равны:

$$\Delta p_1 = \frac{D_1}{D}, \quad \Delta p_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad \Delta p_i = \frac{D_i}{D}, \quad \dots, \quad \Delta p_t = \frac{D_t}{D}.$$

Новые значения параметров определяются соотношением $p_i^{(1)} = p_i^{(0)} + \Delta p_i$. Вычислив значения аберраций при новых значениях параметров, продолжаем итерационный процесс уточнения параметров до тех пор, пока не будут соблюдаться с требуемой точностью условия (2.66).

Введем обозначения:

C_{x1}, C_{y1} – смещения начала системы координат x_1, y_1 ;

C_{x2}, C_{y2} – смещения начала системы координат x_2, y_2 ;

C'_x, C'_y – смещения начала системы координат x', y' .

При этом

$$\left. \begin{aligned} x_{k1}^{(1)} &= x_{k1}^{(0)} + C_{x1}, \\ y_{k1}^{(1)} &= y_{k1}^{(0)} + C_{y1}; \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

$$dx_{k1}^{(1)} = dC_{x1}, \quad dy_{k1}^{(1)} = dC_{y1};$$

$$x_{k2}^{(0)} = -x_{k1}^{(0)}, \quad y_{k2}^{(0)} = -y_{k1}^{(0)};$$

$$\left. \begin{aligned} x_{k2}^{(1)} &= -x_{k1}^{(0)} + C_{x2}, \\ y_{k2}^{(1)} &= -y_{k1}^{(0)} + C_{y2}; \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

$$dx_{k2}^{(1)} = dC_{x2}, \quad dy_{k2}^{(1)} = dC_{y2}.$$

Из формулы (2.63) следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_k}{\partial C_{x1}} &= 1 - \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)^{(0)}, & \frac{\partial x'_k}{\partial C_{x2}} &= \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)^{(0)}, \\ \frac{\partial x'_k}{\partial a'_0} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d_1 + d_2}{L} \right)^{(0)}, & \frac{\partial x'_k}{\partial L} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d_1}{L} \right)^{(0)}, & \frac{\partial x'_k}{\partial C'_x} &= 1. \end{aligned}$$

В выражения в скобках, помеченных значком (0), входят исходные значения величин. Из формулы (2.64) находим аналогичные соотношения вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y'_k}{\partial C_{y1}} &= 1 - \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)^{(0)}, & \frac{\partial y'_k}{\partial C_{y2}} &= \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)^{(0)}, \\ \frac{\partial y'_k}{\partial a'_0} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{d_1 + d_2}{L} \right)^{(0)}, & \frac{\partial y'_k}{\partial L} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d_1}{L} \right)^{(0)}, & \frac{\partial y'_k}{\partial C'_y} &= 1. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_t} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \Phi_k}{\partial p_t} \end{pmatrix} = q, \quad \begin{pmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_2 \\ \dots \\ \Delta p_i \\ \dots \\ \Delta p_t \end{pmatrix} = P, \quad \begin{pmatrix} \Phi_1^{(0)} \\ \Phi_2^{(0)} \\ \dots \\ \Phi_j^{(0)} \\ \dots \\ \Phi_k^{(0)} \end{pmatrix} = R.$$

Тогда в матричной форме систему уравнений (2.71) можно записать в виде:

$$q^T q P = -q^T R. \quad (2.74)$$

Отсюда следует, что матрица приращений параметров равна:

$$P = -(q^T q)^{-1} q^T R$$

или $p^{(k+1)} = p^{(k)} - (q^T q)^{-1} q^T R^{(k)}$ при $k = 0, 1, 2, \dots$

При найденных значениях параметров вычисляем значения поперечных aberrаций, используя которые можно восстановить волновой фронт излучения, формирующего изображение точки.

Пусть m', M' – координаты точки на опорной сфере Гаусса (сфере сравнения) радиуса R' в меридиональной и сагиттальной плоскостях соответственно. При этом волновую aberrацию W можно представить в виде функции: $W = W(m', M')$. Тогда

$$dW = \frac{\partial W}{\partial m'} dm' + \frac{\partial W}{\partial M'} dM'.$$

Поперечные aberrации, образованные лучами в меридиональной и сагиттальной плоскостях, соответственно, определяются соотношениями:

$$\delta g' = \frac{R'}{n'} \frac{\partial W}{\partial m'}, \quad \delta G' = \frac{R'}{n'} \frac{\partial W}{\partial M'}.$$

Следовательно,

$$dW = \frac{n'}{R'} (\delta g' dm' + \delta G' dM'). \quad (2.75)$$

В полярной системе координат $m' = a' \rho \cos \theta$, $M' = a' \rho \sin \theta$. При этом

$$\delta g' = \frac{R'}{n' a'} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho} \right), \quad (2.76)$$

$$\delta G' = \frac{R'}{n' a'} \left(\frac{\partial W}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho} \right). \quad (2.77)$$

Функцию волновой aberrации $W(\rho, \theta)$ можно представить в виде разложения по некоторому базису:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^n b_i P_i(\rho, \theta). \quad (2.78)$$

Задача аппроксимации волнового фронта aberrационной функцией (2.78) заключается в определении коэффициентов разложения b_i . Будем считать, что область определения функции $W(\rho, \theta)$ в координатах ρ, θ представляет собой круг. При этом в качестве базиса разложения естественно взять ортогональные полиномы Цернике и представить функцию $W(\rho, \theta)$ в виде:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \left[R_n^m(\rho) (C_{nm} \cos m\theta + S_{nm} \sin m\theta) \right], \quad (2.79)$$

где C_{nm} , S_{nm} – косинусный и синусный коэффициенты разложения функции волновой aberrации.

Полиномы Цернике образуют полную систему полиномов, ортогональных внутри единичного круга. В общем случае радиальные полиномы Цернике определяются формулой вида:

$$R_n^{\pm m}(\rho) = \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(n-m)} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s}. \quad (2.80)$$

При всех n и m справедливо соотношение $R_n^{\pm m}(1) = 1$. Так, например, $R_6^2(\rho) = 15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2$. При $\rho = 1$: $R_6^2(1) = 1$.

Для перехода от поперечных aberrаций к волновым удобно предварительно перейти от aberrаций $\delta g'$ и $\delta G'$ к радиальным $\delta r'_\rho$ и тангенциальным $\delta r'_\theta$ путем поворота координатных осей, используя соотношения:

$$r'_\rho = \delta g' \cos \theta + \delta G' \sin \theta, \quad (2.81)$$

$$r'_\theta = -\delta g' \sin \theta + \delta G' \cos \theta. \quad (2.82)$$

Используя формулы (2.76) и (2.77), получаем

$$r'_\rho = \frac{R'}{n'a'} \frac{\partial W}{\partial \rho}, \quad (2.83)$$

$$r'_\theta = \frac{R'}{n'a'} \frac{\partial W}{\rho \partial \theta}. \quad (2.84)$$

Учитывая формулу (2.79), соотношения (2.83) и (2.84) можно представить в виде:

$$r'_\rho = \frac{R'}{n'a'} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \frac{\partial R_n^m(\rho)}{\partial \rho} (C_{nm} \cos m\theta + S_{nm} \sin m\theta), \quad (2.85)$$

$$r'_\theta = \frac{R'}{n'a'\rho} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n m R_n^m(\rho) (S_{nm} \cos m\theta - C_{nm} \sin m\theta). \quad (2.86)$$

В этих выражениях расстояние R' можно принять равным расстоянию от диафрагмы Гартмана до плоскости изображения, а величину a' считать равной половине диаметра диафрагмы Гартмана.

Итак, подставив измеренные величины поперечных aberrаций в формулы (2.81) и (2.82), а вычисленные значения aberrаций r'_ρ и r'_θ в выражениях (2.85) и (2.86), получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_{nm} и S_{nm} . Поскольку количество отверстий в диафрагме Гартмана, как правило, не равно количеству коэффициентов применяемых полиномов Цернике, систему линейных уравнений можно решить методом наименьших квадратов в рассмотренной последовательности его применения.

Если координаты отверстий измерены с достаточной (требуемой) точностью, то собственно диафрагма Гартмана может играть роль первого фотоснимка; при этом для исследования aberrаций оптической системы или отдельной поверхности вполне можно ограничиться лишь одним, например, зафокальным фотоснимком. Если диафрагма Гартмана расположена перед объективом, то расстояние $R' = a'_0 = f'$, где f' – фокусное расстояние объектива.

Поскольку исследование формы поверхности методом Гартмана сводится к измерению следов "лучей" на фотоснимке, то при контроле из центра кривизны в вершине поверхности можно получить зафокальный снимок, и поперечными aberrациями приближённо считать отклонения измеренных координат пятен на гартманограмме от расчётных.

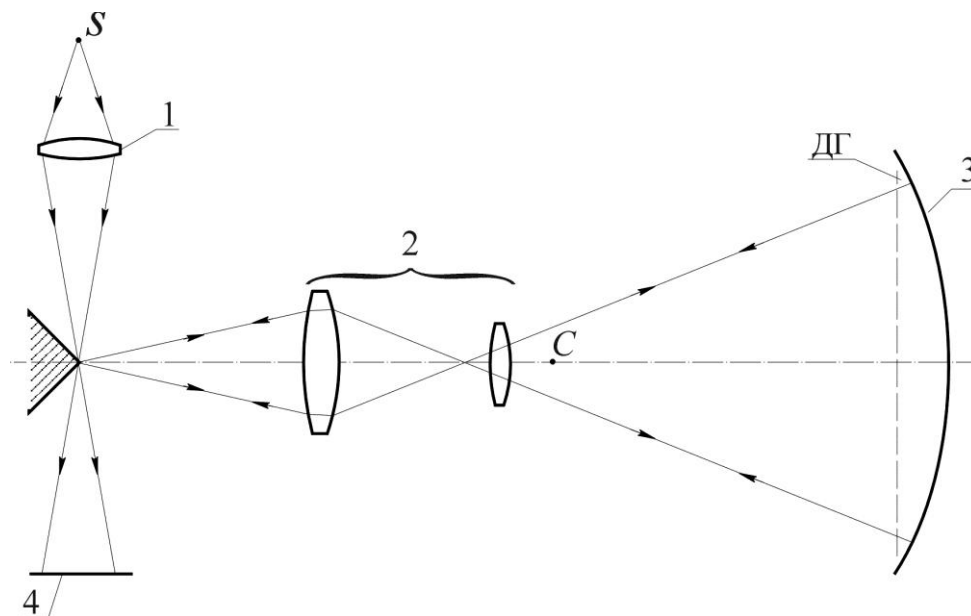


Рис.2.19 Компенсационная схема контроля несферической поверхности методом Гартмана: 1 – оптическая система осветителя; 2 – компенсатор; 3 – контролируемая поверхность; 4 – плоскость зафокального снимка

Компенсационная схема контроля вогнутой несферической отражающей поверхности методом Гартмана показана на рис.2.19. В этом случае диафрагмой Гартмана служит её изображение, образованное компенсатором. При этом следует учитывать влияние дисторсии, вносимой в изображение компенсатором, на положение изображений центров отверстий.

Несмотря на сравнительно высокую трудоёмкость получения конечной информации о форме волнового фронта при контроле aberrаций оптических систем или формы отдельных, как правило,

большого диаметра, поверхностей, метод Гартмана достаточно широко применяется в практике оптического производства. При контроле отражающих поверхностей метод Гартмана применяется, как правило, на ранней стадии их полировки; при этом при контроле из центра кривизны деформация формы обрабатываемой поверхности определяется деформацией волнового фронта и равна:

$$f(\rho, \theta) = \frac{W(\rho, \theta)}{n' - n} = -\frac{1}{2}W(\rho, \theta).$$

Итак, применение метода Гартмана требует выполнения весьма трудоёмких процедур, связанных как со сборкой и юстировкой контрольной схемы, так и с выполнением высокоточных измерений координат следов лучей на фотоснимках. Поэтому для изучения изменяющихся во времени фазовых искажений волнового фронта, например, из-за атмосферной турбулентности, возможность применения собственно метода Гартмана не очевидна. Для решения этой задачи весьма удобным оказался модифицированный метод Гартмана. Предложенный в конце прошлого столетия, этот метод, названный методом Гартмана-Шека, достаточно широко применяется для изучения оптических свойств атмосферной турбулентности и рассматривается в качестве датчика волнового фронта в адаптивных оптических системах. Принцип определения формы волнового фронта с помощью этого метода состоит в следующем.

Пусть параллельный пучок лучей (плоский волновой фронт) падает на линзу, образующую изображение точечного предмета в её задней фокальной плоскости, с которой совмещена чувствительная поверхность квадрантного приёмника П, как показано на рис.2.20а.

Квадрантным называется координатно-чувствительный приёмник, чувствительная поверхность которого разделена на квадранты – четыре отдельных чувствительных площадки 1, 2, 3, 4. Если пятно рассеяния в изображении точки расположено в центре приёмника, равномерно освещая все квадранты, то на выходе приёмника наблюдается дифференциальный нулевой сигнал. При смещении светового пятна возникает разностный сигнал. По разности сигналов от отдельных квадрантов определяются величина и направление смещения. Зная фокусное расстояние линзы, легко определить наклон волнового фронта.

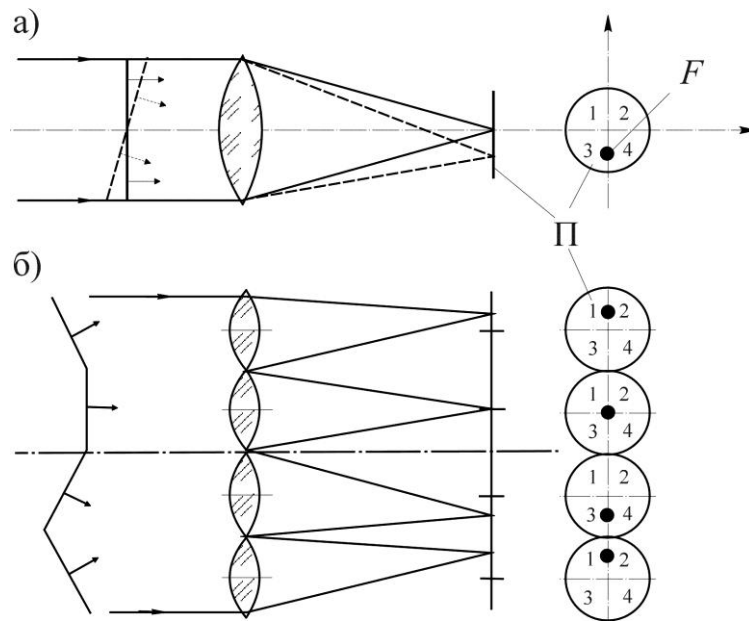


Рис.2.20 Схема датчика Гартмана: а) – измерение общего наклона волнового фронта; б) – измерение формы волнового фронта

Пусть волновой фронт сложной формы падает на линзовый растр, при этом в задней фокальной плоскости каждой линзы расположен свой квадрантный приёмник, как показано на рис.2.20б. Количество линз растра должно быть таково, чтобы волновой фронт в пределах каждой субапертуры можно было бы считать плоским. Вполне очевидно, что величина смещения световых пятен равна величине поперечных aberrаций для лучей, совпадающих с оптической осью линзы соответствующей субапертуры. Определив значения поперечных aberrаций для соответствующих точек апертуры (зрачка), можно восстановить деформацию волнового фронта, аппроксимировав её, например, с помощью ортогональных полиномов Цернике.

На рис.2.21 показано устройство простейшего фотодиодного квадрантного приёмника. Пластика из полупроводника с *p-n*-переходом разделена на четыре части, расстояние между которыми при необходимости может составлять не более 10 мкм. Изготавливаются приёмники с площадками от $1 \times 1 \text{ мм}^2$ до $10 \times 10 \text{ мм}^2$ с вольт-ваттной чувствительностью $0,1 \dots 0,5 \text{ В}/(\text{Вт} \cdot \text{мм})$ и постоянной времени $10^{-4} \dots 10^{-6} \text{ с}$.

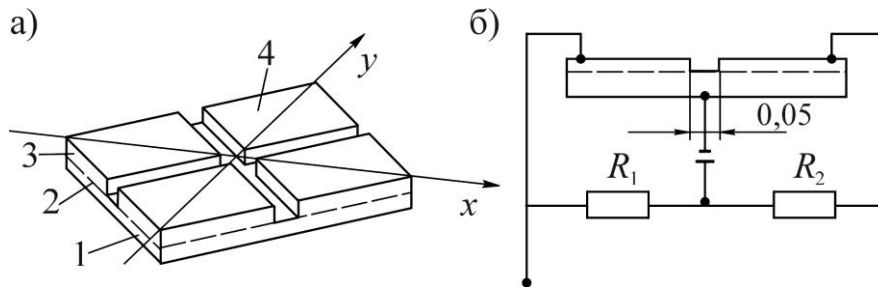


Рис.2.21 Устройство а) и схема включения б) квадрантного фотодиода: 1 – кристаллодержатель; 2 – материал п-типа; 3 – р-область; 4 – прозрачные для излучения контакты

При достаточно большом световом потоке линзовый растр (матрицу линз) можно заменить тонкой непрозрачной пластиной с малыми отверстиями, как показано на рис.2.22а, или прозрачной пластиной с малыми отражателями, как показано на рис.2.22б. В этом случае на соответствующих квадрантных приёмниках формируется дифракционное изображение точки.

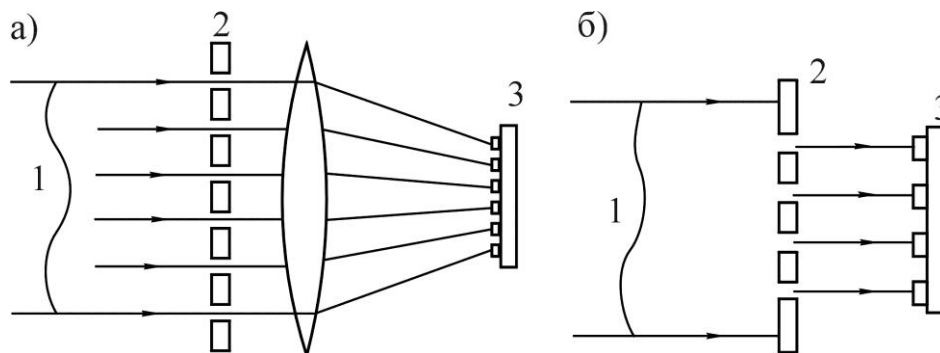


Рис.2.22 Варианты исполнения оптической части датчиков гартмановского типа: 1 – излучение; 2 – система разделения излучения на парциальные волновые фронты; 3 – приёмники излучения

Вариант принципиальной оптической схемы применения датчика Гартмана-Шека представлен на рис.2.23. Объектив ϕ_0 (например, объектив телескопа) образует изображение бесконечно удалённой точки предмета в осевой точке F'_0 задней фокальной плоскости, за которой расположен датчик Гартмана-Шека, как показано на рис.2.23а. Передний фокус F_k объектива ϕ_k коллиматора совмещён с задним фокусом F'_0 объектива ϕ_0 . Таким образом, при безабберационном изображении осевой точки объектив ϕ_k расходящийся пучок лучей преобразует в параллельный, падающий на линзовый растр ЛР, как показано на рис.2.23б. При оптической неоднородности среды в пространстве предметов волновой фронт,

падающий на объектив φ_0 , деформируется, что приводит к поперечным aberrациям в изображении точки, а, следовательно, к соответствующему смещению световых пятен на квадрантных приёмниках.

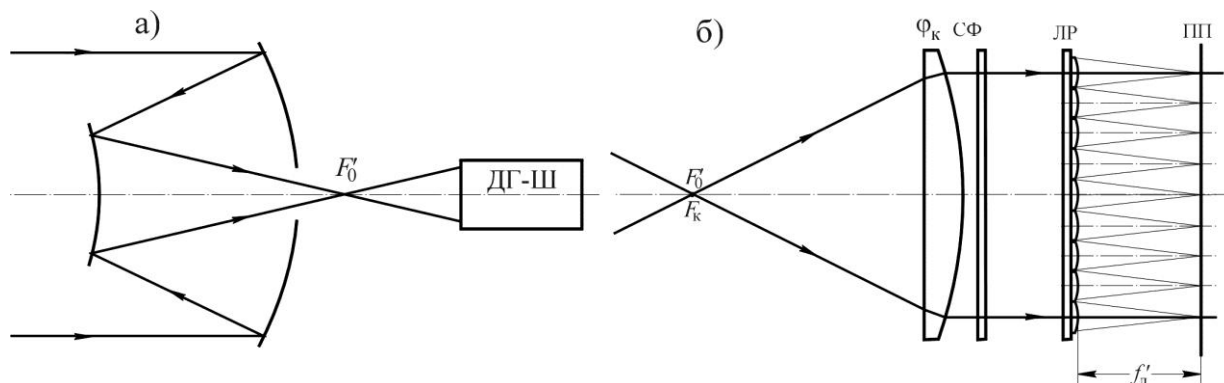


Рис.2.23 Принципиальная оптическая схема применения датчика Гартмана-Шека

Если собственно метод Гартмана позволяет определить поперечные aberrации в изображении точки, образованном объективом φ_0 или отражающей поверхностью зеркала при контроле её формы, то при применении датчика Гартмана-Шека определяется величина смещений световых пятен относительно центров квадрантных приёмников. Пусть участок волнового фронта, сопряжённый с некоторой линзой $\varphi_{ли}$ раstra, имеет деформацию, определяемую отклонением нормали к волновому фронту от идеального положения на угол α , что приводит к поперечной aberrации в фокальной плоскости объектива φ_0 , равной

$$\delta g' = -\alpha f'_0,$$

где f'_0 – фокусное расстояние объектива φ_0 . Вполне очевидно, что эта aberrация приведет к смещению светового пятна в плоскости чувствительной поверхности квадрантного приёмника на величину, равную

$$\delta g'' = -\frac{f'_{ли}}{f'_к} \delta g' = \alpha \frac{f'_{ли}}{f'_к} f'_0,$$

где $f'_к$ – фокусное расстояние объектива коллиматора; $f'_{ли}$ – фокусное расстояние линзы раstra. Отсюда следует, что при $f'_{ли} = f'_к$ величина смещения $\delta g'' = -\delta g'$.

Заметим, что для точной идентификации места деформации волнового фронта он должен быть оптически сопряжён с линзовым растром. Для этого в фокальную плоскость объектива φ_0 можно поместить коллективную линзу $\varphi_{кл}$.

СТРУКТУРА ИЗОБРАЖЕНИЯ, ОБРАЗОВАННОГО ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ, И ОЦЕНКА ЕГО КАЧЕСТВА

Распределение освещённости в плоскости изображения определяется выражением

$$E_0(x'_0, y'_0) = \tau \pi L'(x'_0, y'_0) \sin^2 \sigma' \cos^4 W', \quad (3.1)$$

где $L'(x'_0, y'_0)$ – распределение яркости излучения в направлении главных лучей, осреднённой в пределах светового пучка лучей; τ – коэффициент пропускания света оптической системой и средами, разделяющими предмет, оптическую систему и плоскость изображения; σ' – угол, образованный крайним лучом осевого пучка с оптической осью в пространстве изображений; W' – угол (полевой угол) между главным лучом и оптической осью в пространстве изображений. Распределение яркости $L'(x'_0, y'_0) = \frac{n'^2}{n^2} L(x_0, y_0)$, где $L(x_0, y_0)$ – распределение яркости излучения поверхностью предмета; n и n' – показатели преломления сред в пространстве предметов и изображений соответственно. Следовательно,

$$E_0(x'_0, y'_0) = \tau \pi L(x_0, y_0) \frac{n'^2}{n^2} \sin^2 \sigma' \cos^4 W'. \quad (3.2)$$

Поперечное увеличение изображения, образованного оптической системой, определяется соотношением вида:

$$V = \frac{n \sin \sigma}{n' \sin \sigma'},$$

где σ – угол, образованный крайним лучом, исходящим из осевой точки предмета, с оптической осью. При этом выражение (3.2) можно представить в виде:

$$E_0(x'_0, y'_0) = \tau \pi L(x_0, y_0) \frac{\sin^2 \sigma}{V^2} \cos^4 W'.$$

Пусть, например, $\sin W' = 0,1$, что соответствует углу $W' \approx 6^\circ$.

Тогда $\cos^4 W' = (1 - \sin^2 W')^2 = 1 - 2\sin^2 W' + \sin^4 W' = 0,9801$.

Следовательно, в пределах достаточно большого углового поля, например, в случае объективов зрительных труб, приближённо можно считать, что

$$E_0(x'_0, y'_0) = \tau \pi \frac{\sin^2 \sigma}{V^2} L(x_0, y_0) \quad (3.3)$$

или

$$E_0(x'_0, y'_0) = KL(x_0, y_0), \quad (3.4)$$

где $K = \tau\pi \frac{\sin^2 \sigma}{V^2} = \text{const.}$

Таким образом, при сравнительно малом, но достаточно большом угловом поле распределение освещённости на плоскости изображения идеально отображает распределение яркости излучения поверхности предмета.

Важно отметить, что формула (3.1) получена для идеальной оптической системы на основе представлений геометрической оптики. Оптическую систему будем считать геометрически идеальной, если она удовлетворяет следующим условиям, сформулированным Д.К.Максвеллом в 1858 году:

– все лучи, вышедшие из точки предмета $A(x, y)$ и прошедшие через оптическую систему, должны сойтись (пересечься) в точке изображения $A'(x', y')$;

– каждый элемент плоскости предмета, нормальной к оптической оси и содержащей точку $A(x, y)$, должен быть изображён элементом плоскости, нормальной к оптической оси и содержащей точку $A'(x', y')$;

– высота изображения y' должна быть пропорциональна высоте предмета y , причём коэффициент пропорциональности должен быть постоянным независимо от местоположения точки $A(x, y)$ в плоскости предмета.

Отклонения от первого условия определяют поперечные aberrации широких и узких пучков лучей, образующих изображение; отклонения от второго условия определяют кривизну поверхности изображения, а отклонения от третьего условия нарушают подобие изображения предмету и называются дисторсией. Однако, в изображении, образованном геометрически идеальной оптической системой, распределение освещённости не является идеальным отображением яркости излучения поверхностью предмета, поскольку в этом случае каждая точка предмета изображается в виде дифракционного пятна, радиус первого тёмного кольца в котором (радиус кружка или пятна Эри) при круглой форме зрачков определяется формулой:

$$r'_d = \frac{1,22\lambda}{2n' \sin \sigma'}. \quad (3.5)$$

Вполне очевидно, что при прочих равных условиях размер дифракционного пятна в изображении точки тем меньше, чем меньше длина волны излучения λ . Этим, например, объясняется тот факт, что для повышения эффективности применения планарной технологии производства современной полупроводниковой электроники наблюдается постоянное стремление использовать излучение более коротких длин волн.

Из соотношения (3.5) следует, что только при $\lambda = 0$ безабберационная оптическая система формирует геометрически идеальное изображение. Если предположить, что величина светового потока, излучаемого точечным источником (точечным предметом), мала, но конечна, то вполне очевидно, что яркость излучения такого источника должна быть бесконечно большой, при этом бесконечно велика должна быть и освещённость геометрически идеального изображения точки. Освещённость идеализированного изображения точки можно описать с помощью так называемой δ -функции Дирака:

$$\delta(x', y') = \lim_{N \rightarrow \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi(x'^2 + y'^2)]. \quad (3.6)$$

Представим это выражение в виде:

$$\begin{aligned} \delta(x', y') &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^2}{\exp[N^2 \pi(x'^2 + y'^2)]} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{N^2} + \pi(x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2} N^2 \pi^2 (x'^2 + y'^2)^2 + \dots}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $x' = 0$ и $y' = 0$ функция $\delta(0, 0) = \infty$. Если $x' \neq 0$ и (или) $y' \neq 0$, то $\delta(x', y') = 0$. Кроме того, можно показать, что

что $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x', y') dx' dy' = 1$. Таким образом, δ -функция обладает следующими свойствами:

$$\delta(x' - x'_0, y' - y'_0) = \begin{cases} \infty, & \text{при } x' = x'_0; y' = y'_0; \\ 0, & \text{при } x' \neq x'_0 \text{ и (или) } y' \neq y'_0; \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - x'_0, y' - y'_0) dx' dy' = 1.$$

Отсюда следует, что если δ -функция описывает распределение освещённости в идеализированном изображении точки, то световой поток, формирующий это изображение, равен единице. С другой стороны, если яркость излучения точечного источника света равна

нулю, то освещённость в изображении точки, а, следовательно, и поток, его формирующий, тоже будут равны нулю. Поэтому освещённость в идеализированном изображении точки определим произведением вида:

$$E_0(x', y')\delta(x' - x'_0, y' - y'_0).$$

Пусть $f(x', y')$ – любая функция переменных x' и y' . Если $f(x', y')$ непрерывна при $x' = x'_0$ и $y' = y'_0$, то справедливо следующее важное соотношение

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x', y')\delta(x' - x'_0, y' - y'_0)dx'dy' = f(x'_0, y'_0),$$

т.е. справедливо соотношение

$$f(x', y')\delta(x' - x'_0, y' - y'_0) = f(x'_0, y'_0)\delta(x' - x'_0, y' - y'_0). \quad (3.7)$$

Свойство δ -функции, определяемое соотношением (3.7), называется фильтрующим свойством δ -функции.

Таким образом, выражение

$$E_0(x', y')\delta(x' - x'_0, y' - y'_0) = E_0(x'_0, y'_0)\delta(x' - x'_0, y' - y'_0).$$

Вполне очевидно, что световой поток, формирующий как реальное изображение точки (с учётом дифракции и аббераций), так и идеализированное, должен быть одним и тем же, равным входящему в оптическую систему с учётом коэффициента пропускания сред оптической системы.

Следовательно, световой поток, формирующий идеальное изображение точки, равен

$$\begin{aligned} \int\int_{-\infty}^{\infty} E(x' - x'_0, y' - y'_0)dx'dy' &= \\ &= \int\int_{-\infty}^{\infty} E_0(x', y')\delta(x' - x'_0, y' - y'_0)dx'dy' = E_0(x'_0, y'_0), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $E_0(x'_0, y'_0)$ – величина освещённости в изображении точки, определяемая формулой (3.1) или формулой (3.3).

Функцию $D(x' - x'_0, y' - y'_0)$, определяемую отношением

$$D(x' - x'_0, y' - y'_0) = \frac{E(x' - x'_0, y' - y'_0)}{E_0(x'_0, y'_0)},$$

называют функцией рассеяния точки (ФРТ). При этом из выражения (3.8) находим, что

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} D(x' - x'_0, y' - y'_0)dx'dy' = 1. \quad (3.9)$$

Таким образом, ФРТ можно интерпретировать как изображение точечного источника излучения, в котором распределён поток излучения, равный единице.

Заметим, что

$$E(x' - x'_0, y' - y'_0) = D(x' - x'_0, y' - y'_0)E_0(x'_0, y'_0), \quad (3.10)$$

где $E(x' - x'_0, y' - y'_0)$ – распределение освещённости в реальном изображении точки, образованном оптической системой.

Если ФРТ постоянна для всех точек плоскости изображения (абберации практически не изменяются в пределах всей плоскости изображения), то освещённость в некоторой точке с координатами x', y' зависит только от расстояния, на котором она находится от точки идеализированного изображения с координатами x'_0, y'_0 . Это означает, что оптическая система удовлетворяет условию пространственной инвариантности, т.е. в соответствии с терминологией, принятой в оптике, она обладает изопланатической коррекцией абберацией или, просто, она изопланатична. В общем случае оптические системы этому условию не удовлетворяют. Однако, плоскость изображения всегда можно разделить на кольцевые зоны, концентричные осевой точке изображения, в пределах которых условие изопланатичности практически соблюдается, т.е. в пределах которых ФРТ изменяется в допустимых пределах.

Поскольку в изображении точки освещённость распределена на малой, но конечной площади, то вполне очевидно, что распределение освещённости в изображении других точек будет влиять на общее распределение освещённости в изображении этих точек. Будем считать излучаемый каждой точкой предмета свет некогерентным, при этом освещённость в каждой точке плоскости изображения равна сумме освещённостей от каждой изображаемой точки. В общем случае изображающая система линейна, если $E(x', y') = \sum_i a_i E_i(x', y')$.

3.1. Оптическая система как фильтр пространственных частот

В общем случае влияние оптической системы на структуру образованного ею изображения можно определить с помощью математического оператора, который показывает, как нужно преобразовать функцию $E_0(x'_0, y'_0)$ идеализированного изображения, чтобы получить функцию распределения освещённости $E(x', y')$ в действительном изображении. Такое воздействие оптической системы, удовлетворяющей требованиям линейности и

изопланатичности, можно описать с помощью передаточной функции. Передаточная функция должна быть достаточно универсальна, чтобы её можно было применить к системам различного назначения. Другое важное требование, предъявляемое к передаточной функции, состоит в том, чтобы её можно было измерить.

Рассмотрим распределение освещённости на плоскости изображения вдоль линии, параллельной, например, оси x' . В этом случае $E_0(x'_0, y'_0) = E_0(x'_0, y'_0 = const)$. Если эту линию совместить с осью x' , то $y'_0 = 0$. При этом $E_0(x'_0, y'_0) = E_0(x'_0)$ и, соответственно,

$$E(x' - x'_0) = E(x'_0) D_{\text{л}}(x' - x'_0), \quad (3.11)$$

где $D_{\text{л}}(x' - x'_0)$ – функция рассеяния линии (ФРЛ), причём

$$D_{\text{л}}(x' - x'_0) = \int_{-\infty}^{\infty} D(x' - x'_0, y' - y'_0) dy'.$$

Условие нормировки ФРЛ таково, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{л}}(x' - x'_0) dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} D(x' - x'_0, y' - y'_0) dx' dy' = 1.$$

В случае изопланатической системы

$$D_{\text{л}}(x' - x'_{0i}) = D_{\text{л}}(x' - x'_{0j}).$$

Удобно обозначить $x' - x'_0 = \xi'$. При этом ФРЛ можно представить в виде, показанном на рис.3.1.

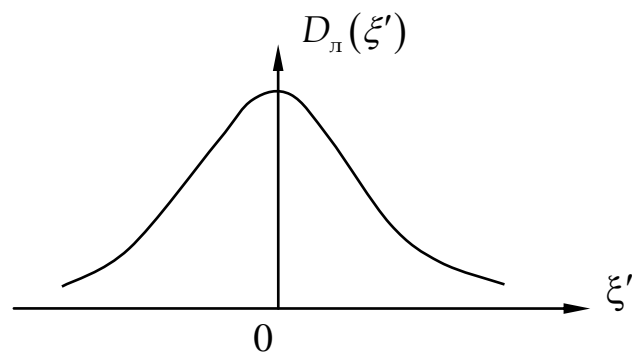


Рис.3.1. Функция рассеяния линии

Обратимся к рис.3.2, на котором распределение освещённости в идеализированном изображении в направлении оси x' представлено кривой $E_0 = E_0(x'_0)$. Определим освещённость изображения $E(x')$ в

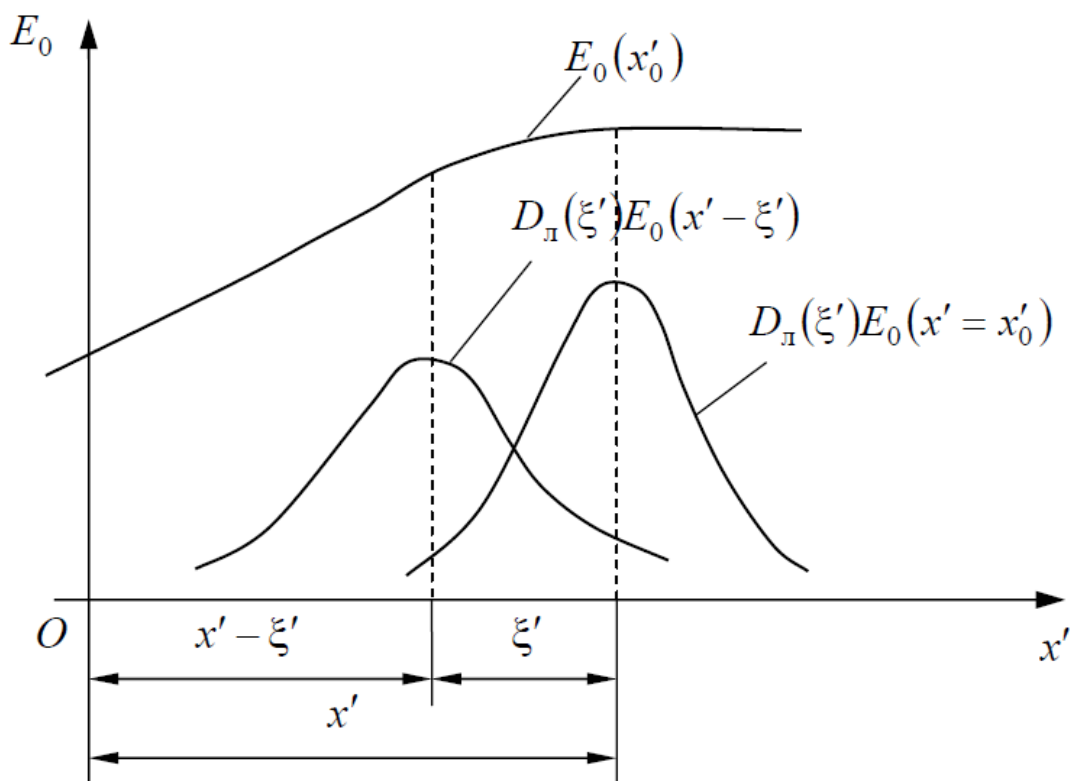


Рис.3.2. К выводу свёртки функций $D_n(\xi')$ и $E_0(x' - \xi')$

произвольной точке с координатой x' . Для этого надо найти сумму ординат, равных $D_n(\xi')E_0(x' - \xi')$ при изменении координаты ξ' (отсчитываемой от точки с координатой x') теоретически от $-\infty$ до ∞ . При каждом значении координаты ξ' соответствующую ординату можно считать принадлежащей ФРЛ в изображении предмета с абсциссой $x'_0 = x' - \xi'$ и отстоящей от центра этой функции (т.е. от абсциссы x'_0) на расстоянии, равном ξ' , как показано на рис.3.2. Таким образом, распределение освещённости в изображении предмета определяется выражением

$$E(x') = \int_{-\infty}^{\infty} D_n(\xi')E_0(x' - \xi')d\xi'. \quad (3.12)$$

Этот интеграл представляет собой так называемую свёртку функции $E_0(x'_0)$ распределения освещённости вдоль оси x' в идеализированном изображении предмета, образованном оптической системой, с функцией рассеяния линии $D_n(\xi')$. Свёртку функций часто обозначают значком \otimes . При этом $E = D_n \otimes E_0$. В общем случае двумерного распределения освещённости $E_0(x'_0, y'_0)$ в

идеализированном изображении предмета формула (3.12) принимает вид:

$$E(x', y') = \iint_{-\infty}^{\infty} D(\xi', \eta') E_0(x' - \xi', y' - \eta') d\xi' d\eta', \quad (3.13)$$

где ξ', η' – координаты ФРТ.

Можно показать, что процесс вычисления интеграла (3.13) существенно упрощается, если применить аппарат преобразования Фурье, что приводит к интересным и полезным соображениям о действии оптической системы как фильтра пространственных частот.

Уместно напомнить, что формула (3.12), а, соответственно, и формула (3.13), получены в предположении, что вид функции $D(\xi', \eta')$ в пределах рассматриваемых участков изображения не изменяется, т.е. в пределах рассматриваемых участков изображения оптическая система обладает изопланатической коррекцией aberrаций, при этом каждая точка предмета излучает некогерентный свет.

Рассмотрим две функции $f(x)$ и $F(x)$, преобразования Фурье которых равны $g(u)$ и $G(u)$ соответственно. В этом случае в соответствии с теоремой свёртки имеем:

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) F(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \right] \exp[-i2\pi(N_x x + N_y y)] dx dy = \\ & = g(N_x, N_y) G(N_x, N_y), \end{aligned}$$

т.е. преобразование Фурье свёртки двух функций полностью эквивалентно более простой операции умножения их образов. Теорема свёртки известна как теорема Бореля.

В соответствии с теоремой свёртки преобразование Фурье распределения освещённости $E(x', y')$, определяемого формулой (3.13), равно произведению преобразований Фурье ФРТ $D(\xi', \eta')$ и распределения освещённости $E_0(x'_0, y'_0)$ в идеализированном изображении предмета:

$$e(N_x, N_y) = d(N_x, N_y) e_0(N_x, N_y). \quad (3.14)$$

Формула (3.14) определяет механизм образования изображения: каждой составляющей пространственного спектра $e_0(N_x, N_y)$ распределения освещённости при идеализированном изображении предмета соответствует коэффициент $d(N_x, N_y)$, который можно назвать "множителем передачи" оптической системы или

"множителем контраста" изображения. Таким образом, функция $d(N_x, N_y)$, характеризующая состояние коррекции аберраций в изображении, образованном оптической системой, по сути дела выполняет роль фильтра пространственных частот.

Функция $d(N_x, N_y)$, определяющая то, каким образом каждая частотная составляющая передаётся оптической системой с учётом дифракции, остаточных аберраций и ошибок изготовления оптической системы, называется оптической передаточной функцией (ОПФ) системы.

ОПФ, являющаяся преобразованием Фурье ФРТ, представляет собой в общем случае комплексную функцию, которую можно записать в показательной форме через модуль $T(N)$ комплексной функции и аргумент $\varphi(N)$:

$$\begin{aligned} d(N_x, N_y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} D(x', y') \exp[-i2\pi(N_x x' + N_y y')] dx' dy' = \\ &= T(N_x, N_y) \exp[-i\varphi(N_x, N_y)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В случае одномерного распределения освещённости в идеализированном изображении предмета (этот случай чаще всего встречается при измерении ОПФ, когда предметом служит решётка из параллельных штрихов, узкая щель и т.п.) ОПФ становится функцией одного аргумента – пространственной частоты N , например, вдоль оси x' :

$$d(N) = \int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{л}}(x') \exp[-i2\pi N x'] dx'.$$

Используя формулу Эйлера, получаем

$$\begin{aligned} d(N) &= \int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{л}}(x') \cos 2\pi N x' dx' - i \int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{л}}(x') \sin 2\pi N x' dx' = \\ &= C(N) - iS(N), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где интегралы, обозначенные через C и S , называются косинус-преобразованием и синус-преобразованием функции рассеяния линии. Модуль комплексной функции по определению равен

$$\begin{aligned} T(N) &= \sqrt{[C(N)]^2 + [S(N)]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{л}}(x') \cos 2\pi N x' dx' \right]^2 + \left[\int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{л}}(x') \sin 2\pi N x' dx' \right]^2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

а аргумент $\varphi(N)$ может быть определён одним из соотношений:

$$\sin \varphi(N) = \frac{S(N)}{T(N)} \quad (3.18) \quad \text{или} \quad \cos \varphi(N) = \frac{C(N)}{T(N)} \quad (3.19)$$

Для лучшего понимания смысла модуля $T(N)$ и аргумента $\varphi(N)$ комплексной ОПФ рассмотрим более подробно, как изображается отдельная частотная составляющая спектра идеализированного изображения предмета оптической системой, имеющей известную функцию рассеяния.

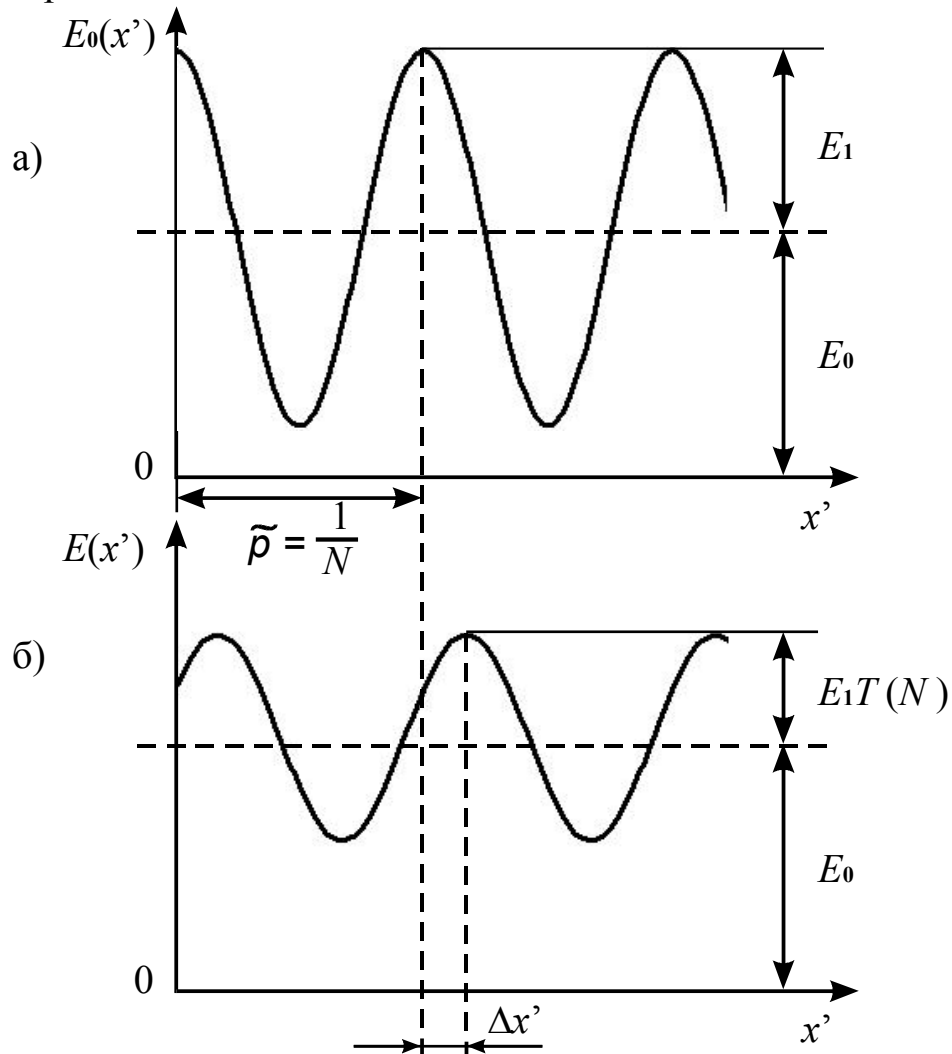


Рис.3.3. Распределение освещённости в идеализированном а) и действительном б) изображениях

Пусть распределение освещённости в идеализированном изображении предмета (или в его частотной составляющей) определяется косинусоидой с постоянной составляющей E_0 , как показано на рис.3.3а, при этом

$$E_0(x') = E_0 + E_1 \cos 2\pi N x', \quad (3.20)$$

где N – пространственная частота; заметим, что пространственный период косинусоиды $p = \frac{1}{N}$.

Пусть $D_{\text{л}}(\xi')$ – функция рассеяния линии.

Тогда

$$\begin{aligned} E(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{л}}(\xi') E_0(x' - \xi') d\xi' = E_0 + E_1 \left[\cos 2\pi N x' \int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{л}}(\xi') \times \right. \\ &\times \cos 2\pi N \xi' d\xi' + \sin 2\pi N x' \left. \int_{-\infty}^{\infty} D_{\text{л}}(\xi') \sin 2\pi N \xi' d\xi' \right] = \\ &= E_0 + E_1 [C(N) \cos 2\pi N x' + S(N) \sin 2\pi N x'] = \\ &-E_0 + E_1 T(N) [\cos \varphi(N) \cos 2\pi N x' + \sin \varphi(N) \sin 2\pi N x']. \end{aligned}$$

В результате получаем, что

$$E(x') = E_0 + E_1 T(N) \cos[2\pi N x' - \varphi(N)]. \quad (3.21)$$

Отсюда следует, что полученное распределение освещённости в изображении предмета при косинусоидальном распределении освещённости в его идеализированном изображении остаётся косинусоидальным и той же пространственной частоты. Однако, модуляция, равная отношению амплитуды переменной составляющей распределения освещённости к среднему её значению (т.е. к постоянной составляющей) для полученного распределения освещённости оказывается меньше, чем для исходного, как показано на рис.3.3б. Действительно, для идеализированного изображения имеем

$$m = \frac{E_1}{E_0}, \quad (3.22)$$

а при действительном распределении освещённости величина

$$m' = \frac{E_1}{E_0} T(N), \quad (3.23)$$

$$\text{т.е. } T(N) = \frac{m'}{m}. \quad (3.24)$$

Таким образом, значение модуля ОПФ, т.е. значение $T(N)$, для каждой пространственной частоты равно отношению модуляции распределения освещённости в действительном изображении к модуляции распределения освещённости в идеализированном изображении гармонической составляющей соответствующей частоты и называется коэффициентом передачи модуляции (КПМ) системы. Совокупность значений КПМ для различных

пространственных частот составляет функцию передачи модуляции (ФПМ) или частотно-контрастную характеристику оптической системы.

Распределение освещённости в действительном изображении отличается от распределения освещённости в идеализированном изображении ещё и сдвигом косинусоиды на угол $\varphi(N)$, определяющим линейное смещение косинусоиды на расстояние $\Delta x' = \frac{\varphi(N)}{2\pi N}$. Совокупность значений сдвига (смещения) фазы $\varphi(N)$

для различных пространственных частот составляет функцию передачи фазы (ФПФ) системы. Как следует из выражений (3.16)–(3.19), если $N = 0$, то $T(0) = 1$, а $\varphi(0) = 0$.

Определим контраст идеализированного изображения выражением

$$k = \frac{E_0(x')_{\max} - E_0(x')_{\min}}{E_0(x')_{\max} + E_0(x')_{\min}}. \quad (3.25)$$

В рассматриваемом случае $E_0(x')_{\max} = E_0 + E_1$, а $E_0(x')_{\min} = E_0 - E_1$.

Тогда

$$k = \frac{E_0 + E_1 - E_0 + E_1}{E_0 + E_1 + E_0 - E_1} = \frac{E_1}{E_0} = m.$$

При этом контраст действительного изображения равен

$$\begin{aligned} k' &= \frac{E(x')_{\max} - E(x')_{\min}}{E(x')_{\max} + E(x')_{\min}} = \\ &= \frac{E_0 + E_1 T(N) - E_0 + E_1 T(N)}{E_0 + E_1 T(N) + E_0 - E_1 T(N)} = \frac{E_1 T(N)}{E_0} = m T(N) = m'. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$T(N) = \frac{k'}{k} = \frac{m'}{m}.$$

При $k = 1$, т.е. при $E_1 = E_0$, величина $T(N) = k' = m'$.

Итак, нормированное распределение освещённости в изображении точечного предмета, образованном оптической системой, называется функцией рассеяния точки (ФРТ). Другими названиями этой же характеристики являются следующие: выходной сигнал импульсного типа, функция Грина, дифракционная картина Фраунгофера. ФРТ является одной из двух наиболее полных характеристик, описывающих качество изображения, образованного оптической системой. Распределение освещённости $E(x', y')$ в

изображении любого предмета в принципе можно рассчитать как свёртку распределения освещённости в идеализированном изображении предмета, т.е. $E_0(x'_0, y'_0)$, и ФРТ. Практически же для любого реального предмета, распределение освещённости в идеализированном изображении которого непрерывно, подобный расчёт является довольно сложной процедурой. В то же время одиночные светящиеся точки или совокупность таких дискретных точек часто являются предметами для оптических систем, применяемых в астрономии, что придаёт ФРТ не только теоретическое значение, но и определённый практический смысл.

Второй из двух наиболее полных характеристик качества изображения является комплексная оптическая передаточная функция (ОПФ), удобная для характеристики качества изображения при непрерывном распределении освещённости в нём. Математически ФРТ и ОПФ взаимозаменяемы, так как каждая из них может быть получена путём Фурье-преобразования другой.

Применение ОПФ удобно потому, что, во-первых, процессы Фурье-преобразования функции $E_0(x'_0, y'_0)$, умножения её на ОПФ и обратного Фурье-преобразования результата для получения функции $E(x', y')$ выполнить проще, чем эквивалентную математическую процедуру свёртки; во-вторых, ОПФ для ряда независимых факторов, ухудшающих качество изображения, могут быть объединены простым их перемножением, в результате чего получается полная ОПФ изображающей системы.

3.2. Структура изображения точечного предмета, образованного оптической системой

3.2.1. Оптическая передаточная функция

Световое возмущение в плоскости изображения, возникающее из-за наличия точечного источника излучения в плоскости предмета, с точностью до комплексной постоянной определяется двумерным преобразованием Фурье от светового возмущения на сфере в пределах выходного зрачка, и может быть записано в виде:

$$u(x', y') = -\frac{i}{2\pi k} \iint_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') \exp(-i(\mu'x' + \nu'y')) d\mu' d\nu' \quad (3.26)$$

где $\mu' = k \sin \sigma'_t = k \frac{m'}{R'}$; $\nu' = k \sin \sigma'_s = k \frac{M'}{R'}$; m', M' – координаты в плоскости выходного зрачка; R' – радиус сферической поверхности с

вершиной в центре выходного зрачка. Световое возмущение на сфере в пределах выходного зрачка определяется так называемой зрачковой функцией $F(\mu', \nu')$, которая определяется выражением: $F(\mu', \nu') = P(\mu', \nu')u(\mu', \nu')\exp[-ikW(\mu', \nu')]$, где $u(\mu', \nu')$ – амплитуда светового возмущения на выходной сфере радиуса R' ; $W(\mu', \nu')$ – функция волновой аберрации; $P(\mu', \nu')$ – единично-нулевая функция, определяемая областью выходного зрачка $S'_{зр}$, при этом

$$P(\mu', \nu') = \begin{cases} 1, & (m', M') \in S'_{зр} \\ 0, & (m', M') \notin S'_{зр}. \end{cases}$$

При когерентном освещении выражение (3.26) определяет функцию Грина для оптической системы, так как она линейно суммируется от точки к точке. С другой стороны, преобразование Фурье этого выражения, т.е. $F(\mu', \nu')$, представляет собой оптическую передаточную функцию при когерентном освещении. При $W(\mu', \nu') \equiv 0$ зрачковая функция $F(\mu', \nu') = 0$ за пределами зрачка. При этом при круглой форме выходного зрачка предельная разрешаемая частота $\omega'_{0к} = \frac{2\pi D'_{зр}}{\lambda 2R'} = 2\pi N'_{0к}$, т.е. предельная величина периода разрешаемой пространственной частоты объекта $\frac{1}{N'_{0к}} = \frac{2\lambda}{D'_{зр}} R'$.

В общем случае некогерентного освещения (или в случае наблюдения самосветящихся объектов) линейно суммируется функция $|u(x', y')|^2$, которая и выступает как функция Грина или как функция распределения освещённости в изображении точки, образованном оптической системой, равная:

$$E(x', y') = u(x', y')u^*(x', y'). \quad (3.27)$$

Функция рассеяния точки (ФРТ) при этом определится соотношением вида:

$$D(x', y') = \frac{E(x', y')}{\iint E(x', y') dx' dy'} = \frac{E(x', y')}{E_0(0, 0)}.$$

В этом случае оптическая передаточная функция (ОПФ) равна

$$\tau(\mu', \nu') = \frac{1}{E_0(0, 0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x', y') \exp[i2\pi(\mu'x' + \nu'y')] dx' dy'. \quad (3.28)$$

Однако оптическую передаточную функцию можно определить иначе.

Рассмотрим две функции $f(x)$ и $F(x)$, преобразования Фурье которых равны $g(u)$ и $G(u)$ соответственно. Найдем преобразование Фурье произведения этих функций:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)\exp(i2\pi ux)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(i2\pi ux) \times \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(v)\exp(-i2\pi vx)dv \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} G(v) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(i2\pi(u-v)x)dx \right\} dv = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G(v)g(u-v)dv. \end{aligned}$$

Следовательно, преобразование Фурье произведения $f(x)F(x)$ выражается через преобразования Фурье этих функций $g(u)$ и $G(u)$ с помощью особой операции интегрирования, называемой свёрткой функций $g(u)$ и $G(u)$. Полагая $F(x) = f^*(x)$, комплексно-сопряженной $f(x)$, и замечая при этом, что $G(u) = g^*(-u)$, получаем.

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x)\exp(i2\pi ux)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)g^*(v-u)dv$. Применив это свойство преобразования Фурье к формуле (3.27), получаем

$$\tau(\omega'_x, \omega'_y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu')F^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y)d\mu'd\nu'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu')F^*(\mu', \nu')d\mu'd\nu'} \quad (3.29)$$

Изображение точки, образованное оптической системой, будем считать безабберационным, то есть будем считать, что $W(\mu', \nu') \equiv 0$. Если при этом $u(\mu', \nu') = U_0$, то зрачковая функция $F(\mu', \nu') = U_0 P(\mu', \nu')$.

Как следует из формулы (3.29), проблема определения ОПФ в этом случае сводится к геометрической задаче расчёта общей площади исходной поверхности выходного зрачка со смещенной поверхностью зрачка на расстояние $\omega' = \sqrt{\omega'^2_x + \omega'^2_y}$ в нормированных координатах. Заметим, что в общем случае ОПФ – функция комплексная, модуль которой определяет функцию передачи модуляции (ФПМ), называемую также частотно-контрастной характеристикой (ЧКХ). В рассматриваемом случае ОПФ – функция

действительная, а, следовательно, формула (3.29) при принятой зрачковой функции определяет ФПМ.

Будем считать, что выходной зрачок имеет круглую форму. При этом при некогерентном освещении наибольшая величина смещения поверхности зрачка, определяющая величину предельно разрешаемой частоты, равна $\omega'_{\text{пред}} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{D'_{3P}}{R'} = 2\pi N'_{\text{пред}}$, где D'_{3P} – диаметр выходного зрачка, т.е. предельная величина пространственного периода разрешаемой частоты объекта равна $p_{\text{пред}} = \frac{1}{N'_{\text{пред}}} = \frac{\lambda}{D'_{3P}} R'$.

Пусть S' – множество точек выходного зрачка оптической системы, равное его площади, а $S'_{\omega'}$ – множество точек того же зрачка, но смещённого относительно исходного положения на величину ω' вдоль некоторой частотной оси, как показано на рис.3.4. Величину $\omega'_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{D'_{3P}}{2R'}$ можно считать нормированным радиусом выходного зрачка. При этом ФПМ, равную относительной величине пересечения двух этих множеств, можно определить выражением вида:

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'}}{S'}, \text{ где } S' = S'_{\omega'} = \pi\omega_0'^2. \quad (3.30)$$

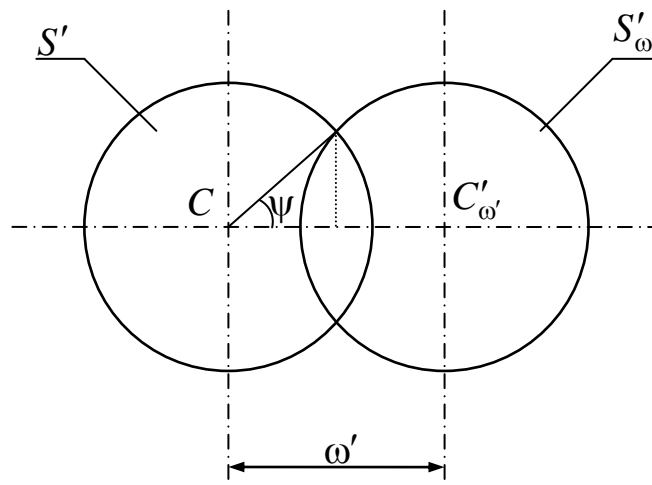


Рис.3.4. К определению ФПМ безабберационной системы

В соответствии с рисунком

$$\tau(\omega') = \frac{4}{\pi\omega_0'^2} \left(\frac{\pi\omega_0'^2}{2\pi} \psi - \frac{1}{2} \omega_0'^2 \sin \psi \cos \psi \right) = \frac{2}{\pi} \left(\psi - \cos \psi \sqrt{1 - \cos^2 \psi} \right).$$

Но $\cos \psi = \frac{1}{2} \frac{\omega'}{\omega'_0} = \tilde{\omega}'$, тогда

$$\tau(\tilde{\omega}') = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(\arccos \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}' \sqrt{1 - \tilde{\omega}'^2} \right), & 0 \leq \tilde{\omega}' \leq 1; \\ 0, & \tilde{\omega}' > 1. \end{cases}$$

3.2.2. Оптическая передаточная функция при центральном экранировании зрачка оптической системы

Вполне очевидно, что при центральном экранировании входного зрачка проблема определения ФПМ сводится к геометрической задаче расчёта общей площади выходного зрачка с экранированием центральной части в исходном положении и в смещённом относительно исходного положения в направлении частотной оси на расстояние ω' , как показано на рис.3.5.

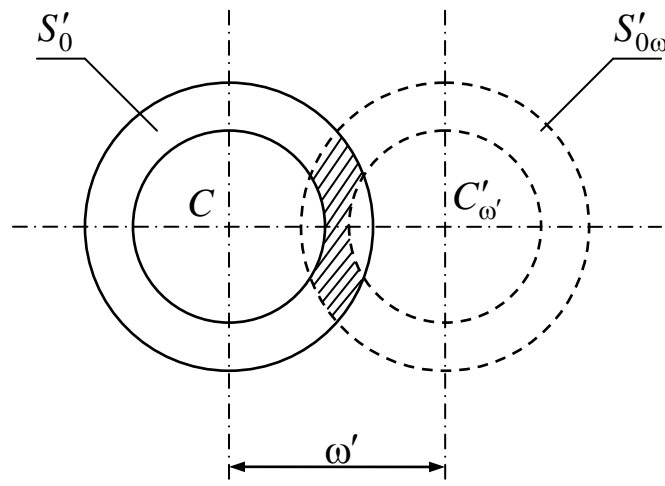


Рис.3.5. Выходной зрачок с экранированной центральной частью

Пусть S'_0 – множество точек, образующих поверхность не экранируемой части выходного зрачка в исходном положении, а $S'_{0\omega'}$ – то же в смещённом положении. При этом ФПМ, определяемая относительной величиной пересечения этих множеств, равна

$$\tau(\omega') = \frac{S'_0 \cap S'_{0\omega'}}{S'_0}, \quad \text{где} \quad S'_0 = S'_{0\omega'} = \pi(1 - \eta^2)\omega_0'^2; \quad \eta - \text{коэффициент}$$

линейного экранирования зрачка.

Пусть S'_η и $S'_{\eta\omega'}$ – множество точек, образующих поверхность экранируемой части выходного зрачка в исходном и в смещённом положениях соответственно: $S'_\eta = S'_{\eta\omega'} = \pi\eta^2\omega_0'^2$. Вполне очевидно, что

$$S'_0 + S'_\eta = S'_{0\omega'} + S'_{\eta\omega'} = \pi(1-\eta^2)\omega_0'^2 + \pi\eta^2\omega_0'^2 = \pi\omega_0'^2 = S' = S'_{\omega'}.$$

Рассмотрим последовательность вычисления $\tau(\omega')$ при различных соотношениях экранируемой части зрачка, равной $\eta\omega'_0$, и не экранируемой, равной $(1-\eta)\omega'_0$.

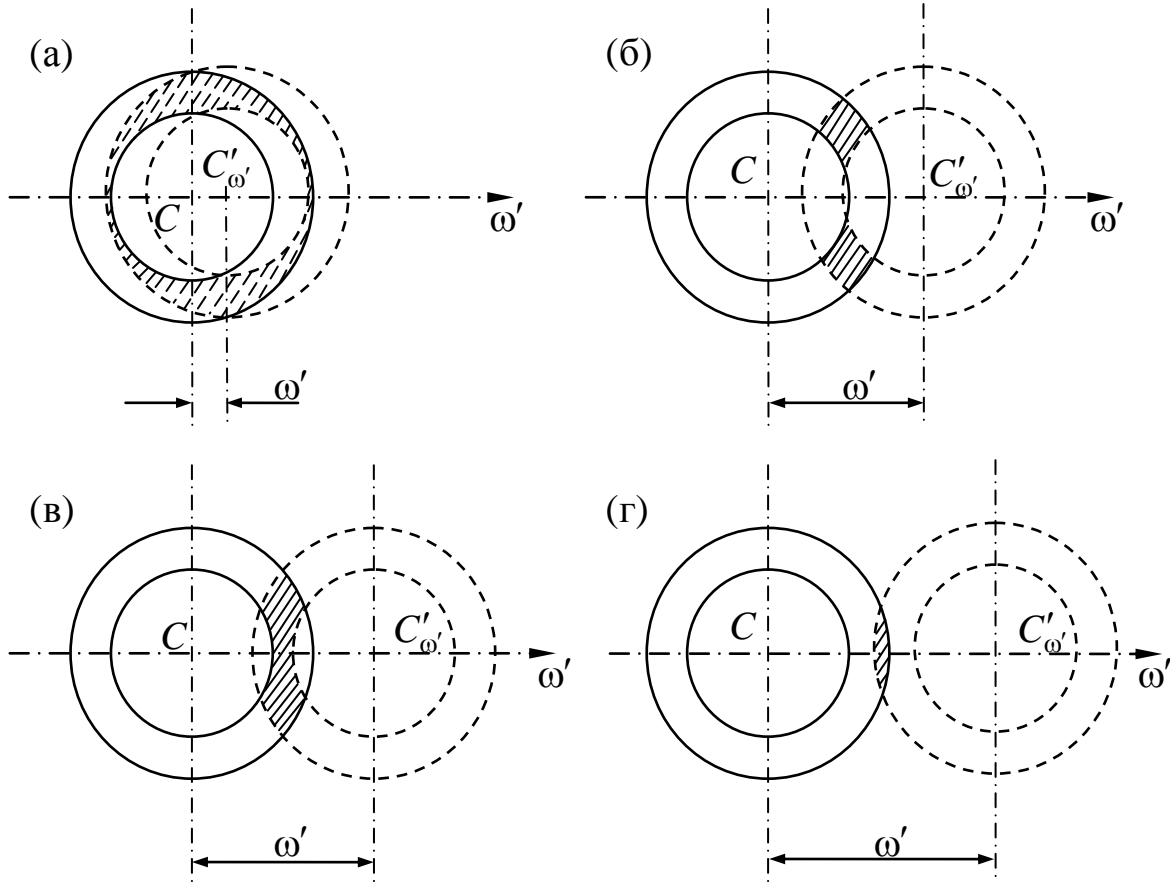


Рис.3.6. Последовательность определения ФПМ при $\eta\omega'_0 \geq (1-\eta)\omega'_0$

1. Пусть $\eta\omega'_0 \geq (1-\eta)\omega'_0$. Тогда при $\omega' = 0 \div (1-\eta)\omega'_0$ в соответствии с рис.2.6(а) имеем

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta + S'_\eta \cap S'_{\eta\omega'}}{S'_0}. \quad (3.31)$$

При $\omega' = (1-\eta)\omega'_0 \div 2\eta\omega'_0$ в соответствии с рис.3.6(б) величина

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta \cap S'_{\omega'} + S'_\eta \cap S'_{\eta\omega'}}{S'_0}. \quad (3.32)$$

В соответствии с рис.3.6(в) при $\omega' = 2\eta\omega'_0 \div (1+\eta)\omega'_0$ величина

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta \cap S'_{\omega'}}{S'_0}. \quad (3.33)$$

И, наконец, при $\omega' = (1 + \eta)\omega'_0 \div 2\omega'_0$ в соответствии с рис.3.6(г) имеем

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'}}{S'_0}. \quad (3.34)$$

2. Пусть $2\eta\omega'_0 \geq (1 - \eta)\omega'_0 \geq \eta\omega'_0$

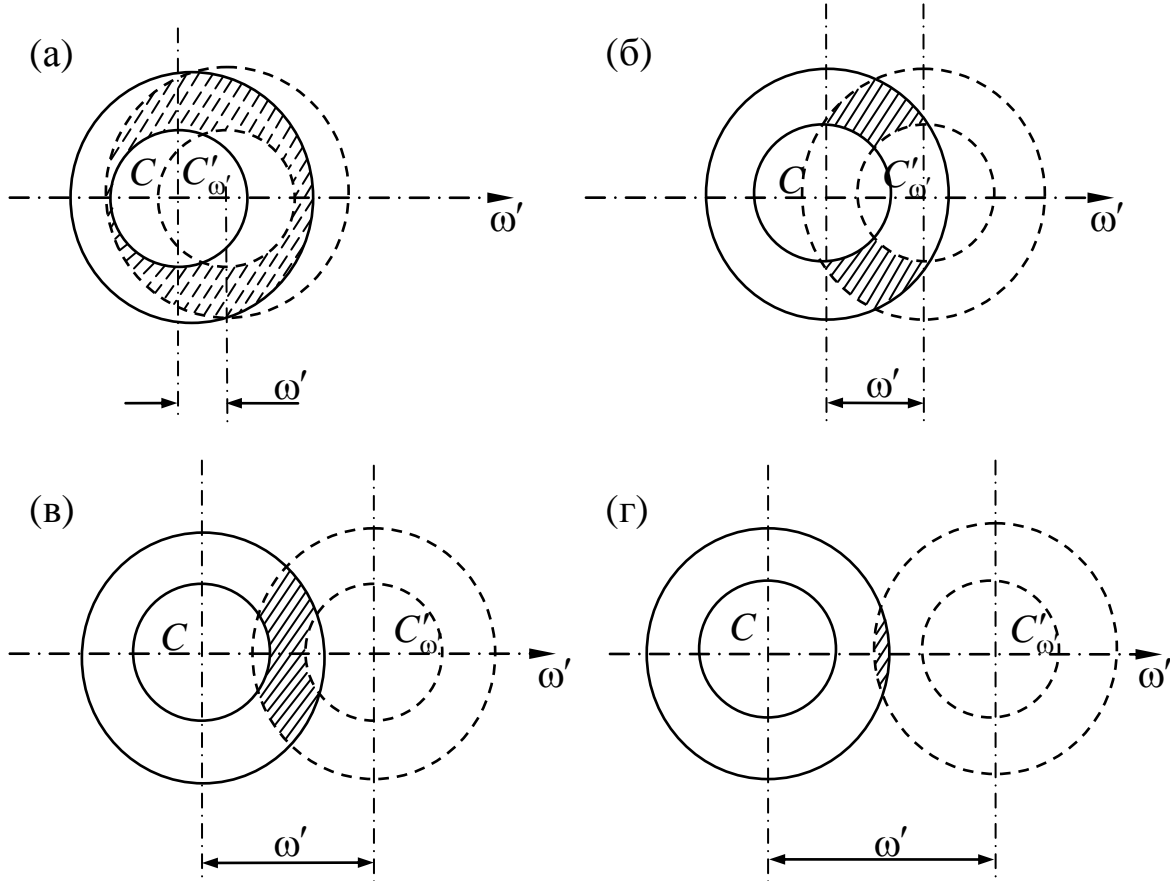


Рис.3.7. Последовательность определения ФПМ при $2\eta\omega'_0 \geq (1 - \eta)\omega'_0 \geq \eta\omega'_0$

Тогда при $\omega' = 0 \div (1 - \eta)\omega'_0$ в соответствии с рис.3.7(а) имеем

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_{\eta} + S'_{\eta} \cap S'_{\eta\omega'}}{S'_0} \quad (3.35)$$

При $\omega' = (1 - \eta)\omega'_0 \div 2\eta\omega'_0$ в соответствии с рис.3.7(б) величина

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_{\eta} \cap S'_{\omega'} + S'_{\eta} \cap S'_{\eta\omega'}}{S'_0} \quad (3.36)$$

В соответствии с рис.3.7(в) при $\omega' = 2\eta\omega'_0 \div (1 + \eta)\omega'_0$ получаем

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_{\eta} \cap S'_{\omega'}}{S'_0} \quad (3.37)$$

При $\omega' = (1 + \eta)\omega'_0 \div 2\omega'_0$ в соответствии с рис.3.7(г) имеем

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'}}{S'_0} \quad (3.38)$$

3. Пусть $2\eta\omega'_0 \leq (1-\eta)\omega'_0$.

Тогда при $\omega' = 0 \div 2\eta\omega'_0$ в соответствии с рис.3.8(а) имеем

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta + S'_\eta \cap S'_{\eta\omega'}}{S'_0} \quad (3.39)$$

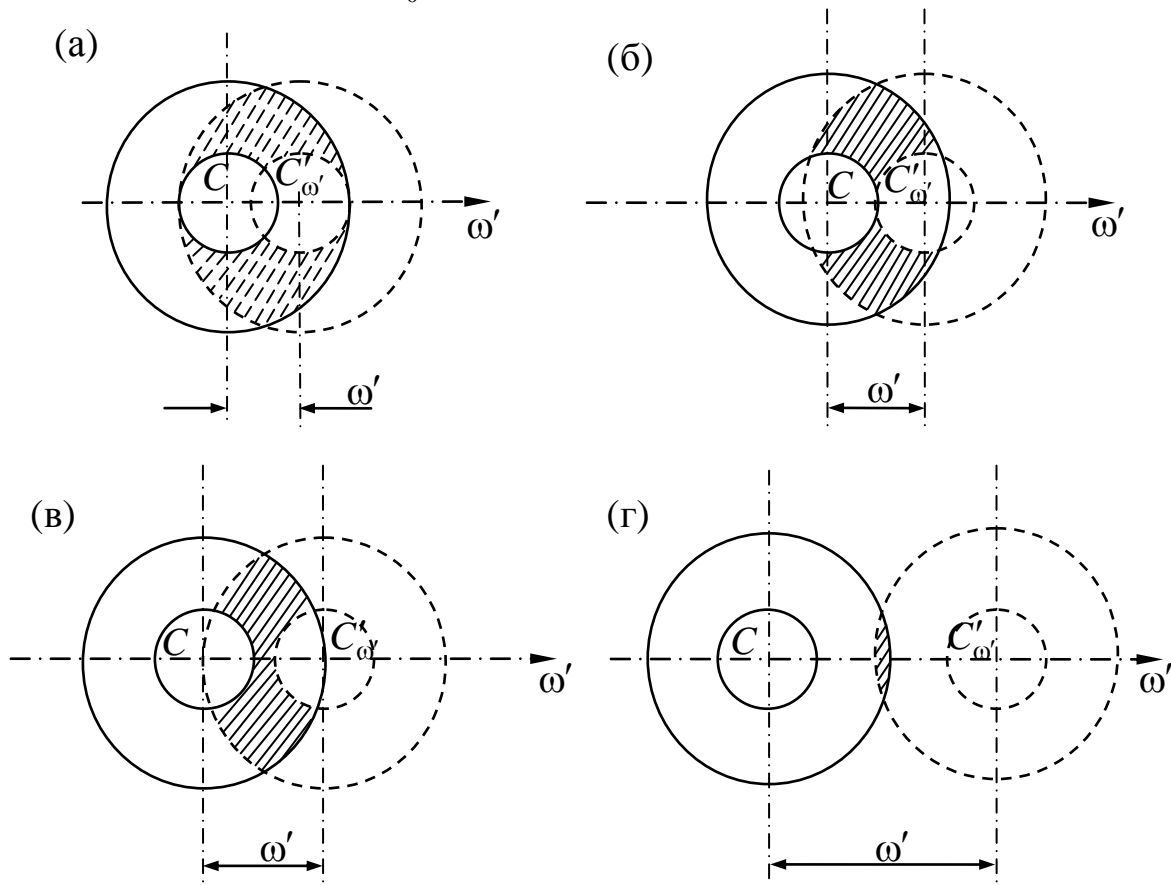


Рис.3.8. Последовательность определения ФПМ при $2\eta\omega'_0 \leq (1-\eta)\omega'_0$

При $\omega' = 2\eta\omega'_0 \div (1-\eta)\omega'_0$ в соответствии с рис.3.8(б) имеем

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta}{S'_0} \quad (3.40)$$

В соответствии с рис.3.8(в) при $\omega' = (1-\eta)\omega'_0 \div (1+\eta)\omega'_0$ имеем

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta \cap S'_{\omega'}}{S'_0} \quad (3.41)$$

При $(1+\eta)\omega'_0 \div 2\omega'_0$ в соответствии с рис.3.8(г) имеем

$$\tau(\omega') = \frac{S' \cap S'_{\omega'}}{S'_0} \quad (3.42)$$

Выполненный анализ возможной последовательности вычисления $\tau(\omega')$ при различных сочетаниях экранируемой частей зрачка позволяет структуру алгоритма вычисления представить в виде таблицы (табл.3.1).

Таблица 3.1. Структура алгоритма вычисления функции передачи модуляции оптической системы с центральным экранированием

ω'	$\tau(\omega')$
$\eta\omega'_0 \geq (1-\eta)\omega'_0$	$2\eta\omega'_0 \geq (1-\eta)\omega'_0 \geq \eta\omega'_0$
$0 \div (1-\eta)\omega'_0$	$\frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta + S'_\eta \cap S'_{\eta\omega'}}{S'_0}$
$(1-\eta)\omega'_0 \div 2\eta\omega'_0$	$\frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta \cap S'_{\omega'} + S'_\eta \cap S'_{\eta\omega'}}{S'_0}$
$2\eta\omega'_0 \div (1+\eta)\omega'_0$	$\frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta \cap S'_{\omega'}}{S'_0}$
$(1+\eta)\omega'_0 \div 2\omega'_0$	$\frac{S' \cap S'_{\omega'}}{S'_0}$
$2\eta\omega'_0 \leq (1-\eta)\omega'_0$	
$0 \div 2\eta\omega'_0$	$\frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta + S'_\eta \cap S'_{\eta\omega'}}{S'_0}$
$2\eta\omega'_0 \div (1-\eta)\omega'_0$	$\frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta}{S'_0}$
$(1-\eta)\omega'_0 \div (1+\eta)\omega'_0$	$\frac{S' \cap S'_{\omega'} - 2S'_\eta \cap S'_{\omega'}}{S'_0}$
$(1+\eta)\omega'_0 \div 2\omega'_0$	$\frac{S' \cap S'_{\omega'}}{S'_0}$

Чтобы определить величины, входящие в выражения (3.31)–(3.42), найдём общую площадь двух кругов, радиусы которых равны r_1 и r_2 , а их центры C_1 и C_2 смещены друг относительно друга на расстояние d , как показано на рис.3.9. В соответствии с рисунком имеем

$$\frac{\sin \varphi_1}{r_2} = \frac{\sin \varphi_2}{r_1} = \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{d}.$$

Из первого равенства следует, что $\sin \varphi_2 = \frac{r_1}{r_2} \sin \varphi_1$. Используя другие равенства, в результате простых преобразований получаем $d - r_1 \cos \varphi_1 = \sqrt{r_2^2 - r_1^2 + r_1^2 \cos^2 \varphi_1}$.

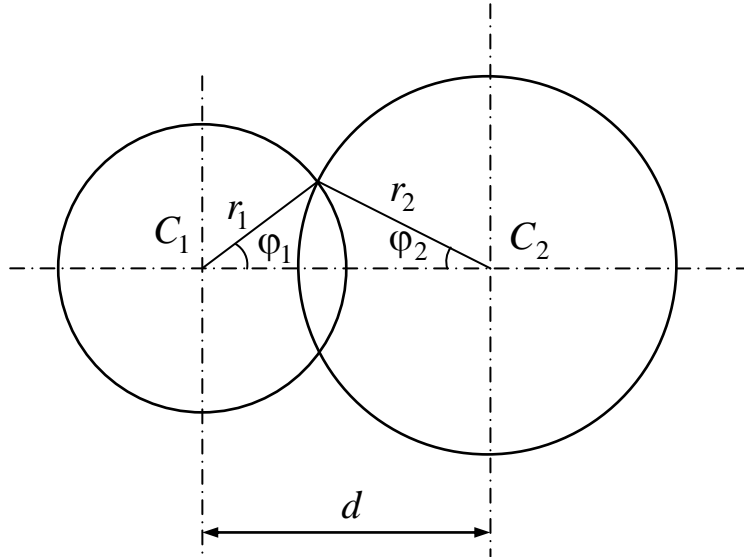


Рис.3.9. Определение общей площади пересечения круглых зрачков

Возведя левую и правую части полученного выражения в квадрат, находим, что

$$\cos \varphi_1 = \frac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2r_1 d} \quad (3.43)$$

Из рис.3.9 следует, что $r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2 = d$. При этом

$$\cos \varphi_2 = \frac{d - r_1 \cos \varphi_1}{r_2} = \frac{d^2 - r_1^2 + r_2^2}{2r_2 d} \quad (3.44)$$

В рассматриваемом случае $S_1 = \pi r_1^2$, а $S_2 = \pi r_2^2$. В соответствии с рисунком

$$\begin{aligned} S_1 \cap S_2 &= \frac{\pi r_1^2}{2\pi} 2\varphi_1 - 2 \frac{r_1 \sin \varphi_1 r_1 \cos \varphi_1}{2} + \frac{\pi r_2^2}{2\pi} 2\varphi_2 - 2 \frac{r_2 \sin \varphi_2 r_2 \cos \varphi_2}{2} = \\ &= r_1^2 (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) + r_2^2 (\varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_2) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} S_1 \cap S_2 &= r_1^2 \left(\varphi_1 - \cos \varphi_1 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1} \right) + \\ &+ r_2^2 \left(\varphi_2 - \cos \varphi_2 \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_2} \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Пусть $r_1 = r_2 = \omega'_0$; $d = \omega'$. При этом $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = \frac{\omega'}{2\omega'_0} = \tilde{\omega}'$, где $0 \leq \tilde{\omega}' \leq 1$ ($0 \leq \omega' \leq 2\omega'_0$). Тогда

$$\frac{S' \cap S'_{\omega'}}{S'_0} = \frac{2}{\pi} \left(\arccos \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}' \sqrt{1 - \tilde{\omega}'^2} \right) \quad (3.46)$$

Пусть $r_1 = r_2 = \eta\omega'_0$; $d = \omega'$. При этом $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2 = \frac{\omega'}{2\eta\omega'_0} = \frac{1}{\eta} \tilde{\omega}'$, где $0 \leq \tilde{\omega}' \leq 1$. Тогда

$$\frac{S'_\eta \cap S'_{\eta\omega'}}{S'_0} = \frac{2\eta^2}{\pi(1-\eta^2)} \left(\arccos \frac{1}{\eta} \tilde{\omega}' - \frac{1}{\eta} \tilde{\omega}' \sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2} \tilde{\omega}'^2} \right). \quad (3.47)$$

Пусть $r_1 = \eta\omega'_0$, $r_2 = \omega'_0$; $d = \omega'$. При этом

$$\cos \varphi_1 = \frac{\omega'^2 - (1-\eta^2)\omega_0'^2}{2\eta\omega'_0\omega'} = \frac{4\omega'^2 - 1 + \eta^2}{4\eta\tilde{\omega}'}; \quad -1 \leq \cos \varphi_1 \leq 1;$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{\omega'^2 + (1-\eta^2)\omega_0'^2}{2\omega'_0\omega'} = \frac{4\omega'^2 + 1 - \eta^2}{4\tilde{\omega}'}. \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} \frac{S'_\eta \cap S'_{\omega'}}{S'_0} &= \frac{\eta^2}{\pi(1-\eta^2)} \left(\arccos \frac{4\omega'^2 - 1 + \eta^2}{4\eta\tilde{\omega}'} - \frac{4\omega'^2 - 1 + \eta^2}{4\eta\tilde{\omega}'} \times \right. \\ &\times \left. \sqrt{1 - \left(\frac{4\omega'^2 - 1 + \eta^2}{4\eta\tilde{\omega}'} \right)^2} \right) + \frac{1}{\pi(1-\eta^2)} \times \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\times \left(\arccos \frac{4\omega'^2 + 1 - \eta^2}{4\tilde{\omega}'} - \frac{4\omega'^2 + 1 - \eta^2}{4\tilde{\omega}'} \sqrt{1 - \left(\frac{4\omega'^2 + 1 - \eta^2}{4\tilde{\omega}'} \right)^2} \right).$$

Из соотношений, приведённых в табл. 3.1, следует, что при $\omega' = 2\omega'_0$ ($\tilde{\omega}' = 1$) контраст изображения $\tau(\omega')$ определяется формулой (3.46), а, следовательно, независимо от величины $\eta < 1$ при $\tilde{\omega}' = 1$ величина $\tau(1) = 0$. При этом пространственную частоту изображения, равную $N' = \frac{\omega'_{\text{пред}}}{2\pi} = \frac{D'_{3P}}{\lambda R'} = \frac{\omega'_0}{\pi} = \frac{2 \sin \sigma'}{\lambda}$, принято называть предельной разрешаемой частотой изображения, образованного оптической системой. В общем случае, как следует из выражения (3.46), при $\eta = 0$ имеем

$$\tau(\tilde{\omega}') = \frac{2}{\pi} \left(\arccos \tilde{\omega}' - \tilde{\omega}' \sqrt{1 - \tilde{\omega}'^2} \right). \quad (3.49)$$

Полученные соотношения позволяют определить значения ФПМ для любого значения частоты $\omega' = 2\pi N'$ при любом значении коэффициента η центрального экранирования зрачка.

3.3. Структура изображения, образованного оптической системой с синтезированной апертурой

Решение многих фундаментальных астрономических задач невозможно без существенного увеличения апертуры телескопов, которая при классическом построении оптической схемы определяется диаметром главного зеркала. При этом важнейшей проблемой, определяющей не только стоимость, но и саму возможность создания телескопа, становится проблема уменьшения веса главного зеркала. Одним из путей уменьшения массы главного зеркала является замена зеркала со сплошной апертурой зеркалом с синтезированной апертурой, собранным из отдельных элементов, каждый из которых можно считать жёстким зеркалом.

Другой путь увеличения апертуры предполагает построение телескопа в виде сочетания отдельных телескопов (модулей) с последующим сложением образованных ими изображений в одной плоскости, при этом общая апертура телескопа представляет собой синтезированную апертуру.

Напомним, что световое возмущение в изображении осевой точки определяется формулой:

$$u(x', y') = -\frac{ik}{2\pi R'^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int F(m', M') \exp\left(-ik \frac{m'x' + M'y'}{R'}\right) dm' dM' \quad (3.50)$$

Для системы с синтезированной апертурой единично – нулевая функция $P(m', M')$ состоит из N функций $P_j(m', M')$ отдельных элементов. При этом зрачковую функцию удобно представить в виде:

$$F(m', M') = \sum_{j=1}^N F_j(m', M').$$

Начало координатных осей (m', M')

совпадает с осевой точкой синтезированной апертуры, а начало координатных осей (x', y') – с осевой точкой изображения.

В полярной системе координат имеем

$$m' = a' \rho \cos \gamma; \quad M' = a' \rho \sin \gamma; \quad \rho = \sqrt{\frac{m'^2 + M'^2}{a'^2}}; \quad 0 \leq \rho \leq 1;$$

$$x' = r' \cos \theta; \quad y' = r' \sin \theta; \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Здесь a' – радиус выходного зрачка; ρ, γ – полярные координаты в плоскости зрачка; r', θ – полярные координаты в плоскости изображения.

При этом выражение, определяющее световое возмущение в изображении осевой точки, имеет вид:

$$u(r', \theta) = -\frac{ika'^2}{2\pi R'^2} \int \int_{S'_{\text{зр}}} F(\rho, \gamma) \exp\left(-ik \frac{a'}{R'} r' \rho \cos(\gamma - \theta)\right) \rho d\rho d\gamma \quad (3.51)$$

Предположим, что область j -го элемента зрачка ограничена кругом. На рис.3.10 показана некоторая точка Q_j j -го элемента синтезированной апертуры в системах полярных координат (ρ, γ) и (ρ_j, γ_j) . Полюс O системы координат (ρ, γ) совмещён с центром синтезированной апертуры, а полюс C_j системы координат (ρ_j, γ_j) совмещён с центром j -го элемента. Полярные оси обеих систем координат параллельны. На этом же рисунке показана точка A' в плоскости изображения, положение которой определяется координатами r', θ . Заметим, что $m'x' + M'y' = a'\rho r' \cos(\gamma - \theta)$.

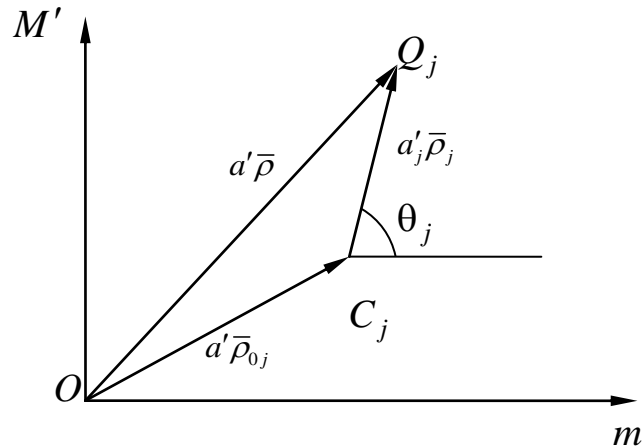


Рис.3.10. Координаты элемента синтезированной апертуры в системе полярных координат

Из рисунка следует, что

$$a' \rho \cos(\gamma - \theta) = a' \rho_{0j} \cos(\gamma_{0j} - \theta) + a'_j \tilde{\rho}_j \cos(\gamma_j - \theta).$$

$$m' = a' \rho_{0j} \cos \gamma_{0j} + a'_j \tilde{\rho}_j \cos \gamma_j; \quad M' = a' \rho_{0j} \sin \gamma_{0j} + a'_j \tilde{\rho}_j \sin \gamma_j,$$

где $\tilde{\rho}_j = \frac{a'}{a'_j} \rho_j$, $(0 \leq \tilde{\rho}_j \leq 1)$.

Известно, что при $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_{u_1 v_1(u)}^{u_2 v_2(u)} f(u, v) |D| du dv,$$

где $|D|$ – абсолютная величина якобиана

$$D = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Обозначим $\gamma - \theta = \varphi$, $\gamma_{0j} - \theta = \varphi_{0j}$, $\gamma_j - \theta = \varphi_j$. Для выбранного положения j -го элемента и фиксированной точки изображения имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial m'}{\partial \rho_{0j}} = \frac{\partial m'}{\partial \gamma_{0j}} = 0; & \quad \frac{\partial M'}{\partial \rho_{0j}} = \frac{\partial M'}{\partial \gamma_{0j}} = 0; \\ \frac{\partial m'}{\partial \tilde{\rho}_j} = a'_j \cos \gamma_j; & \quad \frac{\partial m'}{\partial \gamma_j} = -a'_j \tilde{\rho}_j \sin \gamma_j = \frac{\partial m'}{\partial \varphi_j}; \\ \frac{\partial M'}{\partial \tilde{\rho}_j} = a'_j \sin \gamma_j; & \quad \frac{\partial M'}{\partial \gamma_j} = a'_j \tilde{\rho}_j \cos \gamma_j = \frac{\partial M'}{\partial \varphi_j}. \end{aligned}$$

При этом $D = a_j'^2 \tilde{\rho}_j$.

Полученные соотношения и принятые обозначения позволяют выражение (3.50), определяющее световое возмущение в изображении точки, образованном j -м элементом, представить в виде:

$$\begin{aligned} u_j(r') = & -\frac{ika_j'^2}{2\pi R'} \exp\left(-ik \frac{a'}{R'} r' \rho_{cj} \cos \varphi_{0j}\right) \times \\ & \times \int_{S'_{\text{сп}}} \int F(\tilde{\rho}_j, \varphi_j) \exp\left(-ik \frac{a'_j}{R'} r' \tilde{\rho}_j \cos \varphi_j\right) \tilde{\rho}_j d\tilde{\rho}_j d\varphi_j, \end{aligned} \quad (3.52)$$

здесь $F(\tilde{\rho}_j, \varphi_j) = P_j(\tilde{\rho}_j, \varphi_j) u(\tilde{\rho}_j, \varphi_j) \exp[-ikW_j(\tilde{\rho}_j, \varphi_j)]$, при этом

$$P_j(\tilde{\rho}_j, \varphi_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\tilde{\rho}_j, \varphi_j) \in S'_{j\text{сп}}; \\ 0, & \text{если } (\tilde{\rho}_j, \varphi_j) \notin S'_{j\text{сп}}. \end{cases}$$

$$\text{Обозначим } \frac{a'_j}{R'} \rho_{0j} = A'_j; \quad \frac{a'}{R'} = A'_j; \quad k r' = \tilde{r}'.$$

Пусть $u_j(\tilde{\rho}_j, \varphi_j) = u_j(0, 0) = u_{0j}$, а $W(\tilde{\rho}_j, \varphi_j) \equiv 0$. Тогда

$$u_j(\tilde{r}') = -\frac{ikR'}{2\pi} A_j'^2 u_{0j} \exp(-iA'_{0j} \tilde{r}' \cos \varphi_{0j}) \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(-iA'_j \tilde{r}' \tilde{\rho}_j \cos \varphi_j) \tilde{\rho}_j d\tilde{\rho}_j d\varphi_j. \quad (3.53)$$

Известно, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-iz \cos \Psi) d\Psi = J_0(z), \text{ а } \frac{d}{dz} [zJ_1(z)] = zJ_0(z),$$

где J_0, J_1 – функция Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно. Применяв эти соотношения для преобразования выражения (3.53), получаем

$$u_j(\tilde{r}') = -\frac{1}{2} ikR' u_{0j} A_j'^2 \frac{2I_1(A'_j \tilde{r}'_j)}{A'_j \tilde{r}'_j} \exp(-iA'_{0j} \tilde{r}' \cos \varphi_{0j}), \quad (3.54)$$

При заполнении синтезированной апертуры когерентным излучением распределение светового возмущения в рассматриваемом сечении изображения точки определится выражением вида:

$$u(r') = -\frac{1}{2} kR' \left[\sum_{j=1}^N u_{0j} A_j'^2 \frac{2J_1(kA'_j r')}{kA'_j r'} \sin(kA'_{0j} r' \cos \varphi_{0j}) + i \sum_{j=1}^N u_{0j} A_j'^2 \frac{2J_1(kA'_j r')}{kA'_j r'} \cos(kA'_{0j} r' \cos \varphi_{0j}) \right].$$

При этом соответствующее распределение освещённости в изображении точки равно произведению комплексно сопряженных величин $u(r')u^*(r')$, т.е.

$$E(r') = \frac{1}{4} k^2 R'^2 \left\{ \left[\sum_{j=1}^N u_{0j} A_j'^2 \frac{2J_1(kA'_j r')}{kA'_j r'} \sin(kA'_{0j} r' \cos \varphi_{0j}) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^N u_{0j} A_j'^2 \frac{2J_1(kA'_j r')}{kA'_j r'} \cos(kA'_{0j} r' \cos \varphi_{0j}) \right]^2 \right\}$$

(3.55)

При $N = 1$:

$$E(r') = E_k(r') = \left[\frac{1}{2} kR' u_{0k} A_k'^2 \frac{2J_1(kA_k' r')}{kA_k' r'} \right]^2. \quad (3.56)$$

Пусть $N = 2$. Полагая при этом $u_{01} = u_{02} = u_{0k}$; $A'_1 = A'_2 = A'_k$; $A'_{01} = A'_{02} = A'_{0k}$, получим

$$E(r') = 4\Phi_M(r', A'_{0k}, \varphi_{01}, \varphi_{02}) E_k(r'),$$

где $\Phi_M(r', A'_{0k}, \varphi_{01}, \varphi_{02}) = \frac{1 + \cos[kA'_{0k} r' (\cos \varphi_{02} - \cos \varphi_{01})]}{2}$; $0 \leq \Phi_M \leq 1$.

В общем случае распределение освещенности в изображении осевой точки определяется выражением (3.55) при условии одновременного изменения углов φ_{0j} на одну и ту же величину, т.е.

$$E(r', \varphi) = \frac{1}{4} k^2 R'^2 \left\{ \left\{ \sum_{j=1}^N u_{0j} A'_j \frac{2J_1(kA'_j r')}{kA'_j r'} \sin[kA'_{0j} r' \cos(\varphi_{0j} + \varphi)] \right\}^2 + \left\{ \sum_{j=1}^N u_{0j} A'_j \frac{2J_1(kA'_j r')}{kA'_j r'} \cos[kA'_{0j} r' \cos(\varphi_{0j} + \varphi)] \right\}^2 \right\}, \quad (3.57)$$

где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

При $u_{0j} = u_{0k}$; $A'_j = A'_k$ выражение (3.57) можно представить в виде:

$$E(r', \varphi) = \Phi_M(r', A'_{0j}, \varphi_{0j}, \varphi) E_k(r'),$$

где $\Phi_M(r', A'_{0j}, \varphi_{0j}, \varphi) = \left\{ \sum_{j=1}^N \sin[kA'_{0j} r' \cos(\varphi_{0j} + \varphi)] \right\}^2 + \left\{ \sum_{j=1}^N \cos[kA'_{0j} r' \cos(\varphi_{0j} + \varphi)] \right\}^2$.

Пусть при $N = 2$ угол $\varphi_{01} = \varphi_{0k}$, а $\varphi_{02} = \varphi_{0k} + \pi$. Тогда получим

$$E(r') = 4\Phi_M(r', A'_{0k}, \varphi_{0k}) E_k(r') \quad (3.58)$$

где $\Phi_M(r', A'_{0k}, \varphi_{0k}) = \frac{1 + \cos(2kA'_{0k} r' \cos \varphi_{0k})}{2}$.

По сути дела рассматриваемая двухкомпонентная оптическая система представляет собой оптическую систему звездного интерферометра Майкельсона, а формула (3.58) описывает характерное распределение освещенности в изображении осевой точки, образованном этой системой. Действительно, если $\varphi_{0k} = \frac{\pi}{2}$, то

$\Phi_M(r', A'_{0k}, \phi_{0k})=1$, т.е. в этом направлении распределение освещённости соответствует распределению освещённости в изображении осевой точки, образованном одним элементом, но величина освещённости в четыре раза больше. Если $\phi_{0k} = 0$ (или π),

$$\text{то } \Phi_M(r', A'_{0k}, \phi_{0k}) = \frac{1 + \cos 2kA'_{0k}r'}{2} \quad (3.59)$$

Вполне очевидно, что $E(r')=0$ при $E_k(r')=0$ или при $\Phi_M(r', A'_{0k}, \phi_{0k})=0$. Пусть $E_k(r')=0$. Тогда, как следует из соотношения (2.56), $\frac{2J_1(kA'_k r')}{kA'_k r'} = 0$. Известно, что $\frac{2J_1(z)}{z} = 0$ при $z = 3,832$, т.е. при $r' = r'_k = \frac{3,832}{kA'_k}$.

Пусть $\Phi_M(r', A'_{0k}, \phi_{0k})=0$. Как следует из выражения (3.59), это равенство можно получить при $2kA'_{0k}r' = \pi$. Таким образом, находим, что $r' = r'_{0k} = \frac{\pi}{2kA'_{0k}}$. В звёздном интерферометре Майкельсона, как

правило, выполняется условие $A'_k \ll A'_{0k}$, в результате чего $r'_{0k} \ll r'_k$, т.е. наблюдаемая интерференционная картина имеет вид сильно вытянутых эллипсов, и чем больше A'_{0k} и меньше A'_k , тем в большей степени наблюдаемая картина будет иметь вид последовательности прямых полос. Однако, следует иметь в виду, что величина A'_k определяет освещённость наблюдаемой картины, а следовательно, чем больше A'_k , тем более слабые объекты можно исследовать.

Вполне очевидно, что и в этом случае проблема определения ФПМ сводится к геометрической задаче расчёта общей площади исходной поверхности выходного зрачка со смещённой поверхностью зрачка в направлении совмещённых осей симметрии рассматриваемых элементов на расстояние ω' в нормированных координатах, как показано на рис.3.11а,б,в,г,д. В анализируемом случае $\omega'_k = kA'_k$, а $\omega'_{0k} = kA'_{0k}$. Общий вид ФПМ показан на рис.3.12.

Принято считать, что предельная пространственная частота, разрешаемая оптической системой звёздного интерферометра Майкельсона, определяется расстоянием $2\omega'_{0k} = 2\pi N'_{\text{пред}}$. При этом

$N'_{\text{пред}} = \frac{2}{\lambda} A'_{0k}$. Изменяя расстояние между элементами (т.е. изменяя величину A'_{0k}) можно изменять значение предельной частоты $N'_{\text{пред}}$.

Таким образом, звёздный интерферометр Майкельсона можно считать переменным фильтром пространственных частот. Это свойство интерферометра используется, например, для определения расстояния между двойными звёздами.

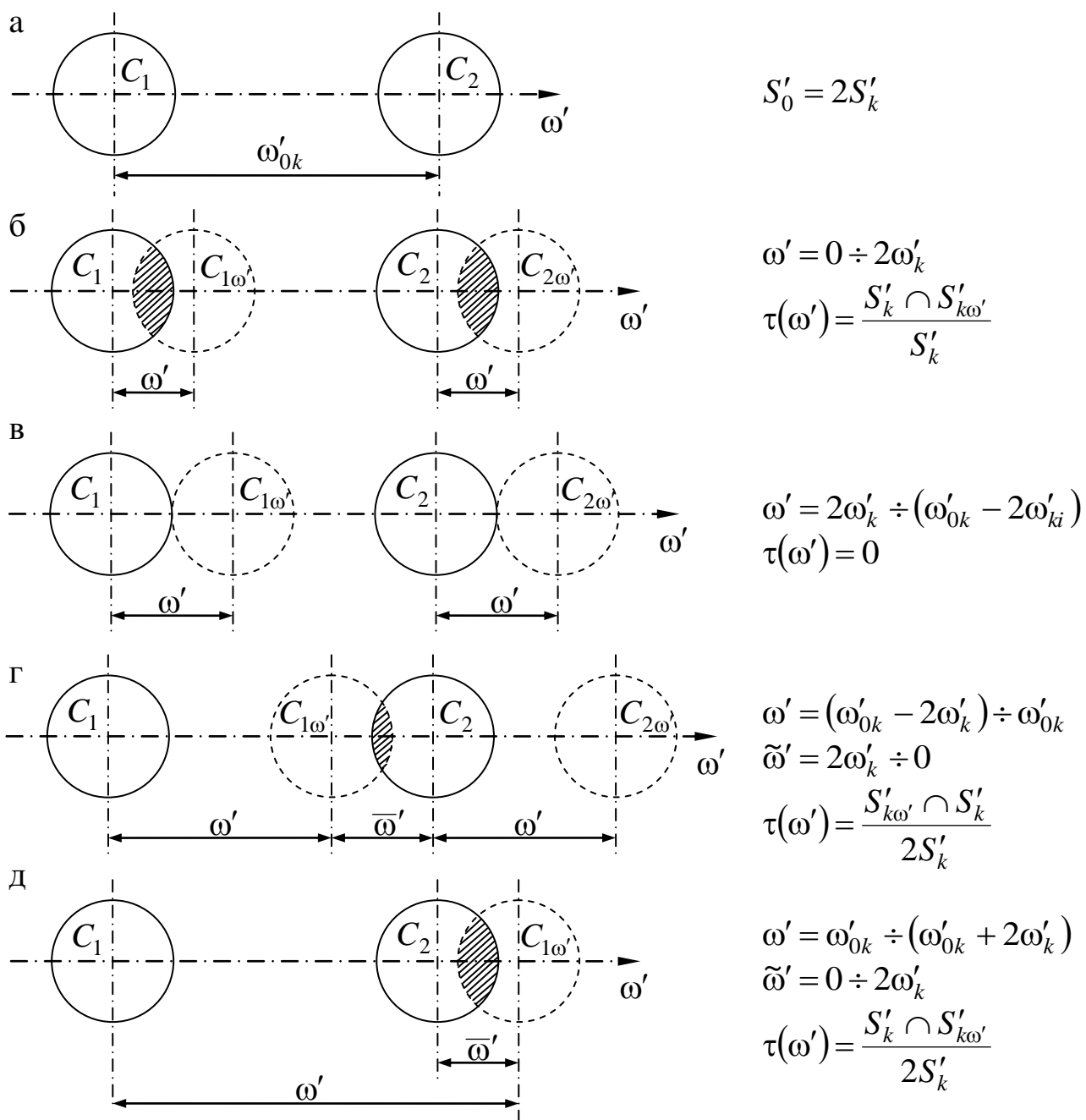


Рис.3.11. Смещение поверхности зрчка вдоль оси симметрии в звёздном интерферометре Майкельсона

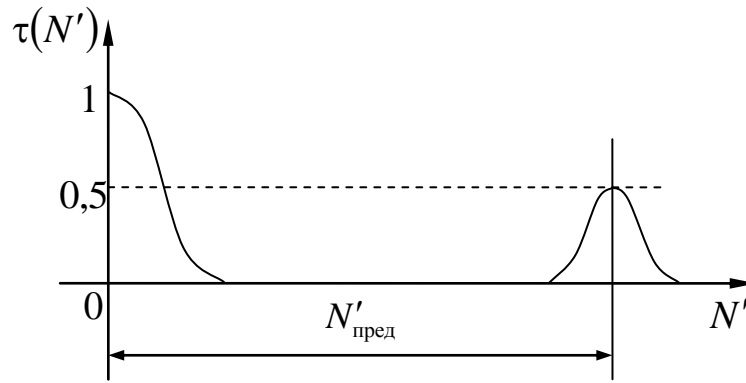


Рис.3.12. Функция передачи модуляции оптической системы звёздного интерферометра Майкельсона

3.4. Критерии оценки качества изображения, образованного оптической системой

Световое возмущение в параксиальном изображении точки, т.е. при $x' = 0$ и $y' = 0$, с точностью до комплексной постоянной C определяется выражением

$$u(0,0) = C \iint \exp(ikW) \rho d\rho d\gamma, \quad (3.60)$$

где $W = W(\rho, \gamma)$ – функция волновой аберрации.

Как известно, показательную функцию можно представить степенным рядом вида:

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

При этом выражение (2.60) можно представить в виде:

$$u(0,0) = C \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[1 + ikW + \frac{1}{2} (ikW)^2 + \dots \right] \rho d\rho d\gamma.$$

Пусть \bar{W}^n – среднее значение n -й степени W , т.е.

$$\bar{W}^n = \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} W^n \rho d\rho d\gamma}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\gamma} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W^n \rho d\rho d\gamma.$$

Тогда

$$u(0,0) = C \left(1 + ik\bar{W} + \frac{1}{2} k^2 \bar{W}^2 + \dots \right).$$

Освещённость в параксиальном изображении точки равна

$$\begin{aligned}
E(0,0) &= u(0,0)u^*(0,0) = \\
&= C \cdot C^* \left(1 + ik\bar{W} - \frac{1}{2}k^2\bar{W}^2 + \dots \right) \left(1 - ik\bar{W} - \frac{1}{2}k^2\bar{W}^2 - \dots \right).
\end{aligned}$$

В том случае, когда волновые aberrации настолько малы, что можно пренебречь величинами kW в степени выше второй, получаем

$$\begin{aligned}
E(0,0) &\approx CC^* \left[1 + ik\bar{W} - \frac{1}{2}k^2\bar{W}^2 - ik\bar{W} + (k\bar{W})^2 - \frac{1}{2}k^2\bar{W}^2 \right] = \\
&= CC^* \left[1 - k^2\bar{W}^2 + (k\bar{W})^2 \right].
\end{aligned}$$

При $W \equiv 0$: $E_0(0,0) = C \cdot C^*$. При этом нормированная освещённость в параксиальном изображении точки равна

$$i(0,0) = \frac{E(0,0)}{E_0(0,0)} = 1 - k^2 \left[\bar{W}^2 - (\bar{W})^2 \right]. \quad (3.61)$$

Определим среднеквадратическую деформацию волнового фронта

$$W_{\text{скв}} = \left\{ \frac{\int_0^1 \int_0^{2\pi} [W(\rho, \gamma) - \bar{W}]^2 \rho d\rho d\gamma}{\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\theta} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^1 \int_0^{2\pi} W^2(\rho, \gamma) \rho d\rho d\gamma - \right.$$

$$\left. - 2\bar{W} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W(\rho, \gamma) \rho d\rho d\gamma + (\bar{W})^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho d\rho d\gamma \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\bar{W}^2 - 2(\bar{W})^2 + (\bar{W})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\bar{W}^2 - (\bar{W})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Полученный результат позволяет придать формуле (3.61) вид известной формулы Марешаля

$$i(0,0) = \tilde{E}(0,0) \approx 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 W_{\text{скв}}^2. \quad (3.62)$$

Согласно правилу четверти волны Рэлея качество изображения можно считать достаточно совершенным, если максимальная деформация (максимальный размах деформации) волнового фронта

$|W|_{\text{max}} \leq \frac{\lambda}{4}$. В случае малой величины aberrаций число Штреля равно

нормированной освещённости, определяемой формулой Марешаля.

Следуя Марешалю, принято считать качество изображения достаточно совершенным, если нормированная освещённость (число Штреля) не менее 0,8. Из формулы (3.62) следует, что в этом случае

$$W_{\text{скв}} \leq \frac{\lambda}{14}.$$

Глава 4

ОПТИКА АТМОСФЕРЫ

Атмосфера Земли (от греч. *atmos* – пар и сфера) – это воздушная среда вокруг Земли, вращающаяся вместе с ней. Масса атмосферы составляет $5,15 \cdot 10^{15}$ т. Состав её у поверхности Земли: 78,1 % азота, 21 % кислорода, 0,9 % аргона, в незначительных долях процента углекислый газ, водород, гелий, неон и другие газы. В нижних слоях атмосферы высотой до 20 км содержится водяной пар (у земной поверхности: от 3 % в тропиках и до $2 \cdot 10^{-5}$ % в Антарктиде), количество которого с высотой быстро убывает. В зависимости от распределения температуры атмосферу Земли подразделяют на тропосферу, стратосферу, мезосферу, термосферу и экзосферу, как показано на рис.4.1.

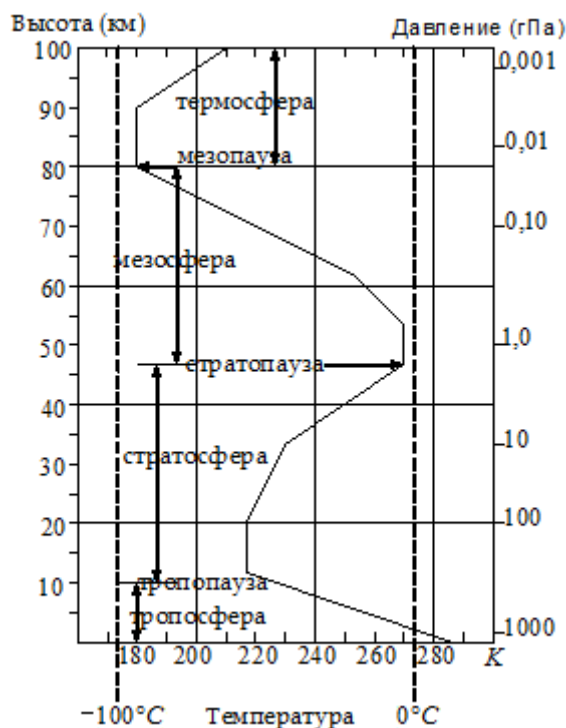


Рис.4.1. Вертикальное распределение температуры в атмосфере

Неравномерность её нагревания способствует общей циркуляции атмосферы, которая влияет на погоду и климат Земли.

Циркуляция атмосферы между источником и приёмником излучения является, как правило, источником помех при наблюдениях. При прохождении сквозь атмосферу энергия излучения ослабляется. И, наконец, атмосфера привносит собственное излучение.

Степень ослабления зависит от длины волны распространяющегося излучения, используемого спектрального диапазона, дистанции наблюдения и метеорологических условий. Пропускание излучения атмосферой зависит в основном от двух явлений:

- поглощения газов, составляющих атмосферу;
- ослабления из-за рассеяния на частицах, присутствующих в атмосфере: молекулах или аэрозолях.

4.1. Поглощение газами

Излучение, длина волны которого лежит в диапазоне от 0,18 мкм до длинноволнового предела, полагаемого в настоящее время равным

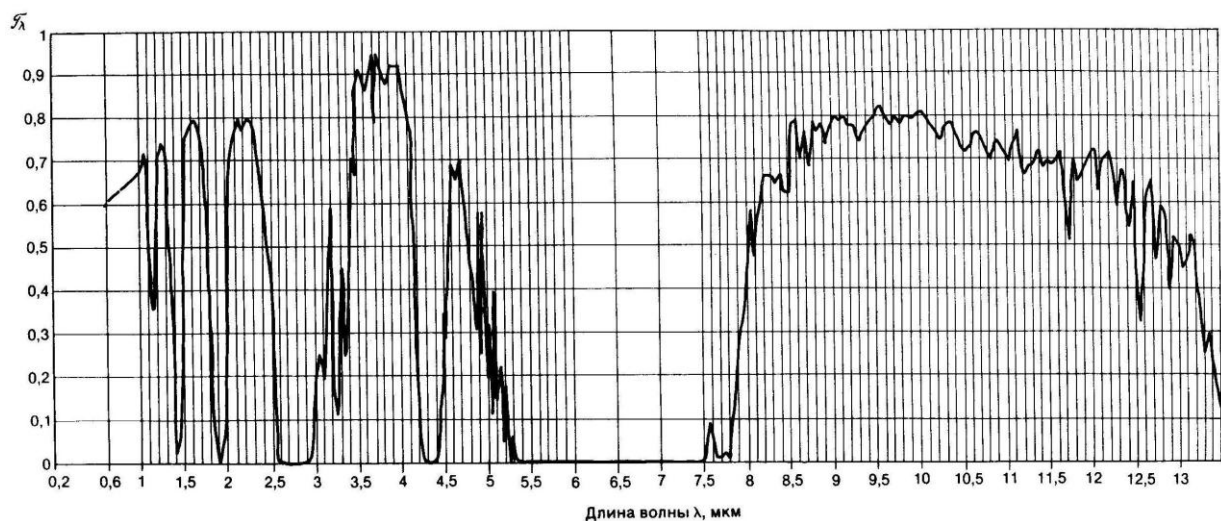


Рис.4.2. Спектральный коэффициент пропускания атмосферы

1000 мкм, относится к так называемому оптическому излучению. Спектральное пропускание атмосферы от видимой области до длины волны, равной 13,5 мкм, при длине трассы $L = 1,852$ км (одна морская миля), при толщине слоя осаждённой воды $h = 17$ мм и при метеорологической дальности видимости (МДВ) $L_v = 20$ км (при $\lambda = 0,6$ мкм), т.е. при хороших метеорологических условиях, показано на рис.4.2. Принятым определением МДВ можно считать следующее: "Метеорологической дальностью видимости называется то наибольшее расстояние, на котором в светлое время суток можно различить (обнаружить) на фоне неба вблизи горизонта или на фоне воздушной дымки абсолютно чёрный объект достаточно больших угловых размеров (не менее $0,5^\circ$)" Данные, полученные в ультрафиолетовой области спектра преимущественно астрономами, существенно различаются в зависимости от того, находится ли

источник излучения в атмосфере или за её пределами. Во втором случае предел пропускания $\sim 0,3$ мкм обусловлен слоем озона, максимальная концентрация которого находится на высоте 20–25 км. В первом случае, например, для горизонтальной трассы на уровне земли, предел менее чёткий и определяется поглощением излучения кислородом, в спектре которого большое число слабых полос поглощения, расположенных в интервале между 0,24 мкм и красным участком.

Когда излучение проходит через большую толщу атмосферы, проявляются полосы поглощения присутствующего в атмосфере водяного пара. Эта составляющая атмосферы в значительной мере определяет поглощение в инфракрасной области. Из других газов важнейшим является углекислый газ, поглощающее действие которого слабее, чем паров воды.

Основные полосы поглощения водяного пара расположены на участках 2,6–2,9 мкм, 4,2–4,4 мкм, между 5,5 и 7,5 мкм и за пределами 20 мкм; в этих полосах излучение поглощается практически полностью на длине трассы 100 м и более. Определяющим для практических применений обстоятельством является существование определённого числа прозрачных участков, окон прозрачности, т.е. областей, внутри которых поглощение очень слабое. Эти окна расположены в следующих интервалах длин волн: 0,4–1,0 мкм, 1,2–1,3 мкм, 1,5–1,8 мкм; 2,1–2,5 мкм, 3–5 мкм, 8–13 мкм.

Пусть падающий на поглощающую среду поток излучения, как показано на рис.4.3, равен Φ_0 . Если слой dx поглощающей среды, отстоящий на расстоянии x от начала распространения потока, равного Φ_0 , поглощает часть этого потока, равную $d\Phi$, то вполне очевидно, что $d\Phi$ будет зависеть от толщины слоя dx , потока Φ , дошедшего до этого слоя, и коэффициента K , учитывающего свойства

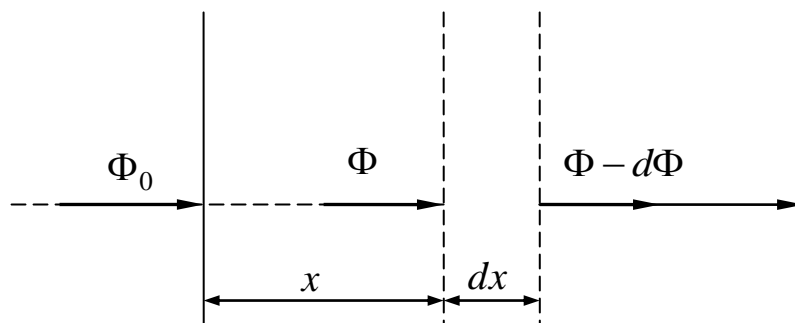


Рис.4.3. Поглощающий слой среды

поглощающей среды, т.е.

$$d\Phi = -K\Phi dx. \quad (4.1)$$

Это соотношение можно представить в виде:

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = -K dx.$$

Интегрируя левую и правую части этого равенства, получаем

$$\ln \Phi = -Kx + C$$

или $\Phi = Ce^{-Kx}$.

Поскольку при $x = 0$ поток $\Phi = \Phi_0 = C$, имеем $\Phi = \Phi_0 e^{-Kx}$.

Отсюда следует, что коэффициент пропускания среды равен:

$$\tau = \frac{\Phi}{\Phi_0} = e^{-Kx}, \quad (4.2)$$

где K – показатель поглощения среды, зависящий от длины волны. Выражение (4.2) определяет закон поглощения, называемый законом Бугера-Ламберта, который вполне согласуется с результатами эксперимента. Бывает удобно использовать понятие об оптической плотности среды, определяемой соотношением вида:

$$D = \lg \frac{1}{\tau} = -\lg e^{-Kx} = 0,4343 Kx.$$

Экспоненциальный закон поглощения, полученный для монохроматического излучения, справедлив и в спектральной полосе любой ширины, если поглощение нейтрально, т.е. не зависит от длины волны. Приблизённо это справедливо для атмосферных окон и для некоторых туманов, но для комплексных полос поглощения наблюдаемый закон поглощения сильно отличается от экспоненциального. Вполне очевидно, что в предельном случае, когда в рассматриваемом спектральном диапазоне излучение части участков спектра полностью поглощается средой, а другой части – идеально пропускается, поглощение в такой среде не зависит от протяжённости трассы, которую проходит излучение.

4.2. Рассеяние на частицах

В атмосфере всегда присутствуют во взвешенном состоянии самые разнообразные по происхождению и свойствам частички, размер которых много больше и самих молекул воздуха, и их флуктуаций, – аэрозоли. Естественным и самым распространённым аэрозолем в атмосфере являются продукты конденсации и сублимации водяного пара: капельки воды и кристаллы льда, из которых образуются различные облака и туманы. Постоянно

присутствуют в атмосфере твёрдые частички разнообразного происхождения. Миллионы тонн пыли, поднимаемые ветром, ежегодно выносятся из пустынь Азии и Африки воздушными потоками на большие расстояния и достигают практически всех частей света. Этот вид аэрозоля называют аридным. Выбросы промышленных предприятий и другие продукты деятельности человека образуют так называемый антропогенный аэрозоль. Частицы этих видов аэрозоля относят к его первой фракции, называемой грубодисперсной. Частицы этой фракции служат ядрами конденсации при образовании облаков и туманов, радиусы частиц составляют от 0,5 до 10 мкм, концентрация – $0,01-2 \text{ см}^{-3}$. Частицы первой фракции аэрозоля малогигроскопичны и химически инертны.

В результате химических реакций, протекающих в атмосфере, возникают аэрозольные частички, которые относят ко второй фракции аэрозоля. Частицы этого аэрозоля состоят из различных сероокислородных и азотоводородных соединений, а также продуктов полимеризации органических соединений (продуктов сгорания или эфирных масел, выделяемых растительностью). Эту фракцию называют микродисперсной. Первоначальный размер частичек мал ($0,005-0,050 \text{ мкм}$), затем они укрупняются до размера $0,05-0,50 \text{ мкм}$ и образуют устойчивую субмикронную фракцию. Концентрация частичек субмикронной фракции у поверхности Земли $2 \cdot 10^3 - 10 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$. С высотой размеры частиц и их концентрация уменьшаются. Такие частички могут прожить в тропосфере несколько дней, а в стратосфере – до года. Установлено [18], что аэрозоль именно второй фракции определяет оптические свойства атмосферы на всех высотах и в тропосфере, и в стратосфере.

Рассеяние света в средах с размерами неоднородностей, не превышающих $(0,1 \div 0,2)\lambda$, где λ – длина волны падающего света, называют рэлеевским рассеянием или явлением Тиндаля. Интенсивность света, рассеиваемого единицей объёма среды под углом φ к направлению распространения падающего света, в случае рэлеевского рассеяния естественного света на электрически изотропных частицах определяется выражением [19]

$$I_{\varphi} = I_{\pi/2} (1 + \cos^2 \varphi), \quad (4.3)$$

где $I_{\pi/2} = a \frac{N_0 V^2}{R^2 \lambda^4} I_0$ – интенсивность света, рассеянного под углом $\varphi = \pi/2$, V – объём одной частицы, N_0 – число частиц в единице

объёма среды, R – расстояние от рассеивающего объёма до точки наблюдения, λ – длина волны света, I_0 – интенсивность падающего света, a – коэффициент, зависящий от степени неоднородности среды.

Рассеяние света наблюдается также в оптически чистых средах, т. е. в средах, не содержащих каких-либо инородных частиц. Это явление называется молекулярным рассеянием света. При молекулярном рассеянии естественного света в идеальном газе

$$I_{\varphi} = \frac{2\pi^2(n-1)V^2}{R^2 N_0 \lambda^4} (1 + \cos \varphi) I_0, \quad (4.4)$$

где n – показатель преломления газа, N_0 – число молекул газа в единице объёма. Из формул (4.3) и (4.4) видно, что при прочих равных условиях интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна (закон Рэлея). Поэтому при прохождении немонахроматического света через мелкодисперсную среду в рассеянном свете преобладает коротковолновое излучение (голубого цвета небо), а в проходящем – длинноволновое (красного цвета Солнце).

В результате рассеяния света в оптически неоднородной среде интенсивность плоской световой волны постепенно уменьшается по мере распространения волны в среде. Эта зависимость аналогична закону Бугера-Ламберта и имеет вид:

$$I_{\varphi} = I_0 e^{-\gamma d}, \quad (4.5)$$

где d – толщина слоя рассеивающей среды, а γ – коэффициент экстинкции (от лат. extinction гашение). Если рассеивающая среда, кроме того, поглощает свет, то

$$I_{\varphi} = I_0 e^{-(K+\gamma)d} \quad (4.6)$$

Если размер рассеивающих свет частиц заметно превышает величину $(0,1 \div 0,2)\lambda$, то рассеяние света в этом случае считают аэрозольным. Его называют также рассеянием Ми или рассеянием на крупных частицах. Это название рассеяния дано в честь немецкого учёного Г. Ми, первым создавшего ещё в 1908 году стройную математическую теорию рассеяния электромагнитных волн на изотропных сферических частицах любого размера и свойств (показателя преломления). В отличие от молекулярного рассеяния Ми на частицах, достаточно больших в сравнении с длиной волны падающего света, характеризуется слабой зависимостью интенсивности рассеянного света от длины волны. Отношение

светового потока, рассеянного единицей объёма среды во всевозможных направлениях, к интенсивности светового потока, упавшего на этот объём, определяет объёмный коэффициент рассеяния. Объёмный коэффициент аэрозольного рассеяния σ_a для единицы объёма воздуха, содержащего N крупных частиц радиуса a , определяется формулой

$$\sigma_a = \pi a^2 K(\rho, \tilde{n}) N, \quad (4.7)$$

где $K(\rho, \tilde{n})$ – функция рассеяния, сложным образом зависящая от параметра $\rho (\rho = 2\pi a/\lambda)$ и комплексного показателя преломления \tilde{n} .

При больших значениях ρ функция $K(\rho, \tilde{n})$ стремится к постоянной величине, равной 2. Эта область так называемого нейтрального рассеяния, в которой излучение всех длин волн рассеивается в одинаковой степени, начинается со значений $\rho \approx 45$. Для капель облака или тумана со средним радиусом 10 мкм для красных лучей (0,8 мкм) $\rho = 156$, а для фиолетовых (0,40 мкм) $\rho = 78$. Таким образом, в облаках и туманах имеет место нейтральное рассеяние. Этим и объясняется их белый цвет. Наблюдаемое нами голубое небо и плывущие по нему белые облака наглядно иллюстрируют оба типа рассеяния: молекулярное и аэрозольное.

4.3. Турбулентность

Раздел физики, в котором изучаются законы равновесия и движения жидкостей и газов, а также взаимодействие движущихся жидкостей и газов с омываемыми ими твёрдыми телами, называется гидроаэромеханикой [19]. Отдел гидроаэромеханики, в котором изучаются законы движения жидкостей и газов и их взаимодействие с твёрдыми телами, называется гидроаэродинамикой.

Отличительной особенностью жидкостей и газов по сравнению с твёрдыми телами является их текучесть, т.е. малая сопротивляемость деформации сдвига. Различие между жидкостью и газом заключается лишь в характере зависимости их плотности от давления, т.е. в практической несжимаемости жидкостей и заметной сжимаемости газов.

Возможны два качественно различных типа течения всякой жидкости – ламинарное и турбулентное. Ламинарным называется упорядоченное течение жидкости, при котором траектории соседних частиц мало отличаются друг от друга, так что жидкость можно рассматривать как совокупность отдельных слоёв, движущихся с

разными скоростями, не перемешиваясь друг с другом. Турбулентным называется течение жидкости, при котором её частицы совершают неустановившиеся неупорядоченные движения по сложным траекториям, в результате чего происходит интенсивное перемещение различных слоёв движущейся жидкости.

Первое систематическое исследование течения вязкой жидкости было проведено английским физиком и инженером Осборном Рейнольдсом (1842–1912). В 1883 году он экспериментально установил один из основных критериев подобия в гидроаэродинамике, получивший название числа Рейнольдса. Число Рейнольдса – это безразмерная величина, являющаяся одной из основных характеристик течения вязкой жидкости и равная отношению сил инерции к силам вязкости: $Re = \frac{\rho V l}{\mu}$ где ρ –

плотность жидкости, V – характерная для данной задачи скорость движения жидкости, l – характерный линейный размер, μ – динамическая вязкость жидкости или коэффициент внутреннего трения, численно равный силе трения между двумя слоями с площадью, равной единице, при градиенте скорости движения слоёв, равном единице. Отношение $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ называется кинематической

вязкостью жидкости. При этом

$$Re = \frac{Vl}{\nu}. \quad (4.8)$$

Выбор характерной скорости и характерного размера в зависимости от рассматриваемой задачи можно производить по-разному. Например, при течении несжимаемой жидкости в круглой трубе диаметром d величина $l = d$, а V – средняя по сечению скорость течения жидкости. Если объёмный расход жидкости $V = \frac{\pi d^2}{4} V t$, то при $t = 1c$ величина $V = V_{сек} = \frac{\pi d^2}{4} V$. При этом $V = \frac{4}{\pi d^2} V_{сек}$. При поперечном обтекании жидкостью круглого цилиндра диаметром d величина $l = d$, а V – скорость течения невозмущённой жидкости, т.е. скорость вдали перед цилиндром. Число Рейнольдса характеризует соотношение между силами инерции и силами трения в потоке жидкости.

Исходя из теории подобия, О. Рейнольдс сделал вывод, что если безразмерный параметр Re меньше некоторого критического

значения $Re_{кр}$, то течение жидкости является ламинарным, а если Re превышает $Re_{кр}$, то течение становится турбулентным.

Смысл числа Рейнольдса можно пояснить следующим образом. Если турбулентность течения жидкости образуется внутри трубы диаметром $d=l$ при скорости в завихрениях порядка V , то характерное время вихря равно $\tau \approx \frac{l}{V}$. При этом кинетическая энергия массы турбулентной жидкости в единицу времени по порядку величины равна

$$\frac{V^2}{\tau} = \frac{V^3}{l}. \quad (4.9)$$

С другой стороны, вязкость жидкости приводит к диссипации (лат. *dissipation* – рассеяние) энергии. Диссипация энергии для единицы массы в единицу времени по порядку величины равна $\frac{\nu V^2}{l^2}$.

Отношение кинетической энергии к диссипации и есть число Рейнольдса.

Критическое число Рейнольдса не является универсальной константой. Его значение зависит не только от геометрических характеристик, но и от способа возбуждения турбулентности.

4.4. Атмосферная турбулентность

Солнечное излучение, поглощённое земной поверхностью, вносит вклад в нагрев воздуха в нижних слоях атмосферы. Неравномерное поглощение излучения приводит к тому, что плотность воздуха принимает локальные значения, зависящие от температурных условий. Флуктуации плотности воздуха порождают конвекционное движение газа.

Зависимость показателя преломления n воздуха от его плотности ρ в первом приближении подчиняется закону Гладстона:

$$n - 1 = K\rho,$$

где K – константа. Плотность воздуха при постоянном давлении обратно пропорциональна абсолютной температуре:

$$\rho \sim \frac{1}{T}; \quad \partial\rho \sim -\frac{\partial T}{T^2}. \quad \text{При этом} \quad \frac{\partial n}{n-1} = \frac{\partial\rho}{\rho} = -\frac{\partial T}{T} \quad \text{или}$$

$$\partial n = -\frac{n-1}{T} \partial T. \quad \text{При } n = 1,003, \quad T = 300 \text{ K} \text{ и } \partial T = 1 \text{ K} \quad \partial n = 10^{-6}.$$

В общем случае атмосфера неоднородна. Когда оптическое излучение проходит сквозь среду, которая характеризуется показателем преломления $n(\mathbf{r}, t)$, зависящим от пространственных координат и времени, траектории световых лучей изменяются, а, следовательно, изменяется форма волновых фронтов.

В общем случае деформацию волнового фронта при прохождении света сквозь неоднородную среду можно определить выражением

$$W(x, y) = \int_z [n(x, y, z) - n(0, 0, z)] dz,$$

где ось z совпадает с касательной к траектории осевого луча светового пучка. Вполне очевидно, что эффект влияния оптических неоднородностей определяется соотношением диаметра d пучка световых лучей и размера l зоны неоднородности показателя преломления. В этой связи представляет интерес рассмотреть следующие случаи:

1. Пусть $d \ll l$.

В этом случае наблюдается медленное искривление траектории световых лучей из-за стратификации слоёв воздуха с разными показателями преломления в нижней атмосфере. Заметим, что стратификация (лат. *stratum* – настил, слой + *facere* – делать) – это распределение температуры воздуха в атмосфере по мере изменения высоты. Такой ход световых лучей является причиной угловых ошибок при оптическом визировании и определяет появление миражей.

2. Пусть $d < l$.

Быстрые флуктуации (лат. *fluctuatio* – колебание) неоднородностей показателя преломления, геометрические размеры которых больше, чем поперечное сечение пучка световых лучей, приводят к изменению наклона волнового фронта, а, следовательно, к перемещению точек изображения (к флуктуации изображения) в плоскости изображения, как показано на рис.4.4.

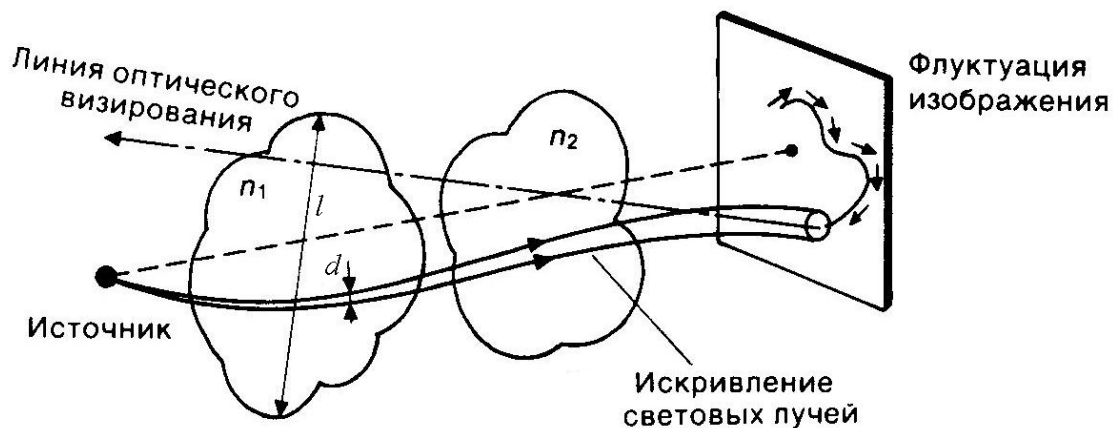


Рис. 4.4. Неоднородности показателя преломления, размеры которых больше, чем поперечное сечение пучка лучей

3. Пусть $d \approx l$.

Неоднородности показателя преломления атмосферы, размеры которых такого же порядка, что и поперечное сечение пучка лучей света, действуют как линзы, как показано на рис.4.5.

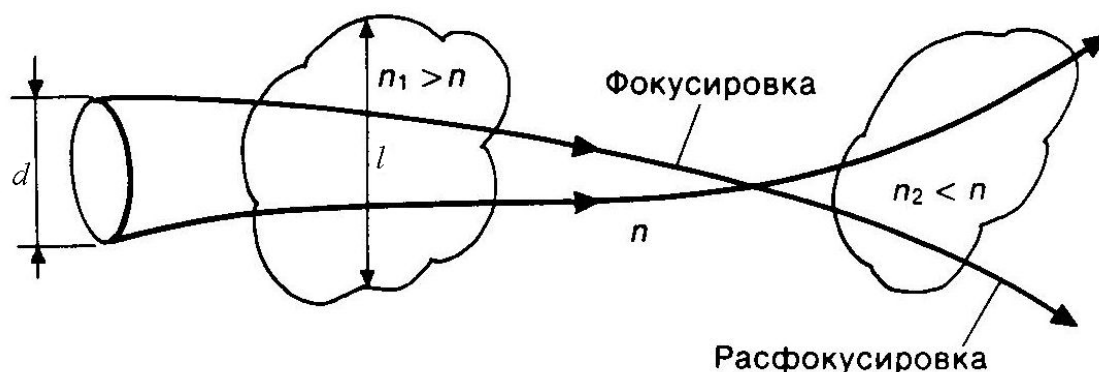


Рис. 4.5. Неоднородности показателя преломления, размеры которых сравнимы с размером пучка лучей

При этом возникают проблемы передачи световой энергии на расстояние.

4. Пусть $d > l$.

Из-за быстрых флуктуаций неоднородностей показателя преломления, размеры которых меньше, чем поперечное сечение пучка световых лучей, происходит атмосферная сцинтилляция (лат. *scintillatio* – сверкание, искрение) или, иначе, мерцание, например, наблюдаемых звёзд. Это явление приводит к переналожению элементов волнового фронта, а, следовательно, к интерференции световых колебаний, в результате чего сечение светового пучка лучей приобретает пятнистую структуру, как показано на рис.4.6.

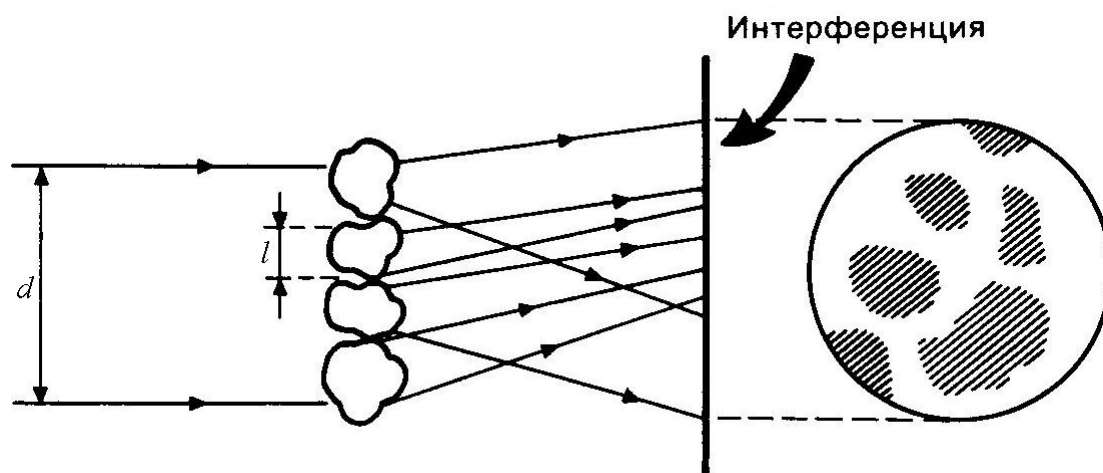


Рис. 4.6. Неоднородности показателя преломления, размеры которых меньше, чем поперечное сечение пучка лучей

5. Пусть $d \gg l$.

Неоднородности малых размеров, вызывающие сцинцилляцию, создают фазовые искажения волнового фронта в процессе его распространения. Это явление влечёт за собой нарушение фазовой когерентности при прохождении лазерного излучения.

В более общем случае флуктуации показателя преломления атмосферы зависят от ветра, тепловых конвекционных токов воздуха, гравитационного поля Земли, влажности и т.д. Не простая проблема описания этих флуктуаций связана с оценкой указанных параметров, которые сами меняются случайным образом во времени и в пространстве. Как уже отмечалось, характер движения вязкой жидкости или газа определяется числом Рейнольдса $Re = \frac{Vl}{\nu}$, где V –

скорость потока жидкости или газа, l – характеристическая длина, а ν – кинематическая вязкость. Для воздуха $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$. При этом атмосферные потоки, перемещающиеся со скоростью, измеряемой единицами метров в секунду, при характеристической длине порядка десяти метров имеют $Re \geq 10^6$, т.е. практически всегда $Re > Re_{кр}$, а, следовательно, всегда приводят к турбулентному течению.

Попытка решения проблемы турбулентности имеет богатую историю. Все великие физики ломали над ней голову. Плавный поток разбивается на завитки и вихревые токи; энергия из крупномасштабного движения быстро перетекает в мелкие завихрения. Иногда турбулентность даже желательна (как, например, в реактивном двигателе, где эффективное возгорание зависит от быстрого образования смеси), но в большинстве случаев она

равносильна бедствию. Турбулентный воздушный поток, воздействуя на крыло самолета, затрудняет взлёт. Турбулентный поток внутри нефтепровода задерживает движение жидкости.

Что же представляет собой турбулентность? Полную неупорядоченность при всех масштабах, крошечные вихри внутри огромных водоворотов. Турбулентность неустойчива и в высшей степени диссипативна, т.е. обладает способностью замедлять движение, истощая энергию. При значениях числа Рейнольдса, близких к критическому, характеристики турбулентности зависят от начальных условий. Но при больших числах Рейнольдса $Re > Re_{кр}$ влияние начальных условий исчезает, движение жидкости или газа становится совершенно нерегулярным и случайным, так что появляется возможность чисто статистического описания этого движения.

4.5. Структурная функция

Раздел теории вероятностей, изучающий методы обработки результатов опытов и получения из них необходимых данных, называется математической статистикой. Статистический подход широко применяется для описания случайных явлений.

Напомним, что случайной величиной называется величина, которая принимает в результате опыта одно из множества возможных значений и с которой связано некоторое поле событий. Функцией распределения F случайной величины X называется вероятность P неравенства $X < x$, рассматриваемая как функция параметра x :

$$F(x) = P(X < x).$$

Вероятность неравенства $X < x$ можно определить по формуле:

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx, \quad (4.10)$$

где $f(x)$ – плотность (или плотность вероятности) скалярной случайной величины X . Дифференцируя формулу (4.10) по x в случае скалярной величины X и вспоминая, что производная интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции при этом верхнем пределе, получаем

$$f(x) = F'(x),$$

т.е. плотность скалярной случайной величины есть производная функции распределения. Таким образом, случайная величина, для которой функция $f(x)$ непрерывна, является непрерывной случайной

величиной. Вероятность попадания случайной величины X в интервал $A = (\alpha, \beta)$ равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\beta} f(x) dx - \int_{-\infty}^{\alpha} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha).$$

Отсюда следует, что вероятность попадания непрерывной случайной величины в любую точку пространства её значений равна нулю.

Предположим, что случайные величины X и Y приняли в результате n опытов пары значений $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. Чтобы найти подходящую характеристику зависимости между величинами X и Y , подберём методом наименьших квадратов наилучшую линейную зависимость Y от X вида

$$y - \bar{y} = c(x - \bar{x}), \quad (4.11)$$

где \bar{x} и \bar{y} – выборочные средние величин X и Y соответственно. При этом сумма квадратов ошибок во всех экспериментальных точках равна

$$\delta = \sum_{k=1}^n [y_k - \bar{y} - c(x_k - \bar{x})]^2.$$

Приравняв нулю производную $\frac{\partial \delta}{\partial c}$ и решив полученное уравнение относительно c , находим, что

$$c = \frac{1}{nD_x^*} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}),$$

где D_x^* – выборочная дисперсия случайной величины X , равная

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

$$\text{Величина } k_{xy}^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \quad (4.12)$$

называется выборочной ковариацией величин X и Y . За меру зависимости между X и Y принимают безразмерную величину

$$r_{xy}^* = \frac{k_{xy}^*}{\sigma_x^* \sigma_y^*} = \frac{k_{xy}^*}{\sqrt{D_x^* D_y^*}}$$

называемую выборочным коэффициентом корреляции величин X и Y . Так как

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) &= \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{x} \sum_{k=1}^n y_k - \bar{y} \sum_{k=1}^n x_k + n\bar{x}\bar{y} = \\ &= \sum_{k=1}^n x_k y_k - n\bar{x}\bar{y}, \end{aligned}$$

то формулу (4.12) можно переписать в виде

$$k_{xy}^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{x}\bar{y}.$$

Этой формулой обычно и пользуются на практике.

На практике часто приходится иметь дело со случайными величинами, непрерывно изменяющимися в процессе опыта. Примером такой случайной величины может служить ошибка радиодальномера при непрерывном измерении меняющейся дальности. Такие случайные величины, изменяющиеся в процессе опыта, принято называть случайными функциями. Теория случайных функций – новейший раздел теории вероятностей, быстрые темпы развития и совершенствования которого связаны с непосредственными требованиями практики, в частности, с необходимостью решения ряда технических задач.

При фиксированном значении t случайная функция $X(t)$ превращается в обычную случайную величину. Следовательно, запись $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$ представляет собой систему m случайных величин.

Рассмотрим случайную величину $X(t)$ – сечение случайной функции в момент t . Эта случайная величина, очевидно, обладает законом распределения, который в общем случае зависит от t . Обозначим его $F(x, t)$. Функция $F(x, t)$ называется одномерным законом распределения случайной функции $X(t)$.

Вполне очевидно, что эта функция не отвечает на вопрос о зависимости случайных величин $X(t)$ при различных t . С этой точки зрения более полной характеристикой случайной функции $X(t)$ является так называемый двумерный закон распределения $F(x_1, x_2; t_1, t_2)$. Этот закон – закон распределения системы двух случайных величин $X(t_1)$ и $X(t_2)$, т.е. двух произвольных сечений случайной функции $X(t)$.

Очевидно, теоретически можно неограниченно увеличивать число сечений случайной функции и получать при этом всё более подробную, всё более исчерпывающую характеристику случайной

функции, но оперировать со столь громоздкими характеристиками крайне неудобно. Поэтому при исследовании законов распределения случайных функций обычно ограничиваются рассмотрением частных случаев функции $F(x_1, x_2; t_1, t_2)$.

Рассмотрим сечение случайной функции $X(t)$ при фиксированном t . Очевидно, что математическое ожидание случайной величины $X(t)$ представляет собой некоторую функцию t :

$$m_x(t) = M[X(t)].$$

Таким образом, математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции. Аналогичным образом определяется дисперсия случайной функции. Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, значение которой для каждого t равно дисперсии соответствующего сечения случайной функции:

$$D_x(t) = D[X(t)],$$

при этом среднее квадратическое отклонение случайной функции

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Предположим, что математическое ожидание и дисперсия случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ примерно одинаковы, однако, характер этих случайных функций резко различен, т.е. внутренняя структура обоих случайных процессов совершенно различна. Но это различие не улавливается ни математическим ожиданием, ни дисперсией; для его описания необходимо ввести специальную характеристику. Эта характеристика называется корреляционной функцией (иначе – автокорреляционной функцией). Корреляционная функция характеризует степень зависимости между сечениями случайной функции, относящимися к различным t .

Пусть имеется случайная функция $X(t)$, два сечения которой (две случайные величины) $X(t)$ и $X(t')$ относятся к различным моментам времени t и t' . Степень зависимости величин $X(t)$ и $X(t')$ может быть в значительной мере охарактеризована их корреляционным моментом (ковариацией). Вполне очевидно, что этот корреляционный момент является функцией двух аргументов t и t' . Эта функция и называется корреляционной функцией.

Таким образом, корреляционной функцией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция двух аргументов $K_x(t, t')$,

которая при каждой паре значений t и t' равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции:

$$K_x(t, t') = M \left[\overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right], \quad (4.13)$$

где $\overset{\circ}{X}(t)$ и $\overset{\circ}{X}(t')$ – центрированные случайные функции, т.е.

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t), \quad \overset{\circ}{X}(t') = X(t') - m_x(t').$$

Заметим, что при $t' = t$ корреляционная функция $K_x(t, t') = M \left[\left(\overset{\circ}{X}(t) \right)^2 \right] = D_x(t)$, т.е. при $t' = t$ корреляционная функция обращается в дисперсию случайной функции.

На практике очень часто встречаются случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причём ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Такие случайные процессы называются стационарными. Например, процесс наводки перекрестия авиационного прицела на цель есть явно нестационарный процесс, если цель за короткое время с большой и резко меняющейся угловой скоростью проходит поле зрения прицела. В этом случае колебания визирной линии относительно цели не успевают установиться в некотором стационарном режиме: процесс начинается и заканчивается, не успев приобрести стационарный характер. Напротив, процесс наводки перекрестия прицела на неподвижную или движущуюся с постоянной угловой скоростью цель через некоторое время после начала слежения приобретает стационарный характер.

Случайная функция $X(t)$ называется стационарной, если все её вероятностные характеристики не зависят от t (точнее, не меняются при любом сдвиге аргумента по оси t). Сформулируем определение стационарной случайной функции в терминах таких характеристик, как математическое ожидание, дисперсия и корреляционная функция.

Так как изменение стационарной случайной функции должно протекать однородно по времени, то естественно потребовать, чтобы для стационарной случайной функции математическое ожидание было постоянным:

$$m_x(t) = m_x = \text{const.}$$

Заметим, что от стационарной случайной функции $X(t)$ всегда можно перейти к центрированной случайной функции $\overset{\circ}{X}(t)$, для которой математическое ожидание тождественно равно нулю.

Второе условие, которому, очевидно, должна удовлетворять стационарная случайная функция, – это условие постоянства дисперсии:

$$D_x(t) = D_x = \text{const.}$$

Предположим, что для случайной функции $X(t)$ в выражении $K_x(t, t')$ аргумент $t' = t + \tau$, при этом $K_x(t, t + \tau)$ – корреляционный момент для двух сечений случайной функции, разделённых интервалом времени τ . Очевидно, что если случайный процесс $X(t)$ действительно стационарен, то этот корреляционный момент не должен зависеть от того, где именно на оси t взят участок τ , а должен зависеть только от длины этого участка. Следовательно, $K_x(t, t + \tau) = K_x(t_1, t_1 + \tau)$. Таким образом, корреляционная функция стационарного случайного процесса должна зависеть не от положения t первого аргумента на оси абсцисс, а только от промежутка τ между первым и вторым аргументами:

$$K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau). \quad (4.14)$$

Поскольку $K_x(t, t + \tau) = D_x(t)$, то при $\tau = 0$ $D_x(t) = k_x(0) = \text{const.}$ Таким образом, условие (4.14) является единственным существенным условием, которому должна удовлетворять стационарная случайная функция.

Корреляционная функция любой случайной функции обладает свойством симметрии: $K_x(t, t') = K_x(t', t)$. Отсюда следует, что для стационарного процесса при $t' - t = \tau$ имеем: $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$, т.е. корреляционная функция $k_x(\tau)$ является чётной функцией своего аргумента.

Случайные вариации показателя преломления атмосферы можно считать случайной функцией $n(x)$, среднее значение которой $\overline{n(x)} = M[n(x)]$, а корреляционный момент двух сечений случайной функции $n(x)$, разделённых интервалом r , как показано на рис.4.7, можно записать в виде: $K_n(x, x + r) = \overline{n(x)n(x + r)} = M[n(x)n(x + r)]$.

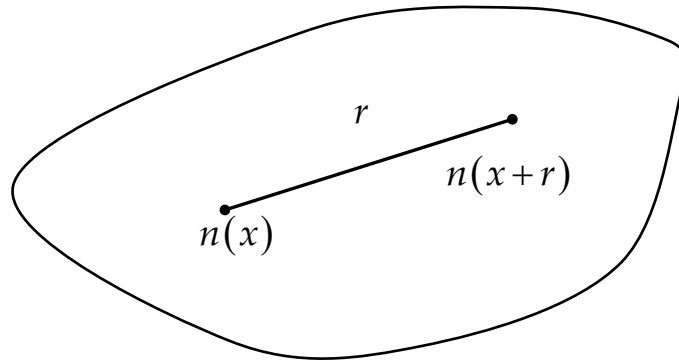


Рис. 4.7. корреляционный момент двух сечений случайной функции $n(x)$, разделённых интервалом r

Рассмотрение большинства случайных процессов существенно упрощается, если считать случайную функцию стационарной. Рассмотрим случай однородной турбулентности, при которой случайную функцию $n(x)$ будем считать стационарной. При этом средняя величина функции должна быть постоянной, а корреляционная функция $K_n(x, x+r)$ будет зависеть только от r , т.е. $K_n(x, x+r) = k_n(r)$. Однако, исследование метеорологических параметров показывает, что в действительности средняя величина $\overline{n(x)}$ меняется. Используем тогда понятие структурной функции, введённой из следующих соображений. Если $n(x)$ – нестационарная случайная функция, т.е. величина $\overline{n(x)}$ не постоянна, то будем считать стационарной случайной функцией разность $n(x+r) - n(x)$, средняя величина которой не изменяется. Структурной функцией $Q_n(r)$ будем называть корреляционную функцию этой разности. Таким образом, имеем

$$Q_n(r) = \overline{[n(x) - n(x-r)] [n(x+r) - n(x)]}.$$

Для стационарной случайной функции средняя величина не изменяется. Следовательно, $\overline{[n(x) - n(x-r)]} = \overline{[n(x+r) - n(x)]}$. При этом $Q_n(r) = \overline{[n(x+r) - n(x)]^2}$. Заметим, что $Q_n(r) = \overline{[n(x+r)]^2} + \overline{[n(x)]^2} - 2\overline{n(x)n(x+r)}$. Здесь $k_n(r) = \overline{n(x)n(x+r)}$; при $r=0$: $k_n(0) = D_n(x) = \overline{[n(x)]^2} = \overline{[n(x+r)]^2}$.

В результате получаем
 $Q_n(r) = 2[k_n(0) - k_n(r)]$
или $Q_n(r) = 2[D_n(x) - k_n(r)]$.

4.6. Теория локальной структуры турбулентности

Представим, что нечто сотрясает жидкость, вызывая внутри неё волны. Жидкость обладает вязкостью и по этой причине сообщённая ей при встряхивании энергия уходит из неё. Если перестать встряхивать жидкость, она придёт в состояние покоя. Что же происходит при встряхивании жидкости? В результате этой процедуры жидкости сообщается низкочастотная энергия, низкие частоты преобразуются в более высокие, порождая всё более стремительные вихревые токи. Этот процесс, приводящий к рассеиванию энергии жидкости, был ещё в 30-х годах прошлого столетия рассмотрен выдающимся советским математиком, основателем научной школы по теории вероятностей и теории функций академиком АН СССР Андреем Николаевичем Колмогоровым (1903–1987). Он разработал математическое описание динамики вихрей, рассматривая их во всё меньшем и меньшем масштабе – до тех пор, пока не достиг предела, при котором вихри становились столь крошечными, что вязкость жидкости на них уже не влияла.

Для большей наглядности А.Н. Колмогоров представил, что вся жидкость состоит из небольших вихревых потоков и, таким образом, она везде одинакова. Подобное предположение об однородности не вполне соответствует действительному характеру процесса, о чём догадался выдающийся французский математик, физик и философ Жюль Анри Пуанкаре (1854–1912) ещё в конце 19 века, понаблюдав в бурной реке водяные завихрения, перемежавшиеся с участками спокойного течения. Таким образом, нестабильность течения локальна и энергия фактически рассеивается лишь в части пространства. Если внимательно разглядывать турбулентный поток в любом масштабе, можно заметить, что обнаруживаются всё новые и новые области спокойного течения. Таким образом, гипотеза об однородности уступает место предположению о прерывистости. Такое отчасти идеализированное описание выглядит в высшей степени фрактальным с чередующимися бурными и плавными зонами, которые заметны при любых масштабах, начиная от крупных и заканчивая мелкими. Но и такая картина в определённой мере представляет собой не полное отражение действительности.

В 1941 году А.Н. Колмогоров предложил теорию локальной структуры турбулентности при очень больших числах Рейнольдса, которая впоследствии стала основой всех современных теорий турбулентности.

А.Н. Колмогоров полагал, что энергия, затрачиваемая на турбулентное движение, возникает вследствие изменения средней скорости. Так, например, вблизи поверхности Земли средняя горизонтальная скорость ветра меняется в зависимости от высоты и это изменение приводит к возникновению турбулентных завихрений, размер которых приближённо равен высоте h . Размер первоначальных вихрей, в которых и возникает энергия турбулентного движения, называется внешним масштабом турбулентности и обозначается L_0 . Вихри с размерами больше L_0 , как правило, анизотропны и зависят от глобальных метеорологических условий. Например, в случае приземной турбулентности вихри с размерами, большими, чем $L_0 \approx h$, могут быть сильно вытянутыми в горизонтальных направлениях. Что касается вихрей, размеры которых меньше внешнего масштаба L_0 , то они, как правило, изотропны.

Рассмотрим кинетическую энергию вихрей размера L_0 . Пусть v_0 – скорость, характерная для вихрей такого размера. В соответствии с соотношением (4.9) кинетическая энергия единицы массы жидкости за единицу времени определяется величиной порядка $\frac{v_0^3}{L_0}$. Диссипация энергии в единице массы жидкости за единицу

времени определяется величиной порядка $\frac{v v_0^2}{L_0^2}$ и, поскольку число

Рейнольдса очень велико, кинетическая энергия во много раз превосходит диссипацию энергии. Поэтому диссипацией можно пренебречь и считать, что практически вся кинетическая энергия может передаваться вихрям меньшего масштаба. Обозначим через v_1, v_2, \dots, v_n скорости вихрей размеров L_1, L_2, \dots, L_n , причём $L_0 > L_1 > L_2 > \dots > L_n$. Тогда кинетическая энергия единицы массы жидкости в единицу времени должна быть примерно одинаковой для вихрей всех размеров:

$$\frac{v_0^3}{L_0} \approx \frac{v_1^3}{L_1} \approx \frac{v_2^3}{L_2} \approx \dots \approx \frac{v_n^3}{L_n}.$$

В то же время диссипация энергии $\nu \frac{v_n^2}{L_n^2}$ с уменьшением размера вихря возрастает, поскольку $v_n \sim L_n^{1/3}$, и, следовательно, $\nu \frac{v_n^2}{L_n^2} \sim \nu L_n^{-4/3}$,

и это продолжается до тех пор, пока не будет достигнут минимальный размер вихря l_0 , при котором кинетическая энергия по порядку величины равна диссипации энергии ε :

$$\frac{v_0^3}{L_0} \approx \frac{v_1^3}{L_1} \approx \dots \approx \frac{v_l^3}{l_0} \approx \nu \frac{v_l^2}{l_0^2} \approx \varepsilon. \quad (4.15)$$

При размерах вихря $\sim l_0$ вся кинетическая энергия преобразуется в тепло, так что на создание вихрей с размерами меньше l_0 практически не остаётся энергии. Размер l_0 называется внутренним масштабом турбулентности. Энергия ε , диссипируемая единицей массы жидкости в единицу времени, играет важную роль в теории турбулентности и называется скоростью диссипации энергии.

Из соотношений (4.15) следует важное свойство скорости ν вихря размера L . Если размер вихря заключён между внешним (L_0) и внутренним (l_0) масштабами турбулентности, то флуктуационная скорость ν зависит только от размера L вихря и скорости диссипации энергии ε :

$$\nu \sim (\varepsilon L)^{1/3}.$$

Если предположить, что турбулентность однородна и изотропна, то флуктуационную скорость ν можно считать стационарной случайной функцией L . При этом структурная функция флуктуаций скорости должна зависеть только от расстояния между точками наблюдения турбулентности $R = |R_1 - R_2|$ при $l_0 \leq R \leq L_0$ и иметь размерность $(\varepsilon L)^{2/3}$:

$$Q_\nu(R) = C(\varepsilon R)^{2/3}, \quad (4.16)$$

где C – безразмерная постоянная. Формула (4.11) была получена А.Н. Колмогоровым и А.М. Обуковым и носит название "закона двух третей". Выражение (4.16) можно переписать в виде:

$$Q_\nu(R) = C_\nu^2 R^{2/3}, \quad (4.17)$$

где C_ν^2 – постоянная величина, которая характеризует силу турбулентности.

Показатель преломления n земной атмосферы в пределах тропосферы (до высоты, равной 17 км) определяется выражением

$$n - 1 = \frac{77,6}{T} \left(P + 4810 \frac{e}{T} \right) \cdot 10^{-6},$$

где T – абсолютная температура в кельвинах; P – давление в миллибарах; 1 миллибар (мб) = $10^{-3} \frac{\text{ДИН}}{\text{см}^2} = 100 \text{Па}$; 1 стандартная атмосфера = 1013,2 мб; e – упругость водяных паров в миллибарах.

Считается, что эта формула справедлива для волн с частотой от 1 МГц до 30 ГГц, по крайней мере, а возможно, и до 72 ГГц. В оптической области влажность не играет существенной роли, а поэтому показатель преломления можно определить приближённой формулой вида:

$$n - 1 = 77,6 \frac{P}{T} \cdot 10^{-6}.$$

Предположим, что в атмосфере не происходит ни испарения, ни конденсации водяного пара. В этих условиях естественно ожидать, что при движении некоторой массы воздуха количество тепла в ней не будет меняться в течение достаточно большого времени (порядка минут). Поэтому с термодинамической точки зрения турбулентность можно считать адиабатическим процессом, т.е. процессом, который протекает без теплообмена с окружающей средой. Таким образом, в результате турбулентности атмосферы образуются воздушные зоны с различными температурами. Можно показать, что флуктуации температуры также подчиняются закону двух третей:

$$Q_T(R) = C_T^2 R^{2/3}.$$

В книге В.И. Татарского "Распространение волн в турбулентной атмосфере" (М.: Наука, 1967) показано, что в среде с масштабом турбулентности от l_0 до L_0 структурная функция для показателя преломления может быть записана в виде:

$$Q_n(R) = C_n^2 R^{2/3} \text{ для } l_0 < R < L_0.$$

Коэффициент C_n называется структурной постоянной показателя преломления. Этот коэффициент характеризует турбулентность атмосферы:

$C_n = 0$ – однородная среда, перемещение всех её точек происходит с одинаковой скоростью;

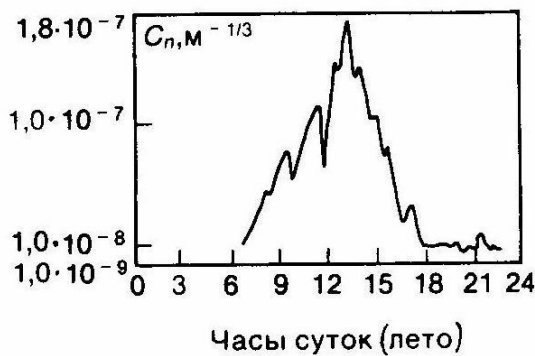
$$C_n = 8 \cdot 10^{-9} \text{ м}^{-1/3} \text{ – слабая турбулентность, } l_0 = 1,2 \text{ см, } L_0 = 10 \text{ м;}$$

$$C_n = 4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^{-1/3} \text{ – средняя турбулентность;}$$

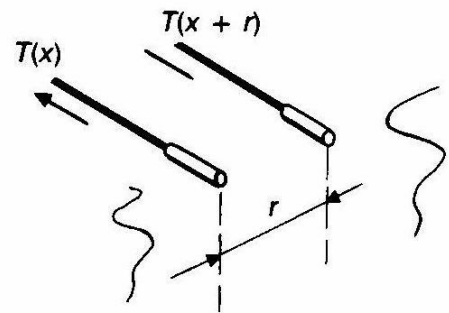
$C_n = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1/3}$ – сильная турбулентность, $l_0 \approx 0,3 \text{ см}$, $L_0 \approx 1 \text{ м}$.

Измерение величин C_n для данной турбулентности начинают обычно с регистрации распределения температуры. Измерение температуры воздуха в двух соседних точках, разделённых расстоянием R , позволяет вычислить структурную функцию температуры, которая выражается формулой

$$Q_T(R) = \overline{[T(X+R) - T(X)]^2} = C_T^2 R^{2/3}.$$



Типичный результат измерения C_n



Система измерения C_n

Рис. 4.8. Измерение величин C_n

Температура измеряется двумя термоанемометрами с нагревательными проволочками, действующими как малоинерционные термометры (проволочки из вольфрама диаметром 10 мкм и длиной 0,3 мм), как показано на рис.4.8 справа.

Коэффициент C_T называется структурной постоянной флуктуаций температуры атмосферы и связан с коэффициентом C_n соотношением

$$C_n(h) = 78 \cdot 10^{-6} \frac{P(h)}{T^2(h)} C_T(h),$$

где $P(h)$ – давление в миллибарах, а $T(h)$ – средняя температура воздуха в кельвинах на высоте h .

Глава 5

ФОРМИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Предельное разрешение изображения предмета, образованного оптической системой, достигается в том случае, когда аберрации в изображении отсутствуют, а среда, разделяющая предмет и оптическую систему, идеальна. Однако, среда, в которой распространяются световые волны, проходя от предмета до системы, формирующей изображение, часто оптически неоднородна, в результате чего даже в случае безабберационного изображения реальное разрешение значительно ниже теоретического дифракционного предела. Наиболее важным примером оптически неоднородной среды является земная атмосфера. Вследствие неоднородного нагрева Солнцем земной поверхности всегда существуют неоднородности показателя преломления воздуха, определяемые его температурой, которые приводят к деформации волновых фронтов, излучаемых точками предмета. Вполне очевидно, что характер деформации волнового фронта и величина ее заранее неизвестны. Поэтому процесс деформации волнового фронта естественно рассматривать как случайный и вычислять средние характеристики изображения, образованного оптической системой в таких условиях.

Заметим, что в подавляющем большинстве задач, представляющих практический интерес (например, в астрономии), излучение предмета с высокой степенью точности можно считать некогерентным. Поэтому излучение интересующих нас объектов будем считать некогерентным. Кроме того, будем предполагать, что пространственный масштаб (т.е. длина корреляции) рассматриваемых неоднородностей намного больше длины волны излучения. Тем самым исключаются из рассмотрения задачи, затрагивающие формирование изображения при прохождении света через облака или аэрозоли, масштаб неоднородностей которых сравним с оптической длиной волны или меньше ее и показатель преломления которых изменяется очень резко, т.е. исключаются задачи формирования изображения в мутной среде. Будем считать, что нас интересует формирование изображения в турбулентной среде, показатель преломления которой изменяется плавно. Важнейшим примером турбулентной среды является чистая земная атмосфера.

Пространственно-частотный отклик оптической системы при некогерентном излучении предмета принято характеризовать оптической передаточной функцией (ОПФ), равной

$$\tau(\omega'_x, \omega'_y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') F^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) d\mu' d\nu'}{\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') F^*(\mu', \nu') d\mu' d\nu'}, \quad (5.1)$$

где $F(\mu', \nu')$ – зрачковая функция, которая определяется выражением

$$F(\mu', \nu') = P(\mu', \nu') u(\mu', \nu') \exp[-ikW(\mu', \nu')],$$

$u(\mu', \nu')$ – амплитуда светового возмущения на выходной сфере радиуса R' ; $W(\mu', \nu')$ – функция деформации волнового фронта (волновая аберрация); $P(\mu', \nu')$ – единично-нулевая функция, определяющая область выходного зрачка $\Sigma_{зр}$, при этом

$$P(\mu', \nu') = \begin{cases} 1, & \text{если } (m', M') \in \Sigma_{зр}; \\ 0, & \text{если } (m', M') \notin \Sigma_{зр}; \end{cases}$$

m', M' – координаты точки на выходном зрачке, при этом $\mu' = k \frac{m'}{R'}$,

$\nu' = k \frac{M'}{R'}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. По сути дела, μ', ν' – пространственные частоты.

5.1. Влияние тонких случайных фильтров на качество изображения

Если в зрачок оптической системы, формирующей изображение, поместить фильтр с амплитудным коэффициентом пропускания

$\tilde{t}_s(m', M') = \tilde{t}_s\left(\frac{R'}{k} \mu', \frac{R'}{k} \nu'\right) = t_s(\mu', \nu')$, то будем иметь новую зрачковую

функцию вида:

$$F_s(\mu', \nu') = F(\mu', \nu') t_s(\mu', \nu'). \quad (5.2)$$

При этом ОПФ определится выражением вида:

$$\tau(\omega'_x, \omega'_y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') F^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) t_s(\mu', \nu') t_s^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) d\mu' d\nu'}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu', \nu')|^2 |t_s(\mu', \nu')|^2 d\mu' d\nu'}. \quad (5.3)$$

Поскольку конкретные значения $t_s(\mu', \nu')$ в каждой точке фильтра с координатами (μ', ν') неизвестны, то на основании статистического распределения коэффициента $t_s(\mu', \nu')$ можно вычислить средний частотный отклик системы, проводя усреднение по некоторому ансамблю фильтров.

В большинстве представляющих интерес случаев усредненную ОПФ можно определить отношением усредненного числителя в выражении (5.3) к усредненному знаменателю:

$$\begin{aligned} \langle \tau(\omega'_x, \omega'_y) \rangle &= \\ &= \frac{\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') F^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) t_s(\mu', \nu') t_s^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) d\mu' d\nu' \right\rangle}{\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu', \nu')|^2 |t_s(\mu', \nu')|^2 d\mu' d\nu' \right\rangle}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Скобки $\langle \rangle$ означают усреднение по ансамблю. При таком определении ОПФ формирование изображения оптической системой характеризуется средним весом, придаваемым передаточной функцией частотной компоненте (ω'_x, ω'_y) , нормированным на средний вес, придаваемый ею компоненте интенсивности с нулевыми частотами. Если усреднение провести под знаком интеграла, то выражение (5.4) примет вид:

$$\begin{aligned} \langle \tau(\omega'_x, \omega'_y) \rangle &= \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') F^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) \langle t_s(\mu', \nu') t_s^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) \rangle d\mu' d\nu'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu', \nu')|^2 \langle |t_s(\mu', \nu')|^2 \rangle d\mu' d\nu'}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Если пространственное статистическое распределение коэффициента пропускания фильтра стационарно в широком смысле, т.е. если $\langle t_s(\mu'_1, \nu'_1) t_s^*(\mu'_2, \nu'_2) \rangle$ зависит только от $\mu'_2 - \mu'_1$ и $\nu'_2 - \nu'_1$, то среднее значение этого произведения не зависит от μ' и ν' и может быть вынесено за знак интеграла. Тогда выражение, определяющее усредненную ОПФ, принимает вид:

$$\langle \tau(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \tau_0(\omega'_x, \omega'_y) \langle \tau_s(\omega'_x, \omega'_y) \rangle, \quad (5.6)$$

где $\tau_0(\omega'_x, \omega'_y)$ – ОПФ системы в отсутствие фильтра, тогда как $\langle \tau_s(\omega'_x, \omega'_y) \rangle$ может рассматриваться как усредненная ОПФ фильтра, определяемая выражением

$$\langle \tau_s(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \frac{K_t(\omega'_x, \omega'_y)}{K_t(0, 0)}, \quad (5.7)$$

где K_t – пространственная автокорреляционная функция фильтра:

$$K_t(\omega'_x, \omega'_y) = \langle t_s(\mu', \nu') t_s^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) \rangle. \quad (5.8)$$

Знание усредненной ОПФ позволяет определить усредненную функцию рассеяния точки (ФРТ) – важную характеристику качества изображения, образованного оптической системой. Известно, что ОПФ определяется преобразованием Фурье ФРТ. Следовательно, в рассматриваемом случае ФРТ определится выражением вида:

$$\langle D(x', y') \rangle = F^{-1} \langle \tau(\omega'_x, \omega'_y) \rangle, \quad (5.9)$$

где $F^{-1} \langle \rangle$ – обратное преобразование Фурье. При этом усредненная ФРТ всегда неотрицательна и действительна и имеет единичный объем, т.е.

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \langle D(x', y') \rangle dx' dy' = 1.$$

Из выражения (5.6) следует, что усредненная ФРТ равна свертке ФРТ в изображении, образованном оптической системой без фильтра, с ФРТ, связанной с фильтром. Таким образом,

$$\langle D(x', y') \rangle = D_0(x', y') \otimes \langle D_s(x', y') \rangle, \quad (5.10)$$

где $D_0(x', y') = F^{-1} \tau_0(\omega'_x, \omega'_y)$ – ФРТ, когда фильтр отсутствует; $\langle D_s(x', y') \rangle$ – ФРТ, связанная с функцией пропускания света фильтром.

5.1.1. Случайные поглощающие фильтры

Амплитудный коэффициент пропускания $t_s(\mu', \nu')$ случайного поглощающего фильтра определяется действительной и неотрицательной величиной, лежащей между нулем и единицей. Введение такого фильтра можно рассматривать как случайную аподизацию изображения точки и исследовать влияние такой аподизации на качество усреднённого изображения.

Выражение, определяющее амплитудный коэффициент пропускания случайного поглощающего фильтра, можно представить в виде:

$$t_s(\mu', \nu') = t_0 + \delta(\mu', \nu'), \quad (5.11)$$

где t_0 – действительная и неотрицательная постоянная величина, лежащая между нулем и единицей, а $\delta(\mu', \nu')$ – пространственно-стационарный действительный случайный процесс, ограниченный интервалом

$$-t_0 \leq \delta(\mu', \nu') \leq 1 - t_0, \quad (5.12)$$

с нулевым средним значением. При этом автокорреляционная функция фильтра определяется выражением вида:

$$\begin{aligned} K_t(\omega'_x, \omega'_y) &= \left\langle \left[t_0 + \delta(\mu'_x, \nu') \right] \left[t_0 + \delta(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) \right] \right\rangle = \\ &= t_0^2 + K_\delta(\omega'_x, \omega'_y), \end{aligned} \quad (5.13)$$

где K_δ – автокорреляционная функция случайного процесса $\delta(\mu', \nu')$. При этом требуемый нормировочный множитель равен:

$$K_t(0, 0) = t_0^2 + \overline{\delta^2} = t_0^2 + \sigma_\delta^2. \quad (5.14)$$

Если определить нормированную автокорреляционную функцию случайного процесса $\delta(\mu', \nu')$ соотношением вида:

$$\gamma_\delta(\omega'_x, \omega'_y) = \frac{K_\delta(\omega'_x, \omega'_y)}{\sigma_\delta^2}, \quad (5.15)$$

то выражение, определяющее усредненную ОПФ, связанную со случайным фильтром, принимает вид:

$$\langle \tau_s(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \frac{t_0^2}{t_0^2 + \sigma_\delta^2} \tau_0(\omega'_x, \omega'_y) + \frac{\sigma_\delta^2}{t_0^2 + \sigma_\delta^2} \gamma_\delta(\omega'_x, \omega'_y). \quad (5.16)$$

Усредненная ОПФ системы в целом определяется путем умножения найденной усредненной ОПФ на ОПФ в отсутствие фильтра, что приводит к выражению вида:

$$\langle \tau(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \frac{t_0^2}{t_0^2 + \sigma_\delta^2} \tau_0(\omega'_x, \omega'_y) + \frac{\sigma_\delta^2}{t_0^2 + \sigma_\delta^2} \tau_0(\omega'_x, \omega'_y) \gamma_\delta(\omega'_x, \omega'_y). \quad (5.17)$$

Отметим некоторые важные свойства усредненной ОПФ фильтра $\langle \tau_s(\omega'_x, \omega'_y) \rangle$. Прежде всего, отметим, что ОПФ фильтра всегда положительна и действительна благодаря неотрицательному и действительному значению амплитудного коэффициента пропускания t_s . Кроме того, при очень больших пространственных частотах ω'_x и

ω'_y имеем: $\gamma_\delta(\omega'_x, \omega'_y) \rightarrow 0$ и усредненная ОПФ фильтра приближается к асимптотическому значению

$$\langle \tau_s(\omega'_x, \omega'_y) \rangle \rightarrow \frac{t_0^2}{t_0^2 + \sigma_\delta^2}. \quad (5.18)$$

Если $\sigma_\delta^2 \ll t_0^2$, то это асимптотическое значение близко к единице и фильтр слабо влияет на качество изображения. Если же $\sigma_\delta^2 \gg t_0^2$, то асимптотическое значение очень мало и большие пространственные частоты сильно подавляются фильтром.

Чтобы найти общую форму усредненной ФРТ системы в целом, необходимо выполнить обратное преобразование Фурье усредненной ОПФ системы, т.е. выражения (5.17). Учитывая теорему свертки, находим, что

$$\langle D(x', y') \rangle = \frac{t_0^2}{t_0^2 + \sigma_\delta^2} D_0(x', y') + \frac{\sigma_\delta^2}{t_0^2 + \sigma_\delta^2} D_0(x', y') \otimes \langle D_\delta(x', y') \rangle, \quad (5.19)$$

где $\langle D_\delta(x', y') \rangle = F^{-1}[\gamma_\delta(\omega'_x, \omega'_y)]$. (5.20)

Первое слагаемое выражения (5.19) часто называется «центральной сердцевинной» усредненной ФРТ. В большинстве представляющих интерес случаев второе слагаемое имеет более широкое распределение, чем первое. Вторая составляющая называется «диффузным гало» в усредненной ФРТ. Примерная форма усредненной ФРТ показана на рис. 5.1.

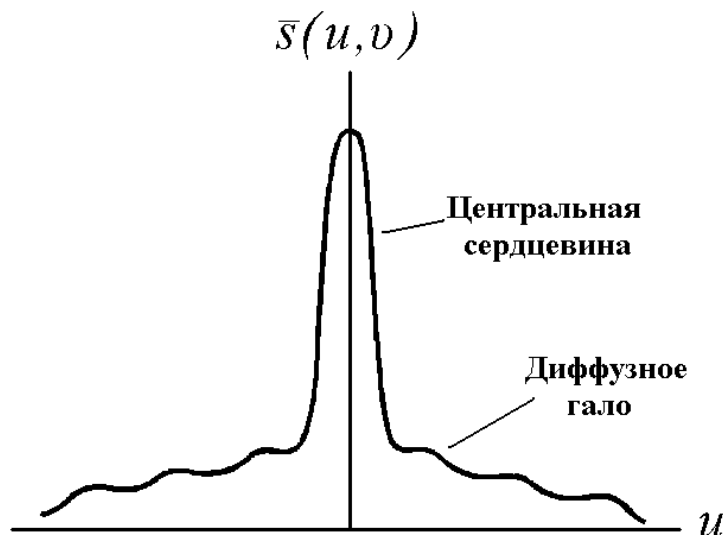


Рис. 5.1. Примерная форма усредненной ФРТ системы со случайным поглощающим экраном

5.1.2. Случайные фазовые фильтры

Другим классом случайных фильтров, более важным с практической точки зрения, чем случайные поглощающие фильтры, является класс случайных фазовых фильтров.

Фильтр называется случайным фазовым, если он изменяет фазу прошедшего света непредсказуемым образом, не поглощая его. Амплитудный коэффициент пропускания такого фильтра определяется выражением вида:

$$t_s(\mu', \nu') = \exp[i\varphi(\mu', \nu')], \quad (5.21)$$

где $\varphi(\mu', \nu')$ – случайный фазовый сдвиг, вносимый фильтром в точке (m', M') . Изменение фазы $\varphi(\mu', \nu')$ может быть обусловлено либо изменением показателя преломления материала фильтра, либо изменением его толщины, либо тем и другим вместе. Величина фазовых изменений зависит от длины волны света, так как пропорциональна оптической длине пути, преодолеваемой волной при прохождении сквозь фильтр, измеренной в длинах волн. Фазовый сдвиг $\varphi(\mu', \nu')$ определяется соотношением

$$\varphi(\mu', \nu') = \frac{2\pi}{\lambda} [L(m', M') - L_0], \quad (5.22)$$

где $L(m', M')$ – полная оптическая длина пути (произведение показателя преломления материала на толщину) в фильтре в точке (m', M') , а L_0 – средняя длина оптического пути в фильтре. Будем считать спектральный диапазон излучения достаточно узким, при этом среднее значение длины волны света будем считать равным $\bar{\lambda}$.

Чтобы выяснить, как влияет случайный фазовый фильтр на характеристики изображения, сформированного некогерентным светом, найдем сначала пространственную автокорреляционную функцию амплитудного коэффициента пропускания t_s :

$$K_t(\mu'_1, \nu'_1; \mu'_2, \nu'_2) = \langle t_s(\mu'_1, \nu'_1) t_s^*(\mu'_2, \nu'_2) \rangle \quad (5.23)$$

Подставив соотношение (5.21) в выражение (5.23), находим, что

$$K_t(\mu'_1, \nu'_1; \mu'_2, \nu'_2) = \langle \exp[i\varphi(\mu'_1, \nu'_1) - i\varphi(\mu'_2, \nu'_2)] \rangle. \quad (5.24)$$

Известно, что характеристическая функция случайной переменной u определяется как математическое ожидание функции $\exp(i\omega u)$:

$$M_u(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega u) p(u) du, \quad (5.25)$$

т.е. характеристическая функция случайной переменной представляет собой Фурье-образ плотности вероятности $p(u)$ случайной

переменной u . Совместная характеристическая функция двух случайных переменных u и v определяется выражением вида:

$$M_{uv}(\omega_u, \omega_v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp[i(\omega_u u + \omega_v v)] p(u, v) du dv. \quad (5.26)$$

Таким образом, правую часть выражения (5.24) можно представить как тесно связанную с совместной характеристической функцией случайных переменных $\varphi_1 = \varphi(\mu'_1, \nu'_1)$ и $\varphi_2 = \varphi(\mu'_2, \nu'_2)$ в виде:

$$K_t(\mu'_1, \nu'_1; \mu'_2, \nu'_2) = M_\varphi(1, -1), \quad (5.27)$$

где $M_\varphi(\omega_1, \omega_2) = \langle \exp(i\omega_1 \varphi_1 + i\omega_2 \varphi_2) \rangle$ является характеристической функцией в рассматриваемом случае. Кроме того, можно считать, что в формуле (5.24) величина K_t выражается через характеристическую функцию разности фаз $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$K_t(\mu'_1, \nu'_1; \mu'_2, \nu'_2) = M_{\Delta\varphi}(1). \quad (5.28)$$

Однако, заметим, что $M_{\Delta\varphi}(\omega) = M_\varphi(\omega, -\omega)$, т.е. выражения (5.27) и (5.28) эквивалентны.

Наиболее важным частным видом случайного фазового фильтра является фильтр с гауссовским распределением фазы. Пусть случайная фаза $\varphi(\mu', \nu')$ моделируется гауссовским случайным процессом с нулевым средним. Поскольку φ_1 и φ_2 – гауссовские величины, разность фаз $\Delta\varphi$ тоже гауссовская величина, которая обладает следующими дополнительными статистическими свойствами:

$$\begin{aligned} \langle \Delta\varphi \rangle &= 0, \\ \sigma_{\Delta\varphi}^2 &= \langle (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \rangle = D_\varphi(\mu'_1, \nu'_1; \mu'_2, \nu'_2), \end{aligned} \quad (5.29)$$

где D_φ – структурная функция случайного процесса $\varphi(\mu', \nu')$.

Так как характеристическая функция первого порядка гауссовской случайной переменной $\Delta\varphi$ имеет вид:

$$M_{\Delta\varphi}(1) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_{\Delta\varphi}^2\right), \quad (5.30)$$

то соответствующая подстановка приводит к следующему выражению, определяющему автокорреляционную функцию амплитудного коэффициента пропускания фильтра:

$$K_t(\mu'_1, \nu'_1; \mu'_2, \nu'_2) = \exp\left[-\frac{1}{2} D_\varphi(\mu'_1, \nu'_1; \mu'_2, \nu'_2)\right]. \quad (5.31)$$

Если случайный процесс $\varphi(\mu', \nu')$ является стационарным в первых приращениях, то структурная функция фазы $\varphi(\mu', \nu')$ зависит только от разностей координат $\omega'_x = \mu'_1 - \mu'_2$ и $\omega'_y = \nu'_1 - \nu'_2$. Тогда

$$K_t(\omega'_x, \omega'_y) = \exp\left[-\frac{1}{2}D_\varphi(\omega'_x, \omega'_y)\right]. \quad (5.32)$$

При этом усредненная ОПФ фильтра определится выражением

$$\langle \tau_s(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}D_\varphi(\omega'_x, \omega'_y)\right]. \quad (5.33)$$

В более ограниченном случае фазы, стационарной в широком смысле, структурная функция может быть выражена через нормированную автокорреляционную функцию $\gamma_\varphi(\omega'_x, \omega'_y)$ фазы:

$$D_\varphi(\omega'_x, \omega'_y) = 2\sigma_\varphi^2[1 - \gamma_\varphi(\omega'_x, \omega'_y)]. \quad (5.34)$$

При этом формула усредненной ОПФ фильтра принимает вид:

$$\langle \tau_s(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \exp\left\{-\sigma_\varphi^2[1 - \gamma_\varphi(\omega'_x, \omega'_y)]\right\}. \quad (5.35)$$

Отсюда следует, что свойства усредненной ОПФ системы, формирующей изображение в присутствии случайного фазового фильтра, определяются прежде всего свойствами структурной функции D_φ . В случае фазы, стационарной в широком смысле, структурную функцию можно взять в форме (5.34). Очевидно, что эта структурная функция обладает двумя важными свойствами:

$$D_\varphi(0, 0) = 0 \quad (5.36)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_\varphi(\infty, \omega'_y) \\ D_\varphi(\omega'_x, \infty) \end{array} \right\} = 2\sigma_\varphi^2. \quad (5.37)$$

Второе свойство следует из того, что автокорреляционная функция γ_φ уменьшается до нуля, когда расстояние между двумя точками становится произвольно большим. Типичный ход изменения структурной функции показан на рис. 5.2 при трех разных значениях дисперсии σ_φ^2 . При этом для рассматриваемого случая можно построить примерный график усредненной ОПФ.

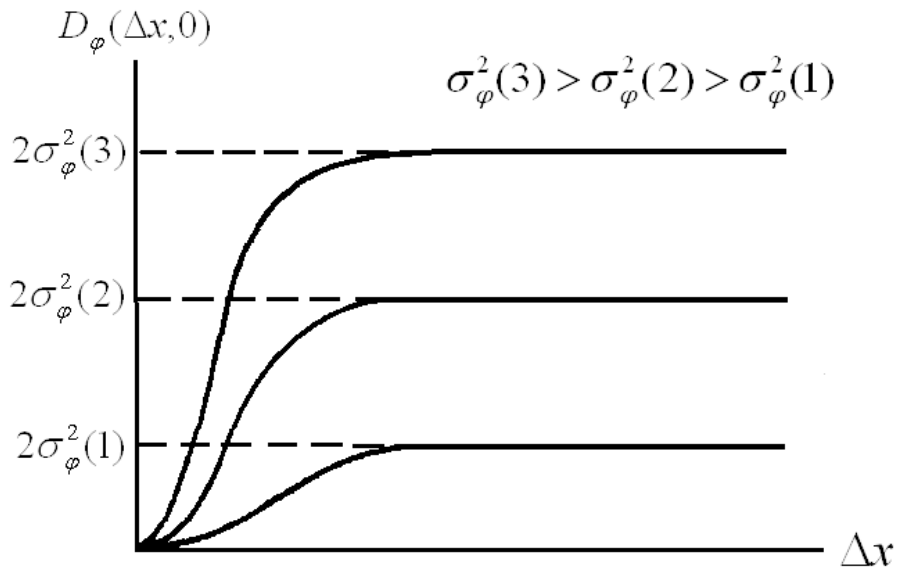
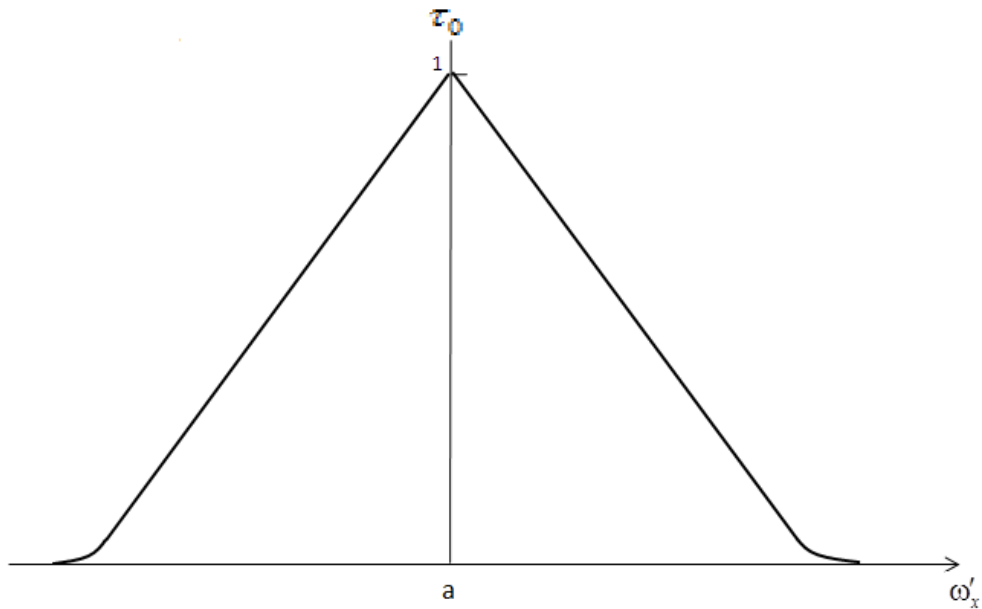


Рис. 5.2. Типичная форма структурной функции фазы (в случае стационарности в широком смысле)

На рис. 5.3 показаны типичные кривые, соответствующие $\tau_0, \langle \tau_s \rangle$ и $\langle \tau \rangle = \tau_0 \langle \tau_s \rangle$ при четырех значениях дисперсии фазы.



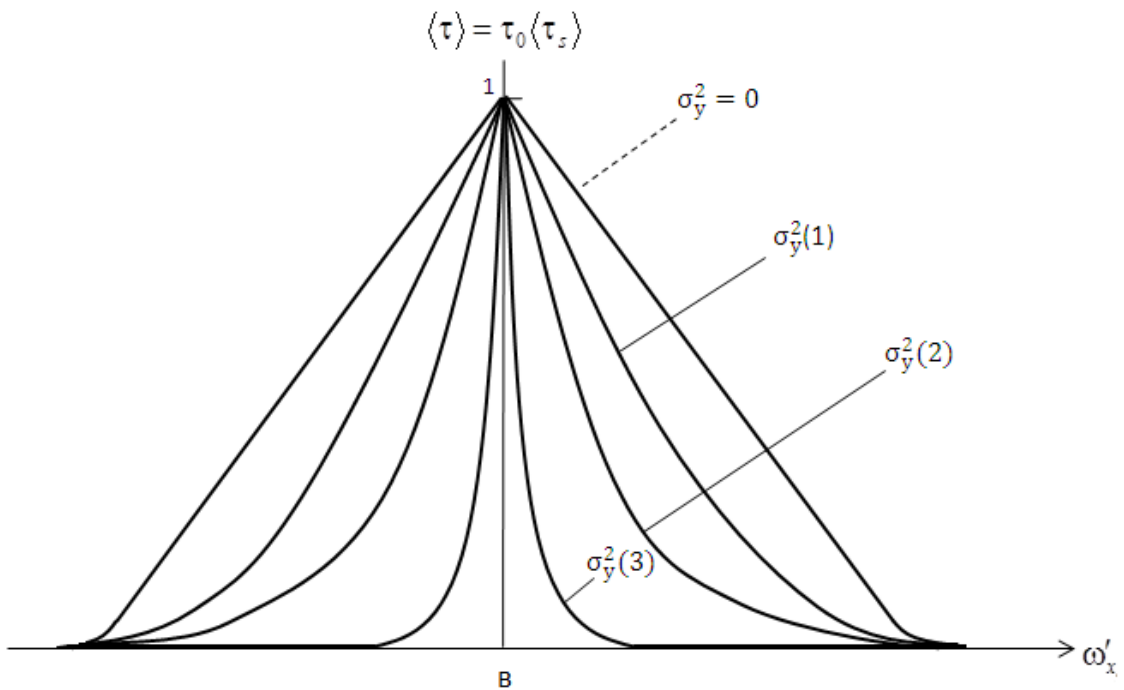
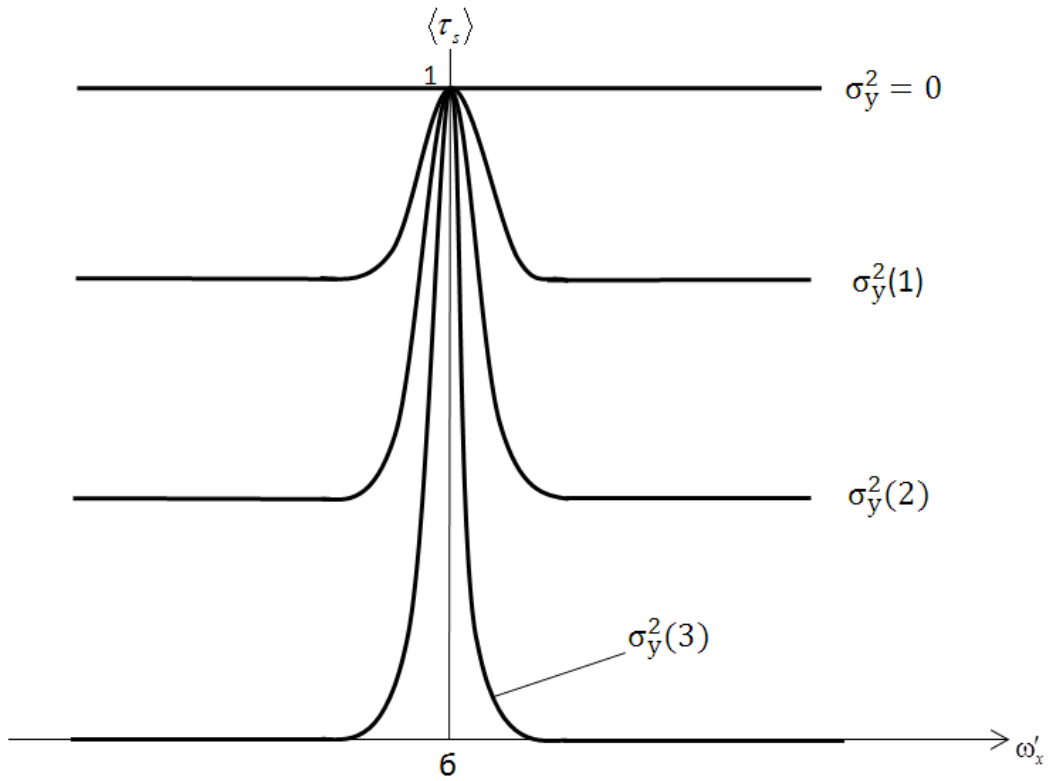


Рис. 5.3. Типичные ОПФ для системы со случайным фазовым экраном. а – дифракционно-ограниченная ОПФ; б – усредненная ОПФ экрана; в – усредненная ОПФ системы $[\sigma_\varphi^2(1) < \sigma_\varphi^2(2) < \sigma_\varphi^2(3)]$

Заметим, что при больших значениях частот ω'_x или ω'_y усредненная ОПФ фильтра $\langle \tau_s \rangle$ приближается к асимптотическому значению

$$\left. \begin{aligned} \langle \tau_s(\omega'_x, \infty) \rangle \\ \langle \tau_s(\infty, \omega'_y) \rangle \end{aligned} \right\} = \exp(-\sigma_\varphi^2). \quad (5.38)$$

Даже при не очень больших значениях σ_φ^2 это асимптотическое значение крайне мало.

Рассмотрим случайный фазовый процесс с автокорреляционной функцией, обладающей круговой симметрией:

$$\gamma_\varphi(\omega') = \exp\left[-\left(\frac{\omega'}{a}\right)^2\right], \quad (5.39)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_x'^2 + \omega_y'^2}$.

Усредненная ОПФ такого фильтра определяется выражением вида:

$$\langle \tau_s(\omega') \rangle = \exp\left\{-\sigma_\varphi^2 \left[1 - \exp\left(-\frac{\omega'^2}{a^2}\right)\right]\right\}. \quad (5.40)$$

Можно показать, что при большой дисперсии фазы ОПФ уменьшается до значения e^{-1} , если

$$\omega' = \omega'_{1/e} \approx \frac{a}{\sigma_\varphi}. \quad (5.41)$$

Таким образом, ширина усредненной ОПФ фильтра прямо пропорциональна ширине a автокорреляционной функции фазы и обратно пропорциональна стандартному отклонению фазы σ_φ .

Найдем приближенное выражение для усредненной ОПФ при том условии, что ОПФ $\tau_0(\omega'_x, \omega'_y)$ исходной оптической системы значительно шире усредненной ОПФ фильтра. Для этого перепишем выражение для $\langle \tau_s(\omega'_x, \omega'_y) \rangle$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle \tau_s(\omega'_x, \omega'_y) \rangle &= \exp\left[-\sigma_\varphi^2(1 - \gamma_\varphi)\right] = \\ &= \exp(-\sigma_\varphi^2) + \exp(-\sigma_\varphi^2) \left[\exp(\sigma_\varphi^2 \gamma_\varphi) - 1\right]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Первый член в этом выражении представляет собой асимптоту, к которой стремится усредненная ОПФ, а второй описывает превышение над этой асимптотой. Предполагая теперь, что ОПФ $\tau_0(\omega'_x, \omega'_y)$ для исходной оптической системы значительно шире второго члена в выражении (5.42), можно принять, что

$$\tau_0(\omega'_x, \omega'_y) \exp(-\sigma_\varphi^2) \left[\exp(\sigma_\varphi^2 \gamma_\varphi) - 1\right] \approx \exp(-\sigma_\varphi^2) \left[\exp(\sigma_\varphi^2 \gamma_\varphi) - 1\right].$$

При этом

$$\begin{aligned} \langle \tau(\omega'_x, \omega'_y) \rangle &\approx \tau_0(\omega'_x, \omega'_y) \exp(-\sigma_\phi^2) + \\ &+ \exp(-\sigma_\phi^2) \left\{ \exp[\sigma_\phi^2 \gamma_\phi(\omega'_x, \omega'_y)] - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Пусть $D_0(x', y')$ – ФРТ исходной оптической системы (без фильтра). Выполнив обратное преобразование Фурье выражения (5.43), получим выражение, определяющее усредненную ФРТ, в виде:

$$\langle D(x', y') \rangle \approx D_0(x', y') \exp(-\sigma_\phi^2) + D_h(x', y'). \quad (5.44)$$

$$\text{где } D_h(x', y') = F^{-1} \left\{ \exp(-\sigma_\phi^2) \left[e^{\sigma_\phi^2 \gamma_\phi(\omega'_x, \omega'_y)} - 1 \right] \right\}. \quad (5.45)$$

Слагаемое $D_0(x', y') \exp(-\sigma_\phi^2)$ описывает изображение точки дифракционно-ограниченного качества, «сердцевину» ФРТ, а слагаемое $D_h(x', y')$ – значительно более широкое «гало». На рис. 5.3 показана эта приближенная форма усредненной ФРТ при трех значениях дисперсии фазы. Заметим, что дифракционно-ограниченная «сердцевина» усредненной ФРТ очень быстро уменьшается с увеличением дисперсии фазы и во многих практических приложениях ею можно пренебречь.

Можно показать, что в случае гауссовского фазового фильтра с большой дисперсией фазы усредненная ОПФ и усредненная ФРТ имеют приблизительно гауссовскую форму.

5.2 Влияние протяженной случайной неоднородной среды на распространение волн

Рассмотрим более важный, но и более сложный для анализа, случай влияния на деформацию волнового фронта протяженной случайной неоднородности среды. Пусть пространство между источником некогерентного излучения (объектом наблюдения) и оптической системой, формирующей изображение объекта, заполнено протяженной хаотически неоднородной средой (например, земной атмосферой), как показано на рис. 5.4. Наличие неоднородной среды определяет деформацию волновых фронтов, падающих на входной зрачок оптической системы, что, в свою очередь, приводит к изменению структуры световых пучков лучей, формирующих изображение. Поэтому важно определить влияние неоднородной среды на структуру изображения.

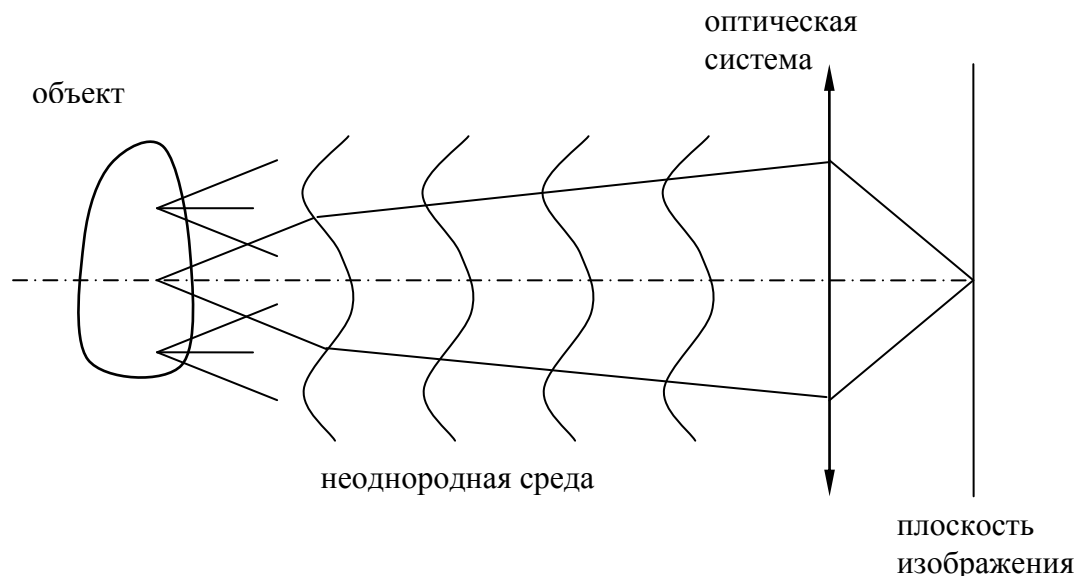


Рис. 5.4. Схема формирования изображения в условиях неоднородной среды

Наиболее важным примером протяженной случайной неоднородной среды является земная атмосфера, оптическая неоднородность которой позволяет наблюдать прекрасное явление мерцания звёзд, но которая и ограничивает четкость наблюдаемой картины неба. Рассмотрим влияние на качество изображения плавных и малых флуктуаций показателя преломления чистого воздуха, окружающего планету Земля, исключив из рассмотрения влияние на оптические явления пыли и аэрозолей и полагая воздух прозрачным.

Показатель преломления земной атмосферы изменяется в пространстве и времени и зависит от длины волны света. Для удобства представим эти зависимости в виде:

$$n(\mathbf{r}, t, \lambda) = n_0(\mathbf{r}, t, \lambda) + n_1(\mathbf{r}, t, \lambda), \quad (5.46)$$

где n_0 – регулярная (неслучайная) часть величины n , а n_1 – случайные флуктуации величины n относительно среднего значения $\langle n \rangle = n_0 \approx 1$.

Детерминированные изменения величины n , вообще говоря, являются очень плавными и макроскопическими в пространственном измерении. Такова, например, зависимость n_0 от высоты над поверхностью Земли. Малые изменения величины n_0 во времени позволяют не учитывать эту зависимость. Случайные флуктуации n_1 возникают из-за турбулентности в атмосфере. Турбулентные вихри в воздухе имеют размер, изменяющийся от десятков метров и более до

нескольких миллиметров. Заметим, что типичные значения n_1 на несколько порядков меньше единицы. Зависимостью этих случайных флуктуаций от длины волны, вообще говоря, можно пренебречь, что позволяет выражение (5.46) записать в виде:

$$n(\bar{r}, t, \lambda) = n_0(\bar{r}, \lambda) + n_1(\bar{r}, t). \quad (5.47)$$

Время, затрачиваемое светом на прохождение через атмосферу, - лишь малая часть времени флуктуации случайной составляющей показателя преломления n . По этой причине, если в той или иной задаче представляет интерес и временная зависимость, то она вводится на основе гипотезы «замороженной турбулентности», называемой также гипотезой Тейлора, согласно которой данная реализация случайной структуры n_1 «дрейфует» через измерительную апертуру с постоянной скоростью, определяемой локальными ветровыми условиями, но без каких-либо других изменений.

Одной из наиболее важных статистических характеристик случайного процесса $n_1(\bar{r})$ является пространственная автокорреляционная функция

$$K_n(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \langle [n_1(\bar{r}_1)n_1(\bar{r}_2)] \rangle. \quad (5.48)$$

Если n_1 – пространственно-стационарный процесс в трехмерном пространстве, то он статистически однороден и его автокорреляционная функция принимает вид:

$$K_n(\bar{r}) = \langle [n_1(\bar{r}_1)n_1(\bar{r}_1 - \bar{r})] \rangle, \quad (5.49)$$

где $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Спектральная плотность мощности случайного процесса n_1 определяется как трехмерный Фурье-образ величины $K_n(\bar{r})$:

$$\Phi_n(\bar{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\bar{r}) \exp(i\bar{\alpha} \cdot \bar{r}) d^3\bar{r}, \quad (5.50)$$

$\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_x, \bar{\alpha}_y, \bar{\alpha}_z)$ – вектор пространственной частоты, каждый компонент которого измеряется в единицах радиан на метр. Аналогично имеем

$$K_n(\bar{r}) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\bar{\alpha}) \exp(i\bar{\alpha} \cdot \bar{r}) d^3\bar{\alpha}. \quad (5.51)$$

Если автокорреляционная функция флуктуаций показателя преломления обладает сферической симметрией, то случайный

процесс n_1 называется статистически изотропным и трехмерные фурье-образы можно выразить через однократные интегралы:

$$\Phi_n(\mathfrak{a}) = \frac{1}{2\pi^2 \mathfrak{a}} \int_0^\infty K_n(r) r \sin(\mathfrak{a}r) dr, \quad (5.52)$$

$$K_n(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \Phi_n(\mathfrak{a}) \mathfrak{a} \sin(\mathfrak{a}r) d\mathfrak{a}, \quad (5.53)$$

где $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2 + \mathfrak{a}_z^2}$, $r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$.

Двумерная спектральная плотность мощности $n_1(\bar{r})$ в плоскости с фиксированной координатой z определяется соотношением:

$$F_n(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y, z) = \int_{-\infty}^\infty \Phi_n(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y, \mathfrak{a}_z) d\mathfrak{a}_z. \quad (5.54)$$

Двумерная автокорреляционная функция $B_n(\bar{p}, z)$ связана с двумерной спектральной плотностью мощности соотношениями:

$$F_n(\bar{\mathfrak{a}}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \int B_n(\bar{p}, z) \exp(i\bar{\mathfrak{a}} \cdot \bar{p}) d^2 \bar{p}, \quad (5.55)$$

$$B_n(\bar{p}, z) = \int_{-\infty}^\infty \int F_n(\bar{\mathfrak{a}}, z) \exp(i\bar{\mathfrak{a}} \cdot \bar{p}) d^2 \bar{\mathfrak{a}}, \quad (5.56)$$

где $\bar{\mathfrak{a}} = (\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y)$, $\bar{p} = (\Delta x, \Delta y)$. Заметим, что по определению

$$B_n(\bar{p}, z) = \langle [n_1(\bar{p}_1; z) n_1(\bar{p}_1 - \bar{p}; z)] \rangle. \quad (5.57)$$

Если флуктуации величины n_1 статистически изотропны в плоскости с постоянной координатой z , то $B_n(\bar{p}; z)$ и $F_n(\bar{\mathfrak{a}}; z)$ имеют круговую симметрию, при этом соотношения (5.55) и (5.56) можно записать в виде:

$$F_n(\mathfrak{a}; z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty B_n(p; z) J_0(\mathfrak{a}p) p dp, \quad (5.58)$$

$$B_n(p; z) = 2\pi \int_0^\infty F_n(\mathfrak{a}; z) J_0(\mathfrak{a}p) \mathfrak{a} d\mathfrak{a}, \quad (5.59)$$

где $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2}$, $p = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Имея приведенные соотношения, можно перейти непосредственно к оптическим свойствам турбулентной атмосферы.

5.2.1. Модель атмосферной турбулентности

Показатель преломления воздуха в области оптических частот спектра излучения определяется выражением

$$n = 1 + 77,6 \left(1 + 7,52 \cdot 10^{-3} \lambda^{-2} \right) \frac{P}{T} \cdot 10^{-6}, \quad (5.60)$$

где λ – длина волны света в микрометрах; P – атмосферное давление в миллибарах; T – абсолютная температура в кельвинах.

Зависимость флуктуаций показателя преломления n от давления сравнительно слабая и ее можно не учитывать. Следовательно, температурные флуктуации выступают как основная причина флуктуаций n . При $\lambda = 0,6328$ мкм изменение dn показателя преломления, вызываемое изменением температуры на dT , равно

$$dn = -\frac{79P}{T^2} 10^{-6} dT. \quad (5.61)$$

При распространении света на уровне моря величина производной $\left| \frac{dn}{dT} \right|$ порядка 10^{-6} . Необычайно широкомасштабные температурные неоднородности, обусловленные различной степенью нагрева отдельных участков земной поверхности Солнцем, вызывают появление крупномасштабных неоднородностей показателя преломления, которые постепенно разрушаются турбулентным ветровым потоком и конвекцией, уменьшающими масштаб неоднородностей.

Неоднородности показателя преломления принято называть турбулентными вихрями, которые можно рассматривать как некие воздушные линзы со своим характерным показателем преломления. Спектральная плотность мощности $\Phi_n(\bar{\varepsilon})$ однородной турбулентности может рассматриваться как мера относительного числа вихрей с размерами $L_x = \frac{2\pi}{\varepsilon_x}$, $L_y = \frac{2\pi}{\varepsilon_y}$ и $L_z = \frac{2\pi}{\varepsilon_z}$. В случае изотропной турбулентности величина $\Phi_n(\bar{\varepsilon})$ является функцией только величины ε , которая может рассматриваться как величина, связанная с размером вихря L соотношением $L = \frac{2\pi}{\varepsilon}$.

Согласно классической работе Колмогорова [20] по теории турбулентности в области изменения масштабов турбулентных вихрей можно выделить три интервала.

1. Энергетический интервал (размер вихря больше $L_0 = \frac{2\pi}{\alpha_0}$).

Турбулентные вихри этого интервала приобретают энергию за счет ветрового сноса и градиента температуры. При очень малых значениях α имеем область, в которой первоначально возникает большинство неоднородностей. Спектральная плотность мощности $\Phi_n(\alpha)$ в этом интервале изменения размеров вихрей турбулентности зависит от крупномасштабных географических и метеорологических условий, а поэтому математической модели $\Phi_n(\alpha)$ этого интервала не существует. Кроме того, маловероятно, чтобы турбулентность была изотропной и однородной в таких масштабах.

2. Инерционный интервал ($L_0 > L > l_0$).

В этом интервале кинетическая энергия вихрей превышает энергию диссипации из-за вязкости и турбулентность имеет существенно изотропный характер. При значениях α , превышающих некоторое критическое значение α_0 , форма функции $\Phi_n(\alpha)$ определяется физическими законами, которые описывают распад больших турбулентных вихрей на более мелкие. Размер вихря $L_0 = \frac{2\pi}{\alpha_0}$ определяет внешний масштаб турбулентности. Типичные значения L_0 , приводимые в литературе, изменяются от 1 м до 100 м в зависимости от атмосферных условий и геометрии рассматриваемого эксперимента.

При α , больших α_0 , форма функции $\Phi_n(\alpha)$ может быть предсказана на основе хорошо установленных физических законов, описывающих турбулентное течение. А.Н. Колмогоровым показано, что в инерционном интервале изменения масштаба турбулентности функция $\Phi_n(\alpha)$ определяется выражением вида:

$$\Phi_n(\alpha) = 0,033C_n^2 \alpha^{-\frac{11}{3}}, \quad (5.62)$$

где C_n^2 – структурная постоянная показателя преломления; эта величина служит мерой интенсивности флуктуаций.

3. Вязкий интервал (l_0 больше размера вихря).

Когда α достигает другого критического значения α_m , форма функции $\Phi_n(\alpha)$ изменяется. Турбулентные вихри, меньшие определенного масштаба, рассеивают свою энергию в результате действия вязких сил. В этом интервале диссипация энергии

турбулентных вихрей из-за вязкости превосходит кинетическую энергию, что приводит к быстрому уменьшению спектральной плотности мощности $\Phi_n(\varkappa)$ при $\varkappa > \varkappa_m$. Масштаб $l_0 \approx \frac{2\pi}{\varkappa_m}$ называется внутренним масштабом турбулентности. Типичное значение масштаба l_0 вблизи поверхности Земли – несколько миллиметров. Учитывая быстрый спад $\Phi_n(\varkappa)$ при $\varkappa > \varkappa_m$, В.И. Татарский заменил формулу (5.62) формулой вида:

$$\Phi_n(\varkappa) = 0,033C_n^2 \varkappa^{-\frac{11}{3}} \exp\left(-\frac{\varkappa^2}{\varkappa_m^2}\right). \quad (5.63)$$

Это выражение можно считать удовлетворительным приближением, если величина \varkappa_m выбрана равной $\frac{5,92}{l_0}$ при $\varkappa > \varkappa_0$.

Из выражений (5.62) и (5.63) следует, что при $\varkappa \rightarrow 0$: $\Phi_n(0) \rightarrow \infty$. Однако, земная атмосфера конечна, а поэтому спектр не может быть произвольно большим при $\varkappa \rightarrow 0$. Чтобы устранить этот недостаток модели, спектр определяют приближенной формулой вида:

$$\Phi_n(\varkappa) \approx \frac{0,033C_n^2}{(\varkappa^2 + \varkappa_0^2)^{\frac{11}{6}}} \exp\left(-\frac{\varkappa^2}{\varkappa_m^2}\right). \quad (5.64)$$

Эта формула определяет так называемый спектр Кáрманa. Для такого спектра

$$\lim_{\varkappa \rightarrow 0} \Phi_n(\varkappa) = \frac{0,033C_n^2}{\varkappa_0^{\frac{11}{3}}}. \quad (5.65)$$

Заметим, однако, что форма спектра в области очень малых частот неизвестна, а, следовательно, формула (5.64) отображает лишь искусственный способ устранить полюс при $\varkappa = 0$. Кроме того, лишь в немногих экспериментах существенно влияние вихрей, более крупных, чем внешний масштаб турбулентности. Поэтому в действительности нет необходимости знать спектр в этой области.

На рис. 5.5 представлены графики функций $\Phi_n(\varkappa)$, определяемых формулами (5.63) и (5.64), где указаны частоты \varkappa_0 и \varkappa_m , в интервале между которыми выполняется закон $\varkappa^{-\frac{11}{3}}$.

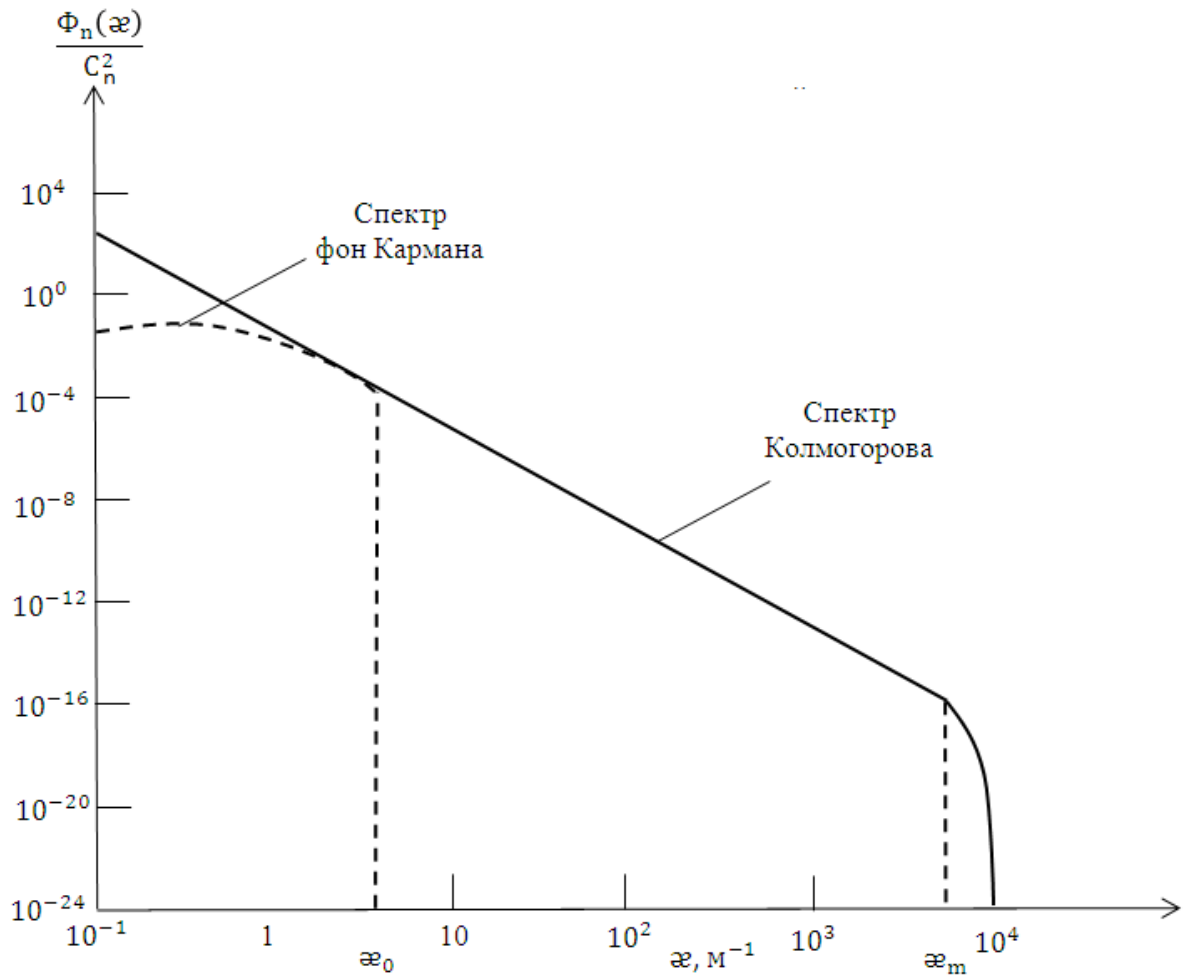


Рис. 5.5. Спектральная плотность мощности флуктуаций показателя преломления.

На характер формирования изображения оптической системой в условиях атмосферной турбулентности влияет структурная функция флуктуаций показателя преломления, которая определяется выражением вида:

$$D_n(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = \left\langle \left\{ [n_1(\bar{r}_1) - n_1(\bar{r}_2)]^2 \right\} \right\rangle. \quad (5.66)$$

Найдем соотношение между этой структурной функцией и спектральной плотностью мощности $\Phi_n(\kappa)$ для флуктуаций показателя преломления.

Если турбулентность изотропна и существует значение $K_n(0)$, то выражение (5.66) можно переписать в виде:

$$D_n(\bar{r}) = 2[K_n(0) - K_n(\bar{r})], \quad (5.67)$$

где $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$. Подставив выражение (5.51) в выражение (5.67) и учитывая свойство симметрии $\Phi_n(-\bar{x}) = \Phi_n(\bar{x})$ любой спектральной плотности мощности, находим, что

$$D_n(\bar{r}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int \int [1 - \exp(-i\bar{x} \cdot \bar{r})] \Phi_n(\bar{x}) d^3 \bar{x}.$$

Поскольку структурная функция – величина действительная и положительная, имеем

$$D_n(\bar{r}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int \int [1 - \cos(\bar{x} \cdot \bar{r})] \Phi_n(\bar{x}) d^3 \bar{x}. \quad (5.68)$$

При изотропном распределении величины n_1 в результате подстановки выражения (5.53) в выражение (5.67) получаем

$$D_n(r) = 8\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \bar{x}r}{\bar{x}r}\right) \Phi_n(\bar{x}) \bar{x}^2 d\bar{x}. \quad (5.69)$$

Если предположить, что частота \bar{x} очень мала, то формулу (5.69) приближенно можно представить в виде:

$$D(r) \approx \frac{4}{3} \pi r^2 \int_0^{\infty} \Phi_n(\bar{x}) \bar{x}^4 d\bar{x}. \quad (5.70)$$

Отсюда следует, что даже если величина $K_n(0)$ может стать неограниченно большой из-за зависимости $\Phi_n(\bar{x})$ вида \bar{x}^{-n} ($1 \leq n \leq 4$) при $\bar{x} \rightarrow 0$, функция $D(r)$ останется вполне определенной. Это указывает на отсутствие сильной чувствительности величины $D_n(r)$ к части спектра малых частот. Более того, даже если компоненты спектральной плотности мощности показателя преломления, соответствующие очень малым частотам, неоднородны и не изотропны, величина n_1 может обладать однородной и изотропной структурной функцией.

В инерционном интервале спектральная плотность мощности равна $0,033C_n^2 \bar{x}^{\frac{11}{3}}$. Подставив это выражение в формулу (5.69), получаем

$$\Phi_n(r) = 8\pi \cdot 0,033C_n^2 \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \bar{x}r}{\bar{x}r}\right) \bar{x}^{\frac{5}{3}} d\bar{x}. \quad (5.71)$$

Воспользуемся интегральным тождеством [21]

$$\int_0^{\infty} x^{\nu} \left(1 - \frac{\sin ax}{ax}\right) dx = -\frac{\Gamma(\nu) \sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}{a^{1+\nu}} \quad (-3 < \nu < -1), \quad (5.72)$$

где $\Gamma(\nu)$ – гамма-функция аргумента ν . Поскольку $\Gamma\left(-\frac{5}{3}\right) = 2,4110$, получаем, что структурная функция, соответствующая колмогоровскому спектру (5.62), определяется выражением:

$$D_n(r) = C_n^2 r^{\frac{2}{3}}. \quad (5.73)$$

Заметим, что структурная постоянная C_n^2 зависит как от местных атмосферных условий, так и от высоты над поверхностью Земли. Типичные ее значения вблизи поверхности Земли лежат в пределах от $10^{-13} \text{ м}^{\frac{2}{3}}$ при сильной турбулентности до $10^{-17} \text{ м}^{\frac{2}{3}}$ при слабой турбулентности, а в качестве «среднего» часто берут значение, равное $10^{-15} \text{ м}^{\frac{2}{3}}$.

Следует обратить внимание на то, что формула (5.73), определяющая структурную функцию, применима только при $l_0 < r < L_0$, поскольку выражение, определяющее спектральную плотность мощности и применённое при выводе этой формулы, пригодно только при $\alpha_0 < \alpha < \alpha_m$.

5.2.2. Распространение электромагнитной волны в неоднородной атмосфере

Рассмотрим монохроматическую электромагнитную волну, имеющую временную зависимость типа $\exp(-i\omega t)$, где $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda_0}$ (c – скорость света в вакууме), распространяющуюся в земной атмосфере. Полагая регулярную часть показателя преломления величиной почти постоянной в области значений, рассматриваемых в эксперименте по распространению волны, выражение (5.47) запишем в виде:

$$n(\vec{r}) = n_0 + n_1(\vec{r}). \quad (5.74)$$

Магнитная проницаемость μ оптических сред, как правило, равна единице; будем считать, что магнитная проницаемость атмосферы – величина постоянная, при этом диэлектрическая проницаемость ϵ будет изменяться в пространстве неоднородной атмосферы.

В среде, свободной от зарядов и токов уравнения Максвелла имеют вид:

$$\nabla(\varepsilon\bar{E})=0, \quad (5.75)$$

$$\nabla(\mu\bar{H})=0, \quad (5.76)$$

$$\nabla \times \bar{E} = i\omega \frac{\mu}{c} \bar{H}, \quad (5.77)$$

$$\nabla \times \bar{H} = -i\omega \frac{\varepsilon}{c} \bar{E}, \quad (5.78)$$

где \bar{E} – электрическое поле, \bar{H} – магнитное поле (\bar{E} и \bar{H} – комплексные векторы). Используя последовательно уравнения

$\nabla \times \bar{E} = i \frac{\mu}{c} \omega \bar{H}$, $\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = i\omega \frac{\mu}{c} \nabla \times \bar{H} = \omega^2 \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \bar{E}$ и (5.78), получаем

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = \omega^2 \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \bar{E}. \quad (5.79)$$

$$\text{Но } \nabla \times (\nabla \times \bar{E}) = -\nabla^2 \bar{E} + \nabla(\nabla \cdot \bar{E}). \quad (5.80)$$

Из уравнения (5.75) следует, что

$$\nabla(\varepsilon\bar{E}) = \varepsilon(\nabla \cdot \bar{E}) + \bar{E}\nabla\varepsilon = 0.$$

Отсюда

$$\nabla\bar{E} = -\bar{E} \frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} = -\bar{E}\nabla \ln \varepsilon.$$

Тогда, учитывая выражения (5.80) и (5.79), получаем

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \bar{E} + \nabla(\bar{E}\nabla \ln \varepsilon) = 0. \quad (5.81)$$

Локальная скорость распространения волны равна $\frac{c}{n}$.

Следовательно, $\mu\varepsilon = n^2$. При $\mu = 1$: $\ln \varepsilon = \ln n^2 = 2 \ln n$. При этом выражение (5.81) принимает вид:

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \frac{n^2}{c^2} \bar{E} + 2\nabla(\bar{E}\nabla \ln n) = 0. \quad (5.82)$$

Учитывая, что $\ln 1 = 0$, а величина n_1 мало отличается от единицы, крайним правым членом можно пренебречь. В результате получаем волновое уравнение вида:

$$\nabla^2 \bar{E} + \omega^2 \frac{n^2}{c^2} \bar{E} = 0. \quad (5.83)$$

Это уравнение отличается от обычного волнового уравнения только тем, что в рассматриваемом случае величина n^2 в

коэффициенте при втором члене является функцией радиус-вектора \bar{r} .

Поскольку все три компонента электрического поля удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению, векторное уравнение можно заменить скалярным:

$$\nabla^2 U + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} U = 0, \quad (5.84)$$

где U представляет собой проекцию вектора \bar{E} на оси координат: E_x , E_y и E_z .

Это уравнение решим методом малых возмущений. При $n = n_0$ компонент $U = U_0$. Поскольку $|n_1| \ll n_0$, поле U можно представить в виде суммы: $U = U_0 + U_1$, где U_1 учитывает влияние возмущений показателя преломления n_1 . В таком приближении волновое уравнение принимает вид:

$$\nabla^2 (U_0 + U_1) + \frac{\omega^2}{c^2} (n_0 + n_1)^2 (U_0 + U_1) = 0. \quad (5.85)$$

При $n = n_0$ (случай невозмущенной фазы):

$$\nabla^2 U_0 + k_0^2 U_0 = 0, \quad (5.86)$$

где $k_0^2 = \omega^2 \frac{n_0^2}{c^2}$. Сохраняя члены, которые имеют первый порядок относительно U_1 и n_1 , получаем

$$\nabla^2 U_1 + k_0^2 U_1 = -\frac{2k_0^2 n_1}{n_0} U_0. \quad (5.87)$$

С хорошим приближением в случае распространения оптического сигнала можно принять $n_0 = 1$.

Формула (5.87) определяет линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами в правой части. Решение уравнения находим как свертку функции Грина для свободного пространства (импульсный отклик) $\frac{1}{|\bar{r}|} \exp \frac{ik_0}{|\bar{r}|}$ с правой

частью уравнения:

$$U_1(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\exp(ik|r-r'|)}{|r-r'|} [2k_0^2 n_1(\bar{r}') U_0(\bar{r}')] d^3 \bar{r}', \quad (5.88)$$

где V – объем рассматриваемого пространства. Поскольку деформации волнового фронта в результате влияния атмосферной

турбулентности сравнительно невелики, то достаточно малы и угловые отклонения лучей, падающих на оптическую систему. Поэтому в подынтегральном выражении в формуле (5.88) может быть использовано так называемое приближение Френеля, что приводит к выражению:

$$U_1(\bar{r}) = \frac{k_0^2}{2\pi} \iiint_V \frac{\exp\left\{ik_0\left[(z-z') + \frac{|\bar{p}-\bar{p}'|^2}{2(z-z')}\right]\right\}}{z-z'} n_1(\bar{r}') U_0(\bar{r}') d^3\bar{r}', \quad (5.89)$$

где \bar{p} и \bar{p}' – поперечные смещения векторов \bar{r} и \bar{r}' относительно оси z .

Заметим, что решение (5.89) волнового уравнения (5.84) получено в результате представления полного поля суммой все уменьшающихся вкладов: $U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots$, ограничиваясь при этом членами первого порядка по возмущению U_1 . Такой метод решения называется борновским приближением.

Введем комплексную величину Ψ , равную натуральному логарифму поля U :

$$\Psi = \ln U. \quad (5.90)$$

Преобразование (5.90), называемое преобразованием Рытова, сразу же превращает волновое уравнение (5.84) в уравнение Риккати:

$$\nabla^2 \Psi(\bar{r}) + \nabla \Psi(\bar{r}) \cdot \nabla \Psi(\bar{r}) + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\bar{r}) = 0. \quad (5.91)$$

Уравнение Риккати можно решить, положив

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \dots \quad (5.92)$$

и опустив все члены, кроме Ψ_0 и Ψ_1 . Подобный метод решения приводит к такому же результату, который получен для U_1 , но применим при более широких условиях, нежели борновское приближение [22]. Решение в форме Ψ соответствует логарифмически-нормальному распределению флуктуаций амплитуды, а решение для U такому распределению не соответствует. Этим определяется преимущество преобразования Рытова, поскольку, как показывают результаты эксперимента, в области слабых флуктуаций флуктуации амплитуды подчиняются логарифмически-нормальному распределению.

Запишем преобразование (5.90) в виде:

$$U = \exp(\psi_0 + \psi_1), \quad (5.93)$$

$$U_0 = \exp \psi_0. \quad (5.94)$$

В таком виде величина U представлена как возмущенный вариант решения в свободном пространстве в мультипликативной, а не в аддитивной, форме. При этом имеем

$$\frac{U}{U_0} = 1 + \frac{U_1}{U_0} = \exp \Psi_1, \quad (5.95)$$

Отсюда $\Psi_1 = \ln \left(1 + \frac{U_1}{U_0} \right)$.

Представив правую часть этого выражения степенным рядом и ограничиваясь первым членом разложения, поскольку $|U_1| \ll |U_0|$, имеем

$$\Psi_1 \approx \frac{U_1}{U_0}. \quad (5.96)$$

Подставив выражение (5.89) в соотношение (5.96), получаем

$$\Psi_1(\bar{r}) = \frac{k_0^2}{2\pi U_0(\bar{r})} \iiint_V \frac{\exp \left\{ ik_0 \left[(z - z') + \frac{|\bar{p} - \bar{p}'|^2}{2(z - z')} \right] \right\}}{z - z'} n_1(\bar{r}') U_0(\bar{r}') d^3 \bar{r}' \quad (5.97)$$

Найдем теперь выражения для логарифма амплитуды и фазы волновых возмущений. Обозначим амплитуду и фазу фактической волны U через A и W , а амплитуду и фазу решения в свободном пространстве через A_0 и W_0 :

$$\left. \begin{aligned} U &= A \exp(iW), \\ U_0 &= A_0 \exp(iW_0). \end{aligned} \right\} \quad (5.98)$$

Тогда

$$\Psi_1 = \Psi - \Psi_0 = \ln \frac{A}{A_0} + i(W - W_0). \quad (5.99)$$

Здесь $\ln \frac{A}{A_0}$ – логарифмическая флуктуация амплитуды;

$W - W_0$ – флуктуация фазы.

Обозначив $\ln \frac{A}{A_0} = \chi$, а $W - W_0 = \delta_W$, получаем

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \chi \\ \delta_w \end{array} \right] = & \\ = & \left[\begin{array}{c} \text{Re} \\ \text{Im} \end{array} \left\{ \frac{k_0^2}{2\pi U_0(\bar{r})} \iiint_V \frac{\exp \left\{ ik_0 \left[(z-z') + \frac{|\bar{p}-\bar{p}'|^2}{2(z-z')} \right] \right\}}{z-z'} n_1(\bar{r}') U_0(\bar{r}') d^3\bar{r}' \right\} \right] \end{aligned} \quad (5.100)$$

Выражение (5.89) определяет полевое возмущение U_1 как суперпозицию огромного числа независимых вкладов различных частей турбулентной среды, а в выражении (5.100) логарифм флуктуаций амплитуды χ представлен в виде суперпозиции множества независимых вкладов. Тогда в соответствие с центральной предельной теоремой величина χ в такой форме должна подчиняться гауссовскому распределению, а это означает, что амплитуда A должна быть логарифмически-нормальной переменной.

Преобладающее большинство экспериментальных данных говорит в пользу логарифмически-нормального распределения амплитуды при малых флуктуациях и принято считать, что при малых флуктуациях такая статистическая модель достаточно точна и ею можно пользоваться в теоретических расчетах.

5.2.3. Логарифмически-нормальное распределение амплитуды

Поскольку логарифмически-нормальное распределение играет особо важную роль в теории распространения света через турбулентную среду, рассмотрим некоторые его свойства.

Пусть логарифм амплитуды χ есть гауссовская случайная переменная со средним значением $\langle \chi \rangle$ и стандартным отклонением σ_χ . Тогда

$$P_\chi(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\chi} \exp \left[-\frac{(\chi - \langle \chi \rangle)^2}{2\sigma_\chi^2} \right] \quad (5.101)$$

Плотность распределения вероятности амплитуды $A = A_0 \exp \chi$ равна

$$P_A(A) = P_\chi(\chi = \ln A) \left| \frac{d\chi}{dA} \right|,$$

где $\frac{d\chi}{dA} = \frac{1}{A}$. Учитывая выражение (5.101), получаем

$$P_A(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\chi A} \exp \left[-\frac{\left(\ln \frac{A}{A_0} - \langle \chi \rangle \right)^2}{2\sigma_\chi^2} \right], \quad (5.102)$$

где $A \geq 0$.

Аналогичным образом находим плотность распределения вероятности интенсивности $J = A^2$:

$$P_I(I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\chi 2J} \exp \left[-\frac{\left(\frac{1}{2} \ln \frac{J}{J_0} - \langle \chi \rangle \right)^2}{2\sigma_\chi^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_\chi J} \exp \left[-\frac{\left(\ln \frac{J}{J_0} - 2\langle \chi \rangle \right)^2}{8\sigma_\chi^2} \right], \quad (5.103)$$

где $J \geq 0$.

Выражения (5.102) и (5.103) могут служить примером плотности логарифмически-нормального распределения вероятности.

При рассматриваемых условиях эти плотности распределения вероятности имеют три независимых параметра $\langle \chi \rangle$, σ_χ и J_0 . Но если зафиксировать среднее значение переменной, подчиняющейся логарифмически-нормальному распределению, потребовав например, чтобы выполнялось равенство $\langle J \rangle = J_0$, то найдем, что в этом случае параметры $\langle \chi \rangle$ и σ_χ не могут выбираться независимо. Чтобы доказать это, положим

$$\langle J \rangle = J_0 \langle [\exp(2\chi)] \rangle = J_0. \quad (5.104)$$

Далее воспользуемся следующим соотношением, справедливым для любой действительной гауссовской случайной переменной и любой комплексной постоянной a :

$$\langle [\exp(az)] \rangle = \exp \left(a\langle z \rangle + \frac{1}{2} a^2 \sigma_z^2 \right) \quad (5.105)$$

Положив $z = \chi$ и $a = 2$, получаем

$$\langle J \rangle = J_0 \exp(2\langle \chi \rangle + 2\sigma_\chi^2) = J_0.$$

Отсюда следует, что

$$\langle \chi \rangle = -\sigma_\chi^2. \quad (5.106)$$

Таким образом, если в качестве независимого параметра выбрать J_0 , то $\langle \chi \rangle$ и σ_χ^2 не могут быть выбраны независимо.

Приведенное соотношение соответствует предположению, что волны распространяются без заметного затухания. Следовательно, плоская волна единичной интенсивности, входящая в атмосферу в точке $z = 0$, в соответствии с законом сохранения энергии должна иметь единичную среднюю интенсивность и тогда, когда она достигает точки $z = L$.

5.3 ОПФ при длительной экспозиции

Экспозиция – это, по сути дела, поверхностная плотность световой энергии, которая определяется интегралом вида:

$$H = \int_0^t E dt,$$

где E – освещенность, t – время.

При низкой освещенности в изображении слабых (малой яркости излучения) объектов для достижения требуемой величины экспозиции время интегрирования достаточно велико. Такую экспозицию принято называть длительной.

Турбулентность атмосферы приводит к тому, что деформация волнового фронта, излучаемого точечным объектом наблюдаемого предмета, быстро флуктуирует во времени. Чтобы исключить эффекты, связанные с усреднением во времени, необходимо фиксировать структуру волнового фронта или изображение объекта, образованного оптической системой, при предельно короткой экспозиции (от 0,01 с до 0,001 с и меньше в зависимости от эффективной скорости ветра). На рис. 5.6 показаны примеры фотографии звезды как при большой ($T \gg 0,01$ с), так и при малой ($T \ll 0,01$ с) экспозициях. Как и следовало ожидать, изображения, полученные при длинной и короткой экспозициях существенно различны.

Регистрация изображения слабых астрономических объектов требует времени экспонирования, измеряемого секундами, минутами и даже часами. Поэтому представляет интерес рассмотреть структуру изображения точки, полученного при длительной экспозиции. В основу анализа положено предположение о временной эргодичности, а именно о том, что усреднённая за большой промежуток времени

ОПФ, на которую оказывает влияние большое число независимых реализаций атмосферных неоднородностей, идентична ОПФ, усредненной по ансамблю.

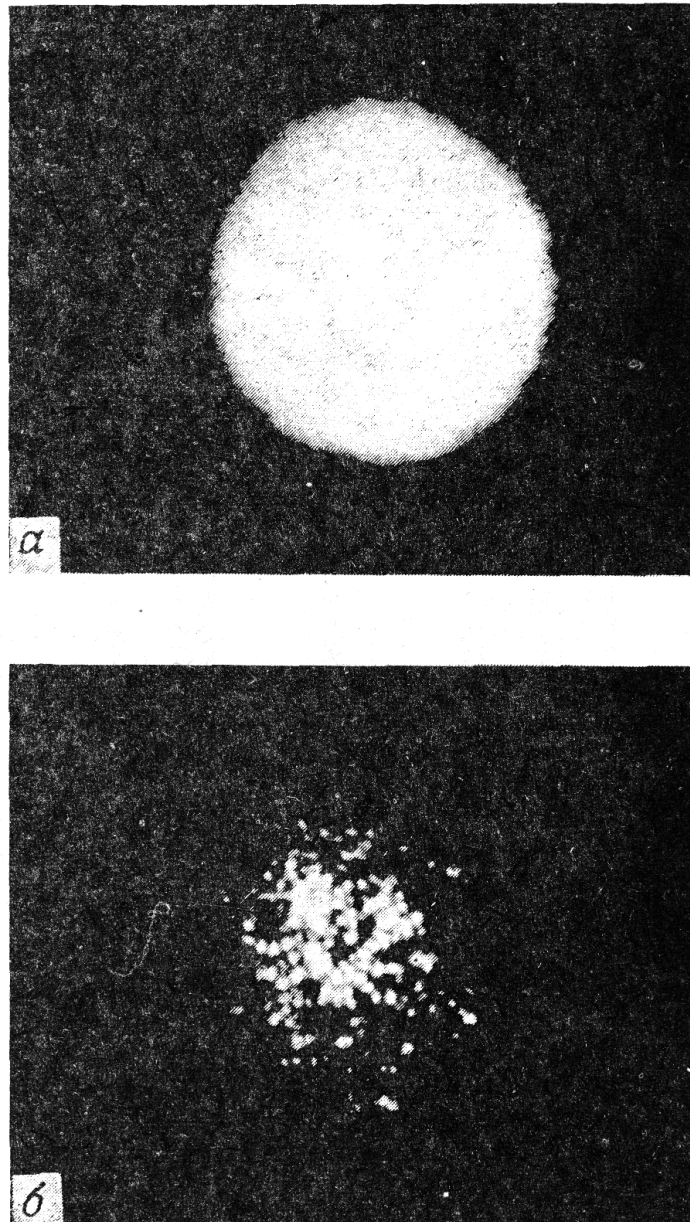


Рис. 5.6. Фотографии звезды Лямбда Кратера. а – длительная экспозиция; б – короткая экспозиция.

5.3.1. ОПФ при длительной экспозиции, выраженная через волновую структурную функцию

В том случае, когда точечный источник излучения (например, звезда) расположен на оптической оси оптической системы на бесконечно большом расстоянии от нее, в отсутствие атмосферной

турбулентности на входной зрачок системы падал бы параллельный пучок лучей, формирующий плоский волновой фронт. При наличии же атмосферной турбулентности излучение источника распространяется в неоднородной среде, в результате чего происходит деформация плоского волнового фронта. Распределение поля, падающего на входной зрачок оптической системы, можно представить в виде:

$$U(\mu', \nu') = \sqrt{J_0} \exp[\chi(\mu', \nu') + i\delta_w(\mu', \nu')], \quad (107)$$

где J_0 – интенсивность падающей плоской волны, χ, δ_w – гауссовские случайные переменные в решении, полученном на основании преобразования Рытова.

Рассуждая так же, как и при выводе формулы (5.3), мгновенное значение ОПФ оптической системы можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \tau(\omega'_x, \omega'_y) = & \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') F^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) \exp[(\chi_1 + \chi_2) + i(\delta_{w1} - \delta_{w2})] d\mu' d\nu'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') F^*(\mu', \nu') \exp(2\chi) d\mu' d\nu'} \end{aligned} \quad (5.108)$$

где $F(\mu', \nu')$ – комплексная функция зрачка оптической системы в отсутствие атмосферной турбулентности, причем

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \chi(\mu', \nu'), \\ \chi_2 &= \chi(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y), \\ \delta_{w1} &= \delta_w(\mu', \nu'), \\ \delta_{w2} &= \delta_w(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y). \end{aligned}$$

Заметим, что величины $\chi_1, \chi_2, \delta_{w1}$ и δ_{w2} – функции времени, но в представленном выражении для мгновенной ОПФ эта временная зависимость опущена.

При принятом условии эргодичности усредненная по ансамблю ОПФ в пределе неограниченно большого времени интегрирования будет совпадать с ОПФ при длительной экспозиции. Следовательно, для определения ОПФ при длительной экспозиции необходимо найти усредненные по ансамблю числитель и знаменатель выражения (5.108). В результате находим, что

$$\langle \tau(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \tau_0(\omega'_x, \omega'_y) \langle \tau_L(\omega'_x, \omega'_y) \rangle, \quad (5.109)$$

где $\tau_0(\omega'_x, \omega'_y)$ – ОПФ оптической системы в отсутствие турбулентности, а $\langle \tau_L(\omega'_x, \omega'_y) \rangle$ может рассматриваться как ОПФ при длительной экспозиции, которая определяется выражением

$$\langle \tau(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \frac{\langle K(\omega'_x, \omega'_y) \rangle}{\langle K(0, 0) \rangle}, \quad (5.110)$$

$$\text{где } \langle K(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \left\langle \left\{ \exp[(\chi_1 + \chi_2) + i(\delta_{w1} - \delta_{w2})] \right\} \right\rangle \quad (5.111)$$

Записав $\langle K \rangle$ в виде функции величин ω'_x и ω'_y , принимаем допущение, что возмущения волнового фронта подчиняются однородному распределению. Таким образом, чтобы найти атмосферную ОПФ, надо знать статистические свойства величин χ и δ_w .

Вообще говоря, нет оснований считать величины χ и δ_w независимыми случайными величинами, поскольку их флуктуации обусловлены флуктуациями показателя преломления. Рассмотрим среднее значение произведения вида:

$$\langle (\chi_1 + \chi_2)(\delta_{w1} - \delta_{w2}) \rangle = \langle \chi_1 \delta_{w1} \rangle - \langle \chi_2 \delta_{w2} \rangle - \langle \chi_1 \delta_{w2} \rangle + \langle \chi_2 \delta_{w1} \rangle \quad (5.112)$$

Если флуктуации показателя преломления подчиняются однородному распределению, то переменные χ и δ_w должны быть совместно однородными. В этом случае

$$\langle \chi_1 \delta_{w1} \rangle = \langle \chi_2 \delta_{w2} \rangle \quad (5.113)$$

Если при этом и n подчиняется изотропному распределению, то χ и δ_w будут совместно изотропными. Тогда

$$\langle \chi_1 \delta_{w2} \rangle = \langle \chi_2 \delta_{w1} \rangle \quad (5.114)$$

Подставив соотношения (5.113) и (5.114) в выражение (5.112), получаем

$$\langle (\chi_1 + \chi_2)(\delta_{w1} - \delta_{w2}) \rangle = 0 \quad (5.115)$$

Отсюда следует, что случайные переменные $(\chi_1 + \chi_2)$ и $(\delta_{w1} - \delta_{w2})$ не коррелированы.

Из гауссовского распределения величин χ и δ_w следует, что величины $(\chi_1 + \chi_2)$ и $(\delta_{w1} - \delta_{w2})$ также являются гауссовскими случайными переменными, а отсутствие корреляции между ними означает их статистическую независимость. Следовательно,

$$\langle K(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \langle \exp(\chi_1 + \chi_2) \rangle \langle \exp[i(\delta_{w1} - \delta_{w2})] \rangle \quad (5.116)$$

Соотношение (5.32), справедливое для гауссовского случайного фазового фильтра, справедливо и здесь. При этом

$$\langle \exp[i(\delta_{w1} - \delta_{w2})] \rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}D_{\delta}(r)\right],$$

где $r = \sqrt{\omega'_x{}^2 + \omega'_y{}^2}$, $D_{\delta}(r)$ – фазовая структурная функция:

$$D_{\delta}(r) = \langle (\delta_{w1} - \delta_{w2})^2 \rangle \quad (5.117)$$

Вычислим теперь среднее значение величины $\exp(\chi_1 + \chi_2)$. Для этого воспользуемся соотношением (5.105), которое справедливо для любой гауссовской случайной переменной z :

$$\langle \exp(az) \rangle = \exp\left(a\langle z \rangle + \frac{1}{2}a^2\sigma_z^2\right) \quad (5.118)$$

Положив $z = \chi_1 + \chi_2$ и $a = 1$, получаем

$$\langle \exp(\chi_1 + \chi_2) \rangle = \exp(2\langle \chi \rangle) \exp\left[\frac{1}{2}\langle (\chi_1 + \chi_2 - 2\langle \chi \rangle)^2 \rangle\right].$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle (\chi_1 + \chi_2 - 2\langle \chi \rangle)^2 \rangle &= \frac{1}{2}\langle [(\chi_1 - \langle \chi \rangle) + (\chi_2 - \langle \chi \rangle)]^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2}\langle (\chi_1 - \langle \chi \rangle)^2 \rangle + \frac{1}{2}\langle (\chi_2 - \langle \chi \rangle)^2 \rangle + \langle (\chi_1 - \langle \chi \rangle)(\chi_2 - \langle \chi \rangle) \rangle = \\ &= C_{\chi}(0) + C_{\chi}(r), \end{aligned} \quad (5.119)$$

где C_{χ} – автоковариация величины χ . Тогда

$$\langle \exp(\chi_1 + \chi_2) \rangle = \exp(2\langle \chi \rangle) \exp[C_{\chi}(0) + C_{\chi}(r)] \quad (5.120)$$

В соответствии с законом сохранения энергии средняя интенсивность неограниченной плоской волны, распространяющейся в хаотической неоднородной среде без потерь, должна оставаться постоянной. Тогда в соответствии с формулой (5.106) имеем

$$\langle \chi \rangle = -\sigma_{\chi}^2 = -C_{\chi}(0) \quad (5.121)$$

При этом формула (5.120) принимает вид:

$$\langle \exp(\chi_1 + \chi_2) \rangle = \exp[-C_{\chi}(0) + C_{\chi}(r)] = \exp\left[-\frac{1}{2}D_{\chi}(r)\right], \quad (5.122)$$

где D_{χ} – структурная функция логарифмической амплитуды:

$$D_{\chi} = \langle (\chi_1 - \chi_2)^2 \rangle \quad (5.123)$$

В результате имеем

$$\left. \begin{aligned} \langle K(r) \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2}D(r)\right], \\ \langle K(0) \rangle &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (5.124)$$

где так называемая волновая структурная функция $D = D_\chi + D_\delta$.

Таким образом, выражение, определяющее полную усредненную ОПФ, принимает вид:

$$\langle \tau(\omega'_x, \omega'_y) \rangle = \tau_0(\omega'_x, \omega'_y) \exp \left[-\frac{1}{2} D(\omega') \right], \quad (5.125)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_x'^2 + \omega_y'^2}$. Отсюда следует, что для определения атмосферной ОПФ при длительной экспозиции необходимо установить взаимосвязь волновой структурной функции $D(\omega')$ с параметрами турбулентной атмосферы.

5.3.2. Волновая структурная функция в ближней зоне

Учитывая сложность задачи определения взаимосвязи волновой структурной функции $D(\omega')$ с параметрами турбулентной атмосферы, в первом приближении решим ее при следующих весьма значительно упрощающих решение предположениях:

- изображаемый (наблюдаемый) объект находится на очень большом расстоянии от объектива, а его угловой размер несколько мал, что турбулентность атмосферы воздействует на изображение всех частей объекта одинаково, по крайней мере, в течение большого времени усреднения;

- на некотором конечном расстоянии z перед объективом, формирующим изображение, турбулентность атмосферы однородна и изотропна в этой области;

- турбулентность атмосферы в области ближнего поля такова, что эффектами амплитудного мерцания можно пренебречь.

Первое предположение определяет условие изопланатизма изображения и не является очень сильным ограничением при большом времени усреднения изображения. Второе предположение наименее корректно особенно при наблюдении через атмосферу по вертикали к Земле. Из третьего предположения следует, что турбулентность атмосферы достаточно слабо деформирует плоский волновой фронт.

На рис. 5.7 показана схема, положенная в основу вывода формулы структурной функции фазы. Заметим, что первое предположение позволяет рассматривать только одиночный точечный источник на оптической оси, создающий плоский волновой фронт (плоскую волну) на входе в область турбулентности атмосферы.

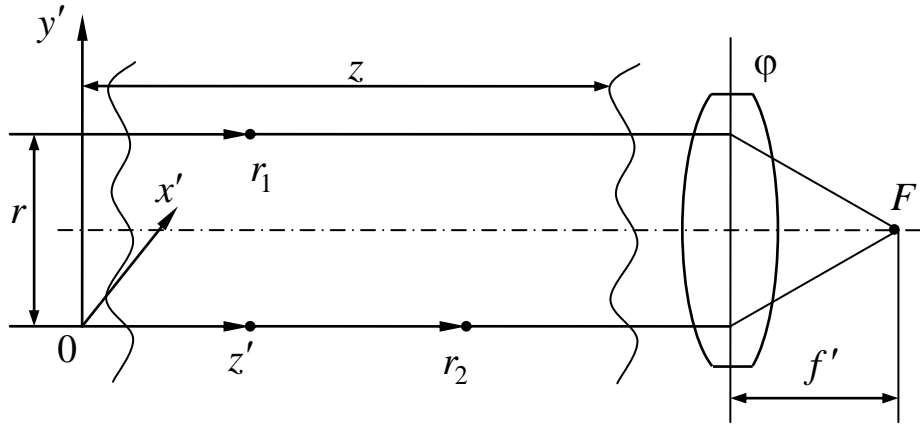


Рис. 5.7. Схема, положенная в основу вывода формулы структурной функции фазы

Фазу волнового фронта в двух точках в направлении двух квазипараллельных лучей можно записать в виде:

$$\delta_{w1} = \bar{k} \int_0^z [n_0 + n_1(r_1)] dz', \quad (5.126)$$

$$\delta_{w2} = \bar{k} \int_0^z [n_0 + n_1(r_2)] dz', \quad (5.127)$$

где $\bar{k} = \langle k \rangle = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}$; $\bar{\lambda} = \langle \lambda \rangle$. В соответствии с третьим предположением флуктуации амплитуды пренебрежительно малы, так что $\chi_1 = \chi_2$ и $D_\chi(r) = 0$. Поскольку структурная функция логарифмической амплитуды равна нулю, волновая структурная функция равна фазовой структурной функции, при этом усредненная атмосферная ОПФ определяется выражением

$$\langle \tau_L(\omega') \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} D_\delta(\omega') \right] \quad (5.128)$$

Введем систему координат, за начало которой примем точку, в которой нижний луч входит в область турбулентной атмосферы, как показано на рис. 5.7. Тогда

$$n(r_1) = n(z', r), \quad (5.129)$$

$$n(r_2) = n(z', 0) \quad (5.130)$$

Фазовую структурную функцию определим, если найдем среднее значение:

$$\langle [(\delta_{w1} - \delta_{w2})^2] \rangle = \bar{k}^2 \left\langle \left\{ \int_0^z dz' [n_1(z', r) - n_1(z', 0)] \right\}^2 \right\rangle \quad (5.131)$$

Правую часть этого выражения можно заменить двойным интегралом и представить в виде:

$$\begin{aligned} \overline{(\delta_{w1} - \delta_{w2})^2} &= \bar{k}^2 \left\langle \left\{ \int_0^z \int_0^z [n_1(z', r) - n_1(z', 0)][n_1(z'', r) - n_1(z'', 0)] dz' dz'' \right\} \right\rangle = \\ &= \bar{k}^2 \int_0^z dz' \int_0^z \left[\overline{n_1(z', r)n_1(z'', r)} + \overline{n_1(z', 0)n_1(z'', 0)} - \right. \\ &\quad \left. - \overline{n_1(z', r)n_1(z'', 0)} - \overline{n_1(z', 0)n_1(z'', r)} \right] dz'' \end{aligned} \quad (5.132)$$

Выразив средние значения через ковариационные функции, получаем:

$$D_\delta(r) = \bar{k}^2 \int_0^z dz' \int_0^z \left[2C_n(z' - z'') - 2C_n\left(\sqrt{(z' - z'')^2 + r^2}\right) \right] dz'' \quad (5.133)$$

Разность ковариационных функций может быть выражена через разность структурных функций:

$$\begin{aligned} 2C_n(z' - z'') - 2C_n\left(\sqrt{(z' - z'')^2 + r^2}\right) &= \\ &= \left[2C_n(0) - 2C_n\left(\sqrt{(z' - z'')^2 + r^2}\right) \right] - \left[2C_n(0) - 2C_n(z' - z'') \right] = \\ &= D_n\left(\sqrt{(z' - z'')^2 + r^2}\right) - D_n(z' - z'') \end{aligned} \quad (5.134)$$

При этом выражение (5.133) принимает вид:

$$D_\delta(r) = \bar{k}^2 \int_0^z dz' \int_0^z \left[D_n\left(\sqrt{(z' - z'')^2 + r^2}\right) - D_n(z' - z'') \right] dz'' \quad (5.135)$$

Заметим, что подынтегральное выражение представляет собой четную функцию разности $z' - z''$. Пусть g – любая четная функция своего аргумента. Тогда

$$D_\delta(r) = \bar{k}^2 \int_0^z dz' \int_0^z g(z' - z'') dz'' \quad (5.136)$$

Обозначим $z' - z'' = \Delta z$. Здесь $0 \leq z' \leq z$. При $z' = 0$: $\Delta z = -z''$, а при $z' = z$: $\Delta z = z - z''$. Полагая при этом $\Delta z = \Delta z(z')$, получаем

$$D_{\delta}(r) = \bar{k}^2 \int_0^z dz'' \int_{-z''}^{z-z''} g(\Delta z) d(\Delta z) \quad (5.137)$$

В соответствии с принятым обозначением имеем

$$z'' = z' - \Delta z \quad (5.138)$$

Соотношение (5.138) при $z' = 0$ и при $z' = z$ определяет границы области интегрирования для обоих интегралов, показанной на рис. 5.8.

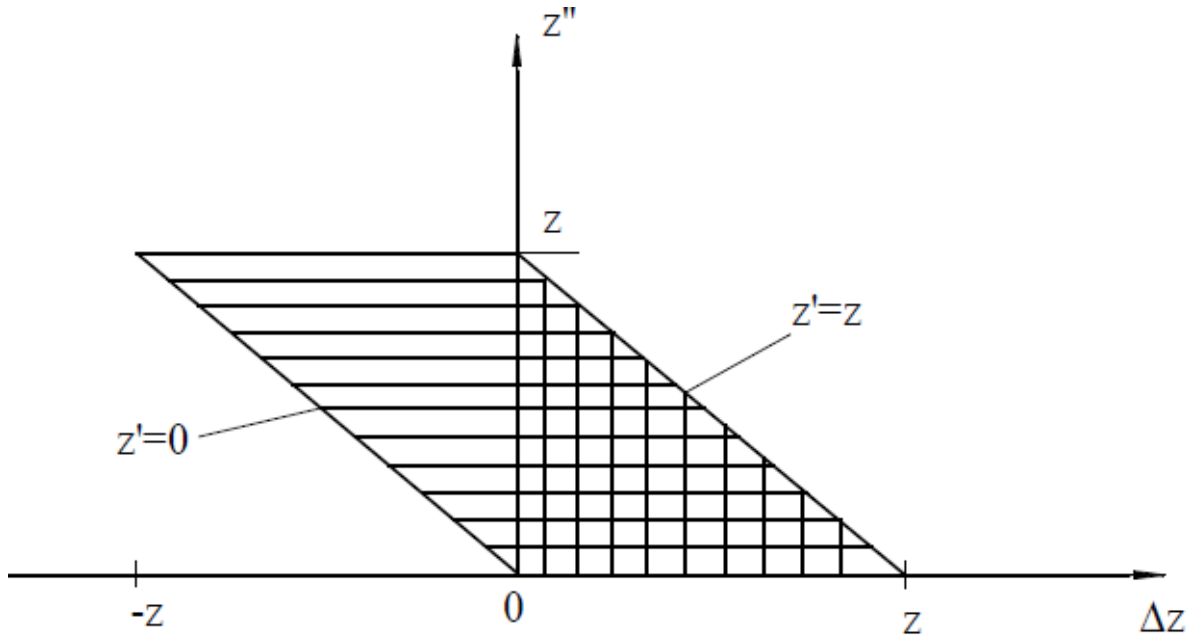


Рис. 5.8. Область интегрирования

Поскольку функция g зависит только от Δz и является четной функцией величины Δz , то интегрирование в выражении (5.137) можно выполнить по области, ограниченной осями координат и линией $z'' = z - \Delta z$ (по области с двойной штриховкой), удвоив полученный результат. При этом

$$\begin{aligned} \int_0^z dz' \int_0^z g(z' - z'') dz'' &= 2 \int_0^z g(\Delta z) d(\Delta z) \int_0^{z-\Delta z} dz'' = \\ &= 2 \int_0^z (z - \Delta z) g(\Delta z) d(\Delta z) \end{aligned} \quad (5.139)$$

Подставив это соотношение в выражение (5.136), получаем формулу, определяющую фазовую структурную функцию, в виде

$$D_{\delta}(r) = 2\bar{k}^2 \int_0^z (z - \Delta z) [D_n(\sqrt{(\Delta z)^2 + r^2}) - D_n(\Delta z)] d(\Delta z) \quad (5.140)$$

Согласно широко признанной теории Колмогорова, структурная функция флуктуаций показателя преломления определяется соотношением:

$$D_n(r) = C_n^2 r^{\frac{2}{3}} \text{ при } l_0 < r < L_0 \quad (5.141)$$

Подставив это соотношение в выражение (5.140), получаем

$$D_\delta(r) = 2\bar{k}^2 C_n^2 \int_0^z (z - \Delta z) \left\{ [(\Delta z)^2 + r^2]^{\frac{1}{3}} - (\Delta z)^{\frac{2}{3}} \right\} d(\Delta z) \quad (5.142)$$

Заметим, что вследствие ограничений применения формулы (5.141) выражение (5.142) строго применимо только при $\Delta z < L_0$, где L_0 – внешний масштаб турбулентности. Полагая величину Δz достаточно большой, преобразуем выражение в фигурных скобках к виду:

$$\begin{aligned} [(\Delta z)^2 + r^2]^{\frac{1}{3}} - (\Delta z)^{\frac{2}{3}} &= (\Delta z)^{\frac{2}{3}} \left[1 + \frac{r^2}{(\Delta z)^2} \right]^{\frac{1}{3}} - (\Delta z)^{\frac{2}{3}} \approx \\ &\approx (\Delta z)^{\frac{2}{3}} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r}{\Delta z} \right)^2 - 1 \right] = \frac{r^2}{3(\Delta z)^{\frac{4}{3}}} \end{aligned} \quad (5.143)$$

Отсюда следует, что если расстояние r между точками намного меньше L_0 (как обычно почти всегда и бывает, поскольку максимальное расстояние, представляющее интерес, равно диаметру входного зрачка принимающей оптики), то подынтегральное выражение при больших величинах Δz становится величиной малой и точная форма фазовой структурной функции при $\Delta z > L_0$ становится несущественной. Таким образом, при Δz , больших L_0 , и при r , меньших L_0 , подынтегральное выражение настолько мало, что его вкладом в интеграл можно пренебречь и выражение (5.142) может рассматриваться как точное при всех значениях длин пути, при которых не нарушаются принятые более существенные предположения.

Подынтегральное выражение можно рассматривать как разность двух выражений, равных

$$z \left\{ [(\Delta z)^2 + r^2]^{\frac{1}{3}} - (\Delta z)^{\frac{2}{3}} \right\} \text{ и } (\Delta z) \left\{ [(\Delta z)^2 + r^2]^{\frac{1}{3}} - (\Delta z)^{\frac{2}{3}} \right\}.$$

При $\Delta z = 0$ первое подынтегральное выражение равно $zr^{2/3}$, а второе обращается в нуль. С другой стороны, при $r \ll \Delta z$ выражение

$$[(\Delta z)^2 + r^2]^{1/3} - (\Delta z)^{2/3} \rightarrow 0,$$

при этом первое интегральное выражение (второе тем более) падает почти до нуля задолго до того, как Δz достигнет величины z , как показано на рис. 5.9.

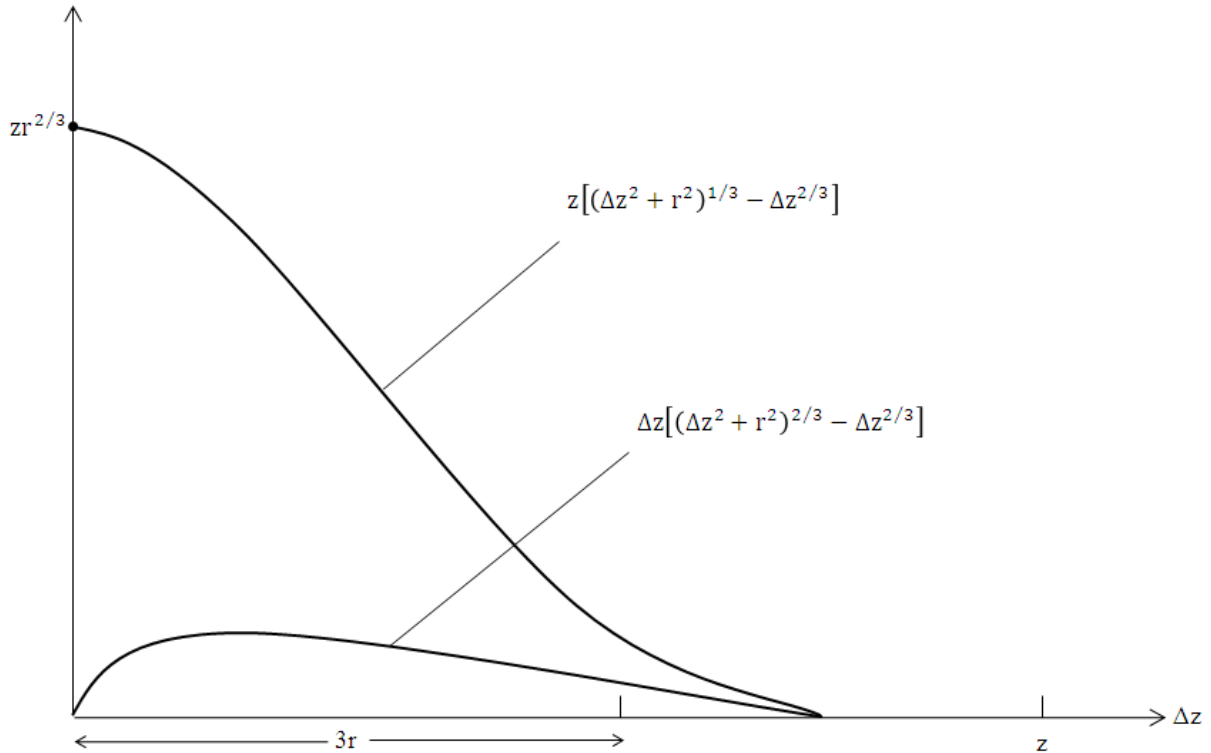


Рис. 5.9. Два члена подынтегрального выражения (5.142)

Отсюда следует, что без большой погрешности для результата верхний предел можно принять равным бесконечности. Кроме того, как следует из рисунка, первое интегрирование выполняется на значительно большей площади, ограниченной его подынтегральным выражением, чем второе. Вследствие этого будем полностью пренебрегать вторым интегралом. В результате получаем выражение, определяющее фазовую структурную функцию, такого вида:

$$D_{\delta}(r) \approx 2\bar{k}^2 C_n^2 z \int_0^{\infty} \left\{ [(\Delta z)^2 + r^2]^{1/3} - (\Delta z)^{2/3} \right\} d(\Delta z) \quad (5.144)$$

Произведя замену переменных $\Delta z = ru$, $d\Delta z = rdu$, получаем

$$D_{\delta}(r) = \bar{k}^2 C_n^2 z r^{\frac{5}{3}} \int_0^{\infty} \left\{ (u^2 + 1)^{\frac{1}{3}} - u^{\frac{2}{3}} \right\} du \quad (5.145)$$

Этот интеграл, взятый численным методом, равен 2,91. При этом

$$D_{\delta}(r) = 2,91 \bar{k}^2 C_n^2 z r^{\frac{5}{3}} \quad (5.146)$$

Пусть для определённости нижний луч на рис. 5.7 совпадает с оптической осью объектива. В этом случае

$$\mu' = \bar{k} \frac{m}{f'}, \quad \nu' = \bar{k} \frac{M}{f'},$$

где f' – фокусное расстояние объектива. Тогда

$$r = \sqrt{m^2 + M^2} = \frac{f'}{\bar{k}} \sqrt{\mu'^2 + \nu'^2} = \frac{f'}{\bar{k}} \omega'.$$

Но $\omega' = 2\pi N'$, где N' – пространственная частота.

$$\text{Тогда } r = \bar{\lambda} f' N' \quad (5.147)$$

Подставив это соотношение в формулу (5.146), получаем

$$D_{\delta}(N') = 2,91 \bar{k}^2 C_n^2 z (\bar{\lambda} f' N')^{\frac{5}{3}} \quad (5.148)$$

Полученное выражение, определяющее фазовую структурную функцию, позволяет выражение (5.128), определяющее ОПФ турбулентной атмосферы, представить в виде:

$$\langle \tau(\nu') \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} 2,91 \bar{k}^2 C_n^2 z (\bar{\lambda} f' N')^{\frac{5}{3}} \right] = \exp \left(-57,4 C_n^2 \frac{z f'^{\frac{5}{3}}}{\bar{\lambda}^{\frac{1}{3}}} N'^{\frac{5}{3}} \right) \quad (5.149)$$

Выражению (5.149) можно придать более удобную форму, не зависящую от параметров оптической системы, если выразить ОПФ через угловую пространственную частоту Ω' , измеряемую в герцах на радиан дуги, а не в герцах на метр. Учитывая, что $\Omega' = f' N'$, получаем

$$\langle \tau_L(\Omega') \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} 2,91 \bar{k}^2 C_n^2 z (\bar{\lambda} \Omega')^{\frac{5}{3}} \right] = \exp \left(-57,4 \frac{C_n^2 z}{\bar{\lambda}^{\frac{1}{3}}} \Omega'^{\frac{5}{3}} \right) \quad (5.150)$$

Чтобы найти полную ОПФ системы объектив+турбулентная атмосфера, выражение (5.149) следует умножить на выражение, определяющее ОПФ оптической системы объектива при отсутствии атмосферной турбулентности.

Заметим, что угловая пространственная частота, при которой $\langle \tau_L(\Omega') \rangle$ падает до значения $\frac{1}{e}$, определяется выражением

$$\Omega'_1 = \frac{1}{\bar{\lambda}^5} \frac{1}{(57,4 C_n^2 z)^{\frac{3}{5}}} \quad (5.151)$$

Таким образом, ширина полосы ОПФ, определяемая выражением (5.151), пропорциональна длине волны лишь в степени $\frac{1}{5}$, т.е. очень слабо зависит от длины волны.

Графики ОПФ турбулентной атмосферы при длительной экспозиции показаны на рис. 5.10 сплошными линиями при $\bar{\lambda} = 0,5$ мкм, $z = 100$ м и при разных значениях C_n^2 . Штриховыми линиями показаны ОПФ оптической системы при круглой форме входного зрачка диаметром 5 см, 50 см и 5 м при дифракционно ограниченном качестве образованного изображения.

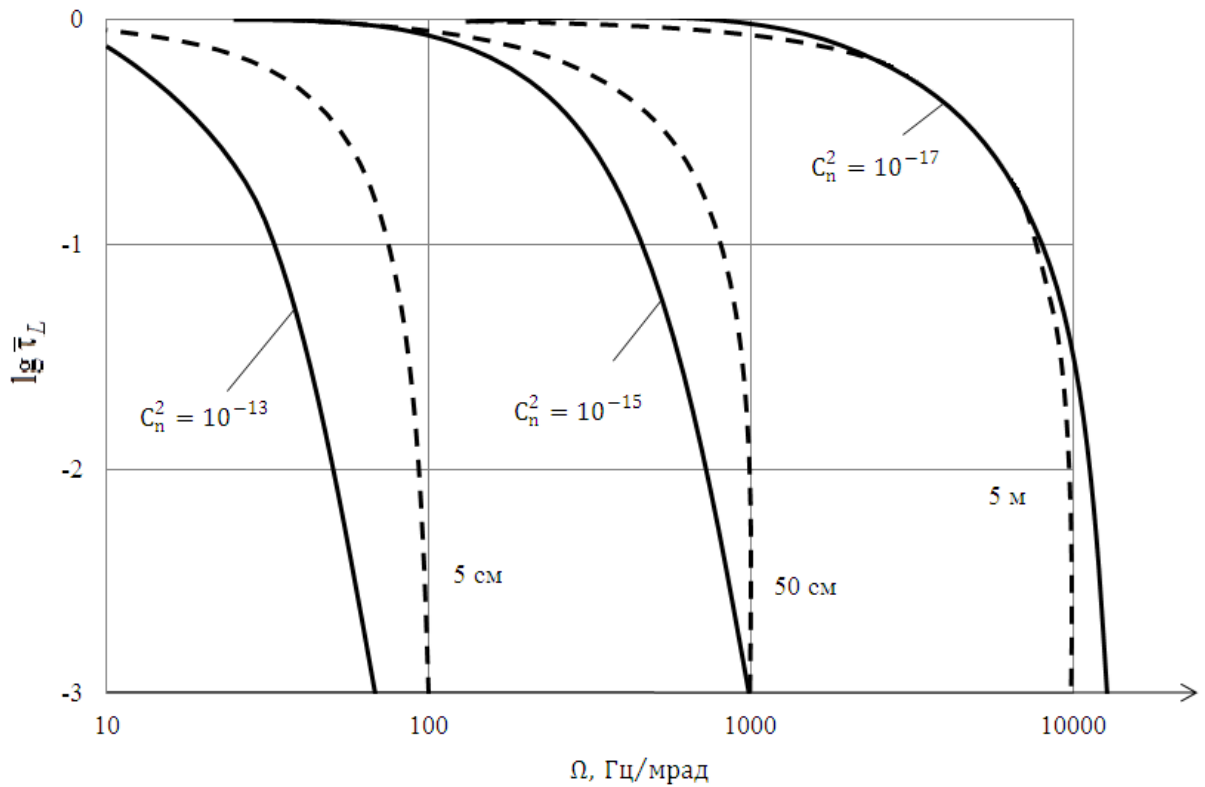


Рис. 5.10. Атмосферная ОПФ ($\bar{\lambda} = 0,5$ мкм, $z = 100$ м) при длительном экспонировании. Штриховые линии – кривые дифракционно-ограниченной ОПФ круглых апертур

Сравнив сплошные и штриховые кривые, можно получить некоторое представление о влиянии турбулентной атмосферы на

качество образованного изображения. В идеальном случае, т.е. при отсутствии атмосферной турбулентности, структурная функция флуктуаций показателя преломления $C_n = 0$. При этом $\langle \tau_L(\Omega') \rangle \equiv 1$.

5.3.3. Обобщение теории на случай большого пути распространения

Выражение (5.150), определяющее ОПФ при длительной экспозиции, получено при весьма существенном предположении, согласно которому эффектами амплитудного мерцания можно пренебречь. Длины путей, при которых это предположение строго выполняются, столь малы, что оказываются вне пределов практического применения. Обобщим полученные результаты на случай больших путей распространения.

Рассмотрим возмущения показателя преломления в конечной области, лежащей между $z' = 0$ и $z' = z$ на пути распространения, как показано на рис. 5.11. Внутри этой области флуктуации $n_1(x', y', z')$

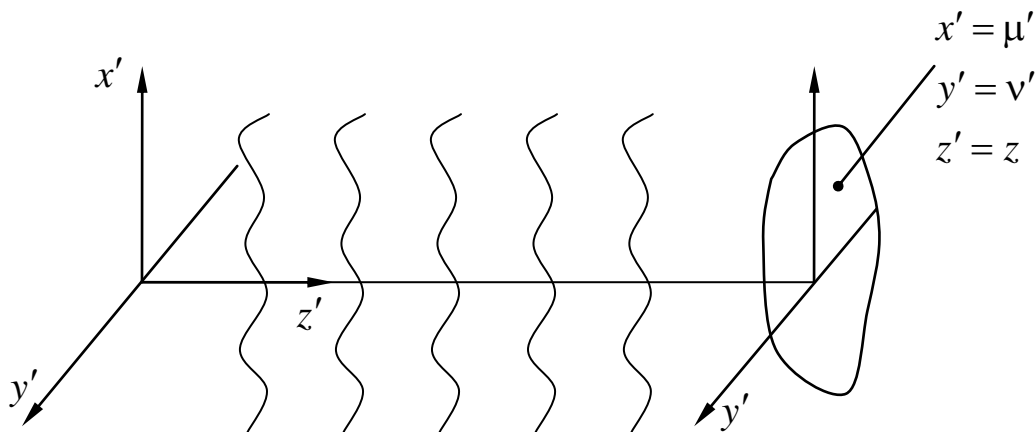


Рис.5.11. Распространение волны в неоднородной среде

предполагаются однородными. Плоская волна входит в область флуктуаций показателя преломления при $z' = 0$, а входной зрачок оптической системы, формирующей изображение предмета, расположен в плоскости $z' = z$. Исходным для анализа является выражение (5.100), которое связывает логарифмическую амплитуду χ и фазу δ_w в плоскости входного зрачка объектива с флуктуациями показателя преломления n_1 неоднородной среды. В случае плоской волны единичной интенсивности, падающей на плоскость $z' = 0$, невозмущенное решение волнового уравнения внутри среды имеет вид:

$$U_0(\bar{r}') = \exp(i\bar{k}z') \quad (5.152)$$

В результате подстановки этого соотношения в выражение (5.100), получаем:

$$\chi(\mu', \nu'; z) = \int_0^z q(\mu', \nu'; z, z') dz', \quad (5.153)$$

$$\delta_w(\mu', \nu'; z) = \int_0^z p(\mu', \nu'; z, z') dz', \quad (5.154)$$

где

$$q(\mu', \nu'; z, z') = \frac{\bar{k}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_1(x', y', z') \frac{\cos \left\{ \frac{\bar{k}[(\mu' - x')^2 + (\nu' - y')^2]}{2(z - z')} \right\}}{z - z'} dx' dy' \quad (5.155)$$

$$p(\mu', \nu'; z, z') = \frac{\bar{k}^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n_1(x', y', z') \frac{\sin \left\{ \frac{\bar{k}[(\mu' - x')^2 + (\nu' - y')^2]}{2(z - z')} \right\}}{z - z'} dx' dy' \quad (5.156)$$

Заметим, что величины q и p представлены в виде двумерных интегралов свёртки в плоскости (x', y') . При этом интегрирование по z' в формулах (5.153) и (5.154) сводится к сложению результатов этих сверток для всех расстояний z' вдоль пути распространения. Во всех случаях длина пути z должна рассматриваться как фиксированная постоянная.

Определим соответствующие двумерные передаточные функции выражением вида:

$$\left. \begin{aligned} H_\chi(\alpha_x, \alpha_y; z, z') \\ H_\delta(\alpha_x, \alpha_y; z, z') \end{aligned} \right\} = \quad (5.157)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left. \begin{aligned} h_\chi(\mu', \nu'; z, z') \\ h_\delta(\mu', \nu'; z, z') \end{aligned} \right\} \exp[i(\alpha_x \mu' + \alpha_y \nu')] d\mu' d\nu'$$

где импульсные отклики

$$h_\chi(\mu', \nu'; z, z') = \frac{\bar{k}^2}{2\pi} \frac{\cos \left\{ \frac{\bar{k}(\mu'^2 + \nu'^2)}{2(z - z')} \right\}}{z - z'} \quad (5.158)$$

$$h_\delta(\mu', \nu'; z, z') = \frac{\bar{k}^2}{2\pi} \frac{\sin \left\{ \frac{\bar{k}(\mu'^2 + \nu'^2)}{2(z - z')} \right\}}{z - z'}$$

Используя преобразование Фурье, находим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp[i\alpha(\mu'^2 + \nu'^2)] \exp[i(\mathfrak{a}_x \mu' + \mathfrak{a}_y \nu')] d\mu' d\nu' = \\ & = \frac{4\pi}{\alpha} i \exp\left(-i \frac{\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2}{4\alpha}\right) \end{aligned} \quad (5.159)$$

Подставив $\alpha = \frac{\bar{k}}{2(z-z')}$, получаем

$$H_\chi(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z, z') = \bar{k} \sin\left[\frac{(\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2)}{2\bar{k}}(z-z')\right] \quad (5.160)$$

$$H_\delta(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z, z') = \bar{k} \cos\left[\frac{(\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2)}{2\bar{k}}(z-z')\right] \quad (5.161)$$

При этом двумерные спектры мощности q и p связаны с двумерным спектром мощности F_n флуктуаций показателя преломления соотношениями вида:

$$\begin{aligned} F_q(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z, z') &= |H_\chi(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z, z')|^2 F_n(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z') = \\ &= \bar{k}^2 \sin^2\left[\frac{\mathfrak{a}_t^2}{2\bar{k}}(z-z')\right] F_n(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z'), \end{aligned} \quad (5.162)$$

$$\begin{aligned} F_p(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z, z') &= |H_\delta(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z, z')|^2 F_n(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z') = \\ &= \bar{k}^2 \cos^2\left[\frac{\mathfrak{a}_t^2}{2\bar{k}}(z-z')\right] F_n(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z'), \end{aligned} \quad (5.163)$$

где $\mathfrak{a}_t = \sqrt{\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2}$.

Соотношения (5.160) и (5.161) определяют вклад определенного турбулентного слоя, локализованного в плоскости z' , во флуктуации логарифмической амплитуды и фазы.

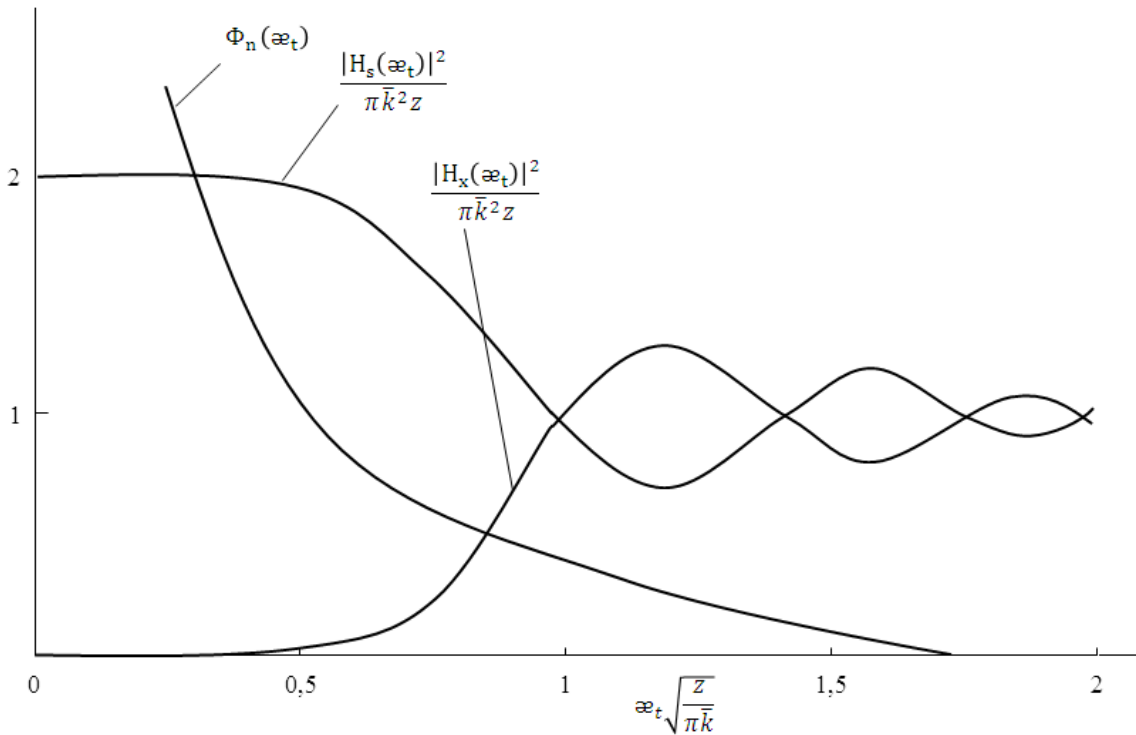


Рис. 5.12. Фильтрующие функции для логарифмической амплитуды и фазы в случае расширенной турбулентной области (зависимость от волнового числа)

На рис. 5.12 представлены графики зависимости $|H_z|^2$ и $|H_\delta|^2$ от нормированного расстояния $\frac{\varpi_t^2}{2k}(z - z')$ между турбулентным слоем в плоскости z' и входным зрачком объектива в плоскости z . Эти кривые показывают как флуктуации n_1 , соответствующие величине ϖ_t и происходящие в плоскости z' , преобразуются во флуктуации логарифмических амплитуд и фазы волны, падающей на входной зрачок объектива, формирующего изображение предмета. Важно решить задачу сложения вкладов всех турбулентных слоёв при всех возможных расстояниях $z - z'$.

Рассматривая два случайных процесса χ и q (или δ_w и p), связанных между собой формулой (5.153) (или (5.154)), можно показать, что автокорреляционные функции величин χ и δ_w имеют вид:

$$K_\chi(\omega'_x, \omega'_y; z) = \int_0^z \int K_q(\omega'_x, \omega'_y; z, z', z'') dz' dz'', \quad (5.164)$$

$$K_{\delta}(\omega'_x, \omega'_y; z) = \int_0^z \int K_p(\omega'_x, \omega'_y; z, z', z'') dz' dz'', \quad (5.165)$$

где K_q и K_p – взаимные корреляционные функции величин $q(\mu', \nu'; z, z')$ и $q(\mu', \nu'; z, z'')$ в первом случае и величин $p(\mu', \nu'; z, z')$ и $p(\mu', \nu'; z, z'')$ во втором случае.

Выполнив преобразование Фурье обеих частей соотношений (5.164) и (5.165) по переменным ω'_x и ω'_y , получаем

$$F_{\chi}(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z) = \int_0^z \int \tilde{F}_q(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z, z', z'') dz' dz'', \quad (5.166)$$

$$F_{\delta}(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z) = \int_0^z \int \tilde{F}_p(\mathfrak{a}_x, \mathfrak{a}_y; z, z', z'') dz' dz'',$$

где \tilde{F}_q и \tilde{F}_p – взаимные спектральные плотности величин $q(\mu', \nu'; z, z')$ и $q(\mu', \nu'; z, z'')$ с одной стороны, и величин $p(\mu', \nu'; z, z')$ и $p(\mu', \nu'; z, z'')$ – с другой. В этом случае двумерные спектры мощности q и p связаны с двумерным спектром мощности F_n флуктуаций показателя преломления соотношениями вида:

$$F_{\chi}(\mathfrak{a}_i; z) = \int_0^z \int \bar{k}^2 \sin \left[\frac{\mathfrak{a}_i^2}{2k} (z - z') \right] \sin \left[\frac{\mathfrak{a}_i^2}{2k} (z - z'') \right] \cdot \tilde{F}_n(\mathfrak{a}_i; z' - z'') dz' dz'', \quad (5.167)$$

$$F_{\delta}(\mathfrak{a}_i; z) = \int_0^z \int \bar{k}^2 \cos \left[\frac{\mathfrak{a}_i^2}{2k} (z - z') \right] \cos \left[\frac{\mathfrak{a}_i^2}{2k} (z - z'') \right] \cdot \tilde{F}_n(\mathfrak{a}_i; z' - z'') dz' dz'', \quad (5.168)$$

где \tilde{F}_n – взаимная спектральная плотность флуктуаций показателя преломления в плоскостях z' и z'' , при этом для простоты предполагалась изотропность в направлении, перпендикулярном направлению распространения волнового фронта. Можно показать, что в рассматриваемом случае допустимы следующие приближенные равенства:

$$\cos \frac{\mathfrak{a}_i^2 \xi}{2k} \approx 1, \quad \sin \frac{\mathfrak{a}_i^2 \xi}{2k} \approx \frac{\mathfrak{a}_i^2 \xi}{2k}, \quad \sin \frac{\mathfrak{a}_i^2 (2z - \xi)}{2k} \approx \sin \frac{\mathfrak{a}_i^2 z}{k},$$

где $\xi = z' - z''$.

При этих упрощениях имеем

$$\left. \begin{aligned} F_\chi(\mathbf{x}_t; z) \\ F_\delta(\mathbf{x}_t; z) \end{aligned} \right\} = \left[\bar{k}^2 z \mp \frac{\bar{k}^3}{\mathbf{x}_t^2} \sin \frac{\mathbf{x}_t^2 z}{\bar{k}} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_n(\mathbf{x}_t; \xi) d\xi \quad (5.169)$$

И, наконец, можно показать, что двумерная взаимная спектральная плотность $\tilde{F}_n(\mathbf{x}_t; \xi)$ связана с трёхмерной спектральной плотностью мощности соотношением

$$\Phi_n(\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y, \mathbf{x}_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}_n(\mathbf{x}_t; \xi) \cos(\mathbf{x}_z \xi) d\xi \quad (5.170)$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^{\infty} \tilde{F}_n(\mathbf{x}_t; \xi) d\xi = \pi \Phi_n(\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y, 0) \quad (5.171)$$

В случае изотропной турбулентности

$$\Phi_n(\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y, \mathbf{x}_z) = \Phi_n\left(\sqrt{\mathbf{x}_x^2 + \mathbf{x}_y^2 + \mathbf{x}_z^2}\right).$$

Следовательно, $\Phi_n(\mathbf{x}_x, \mathbf{x}_y, 0) = \Phi_n(\mathbf{x}_t)$.

Таким образом, окончательные выражения, определяющие спектры мощности логарифмической амплитуды и фазы, принимают вид:

$$\begin{aligned} F_\chi(\mathbf{x}_t; z) &= \pi \bar{k}^2 z \left(1 - \frac{\bar{k}}{\mathbf{x}_t^2 z} \sin \frac{\mathbf{x}_t^2 z}{\bar{k}} \right) \Phi_n(\mathbf{x}_t), \\ F_\delta(\mathbf{x}_t; z) &= \pi \bar{k}^2 z \left(1 + \frac{\bar{k}}{\mathbf{x}_t^2 z} \sin \frac{\mathbf{x}_t^2 z}{\bar{k}} \right) \Phi_n(\mathbf{x}_t). \end{aligned} \quad (5.172)$$

Функции

$$\begin{aligned} |H_\chi(\mathbf{x}_t; z)|^2 &= \pi \bar{k}^2 z \left(1 - \frac{\bar{k}}{\mathbf{x}_t^2 z} \sin \frac{\mathbf{x}_t^2 z}{\bar{k}} \right) \\ \text{и} \\ |H_\delta(\mathbf{x}_t; z)|^2 &= \pi \bar{k}^2 z \left(1 + \frac{\bar{k}}{\mathbf{x}_t^2 z} \sin \frac{\mathbf{x}_t^2 z}{\bar{k}} \right) \end{aligned} \quad (5.173)$$

называют фильтрующими функциями для логарифмических амплитуды и фазы. Фильтрующие функции, определяемые формулами (5.160) и (5.161), применялись только для отдельного турбулентного слоя на расстоянии $z - z'$ от входного зрачка оптической системы, в то время, как фильтрующие функции, определяемые формулами (5.173), относятся к полному интервалу распространения. Форма фильтрующих функций для логарифмических амплитуды и фазы показана на рис. 5.12. На этом же рисунке показана общая форма спектра мощности Φ_n показателя

преломления. На представленных графиках величину z можно считать параметром, а α_t – текущей переменной. Легко видеть, что флуктуации логарифмической амплитуды мало чувствительны к флуктуациям показателя преломления при малых величинах α_t (при масштабах большого размера), тогда как чувствительность флуктуаций фазы здесь максимальна.

В соответствии с формулой (5.125) ОПФ, усредненная по большому промежутку времени, зависит только от волновой структурной функции $D(r) = D_\chi(r) + D_\delta(r)$. Структурные функции D_χ и D_δ связаны с соответствующими спектрами мощности F_χ и F_δ соотношениями:

$$D_\chi(r) = 4\pi \int_0^\infty [1 - J_0(\alpha_t r)] F_\chi(\alpha_t; z) \alpha_t d\alpha_t, \quad (5.174)$$

$$D_\delta(r) = 4\pi \int_0^\infty [1 - J_0(\alpha_t r)] F_\delta(\alpha_t; z) \alpha_t d\alpha_t.$$

Таким образом, полная волновая структурная функция определяется выражением вида:

$$\begin{aligned} D(r) &= 4\pi \int_0^\infty [1 - J_0(\alpha_t r)] [F_\chi(\alpha_t; z) + F_\delta(\alpha_t; z)] \alpha_t d\alpha_t = \\ &= 8\pi \bar{k}^2 z \int_0^\infty [1 - J_0(\alpha_t r)] \Phi_n(\alpha_t) \alpha_t d\alpha_t. \end{aligned} \quad (5.175)$$

Учитывая выражение (5.62), определяющее колмогоровский спектр, получаем следующее выражение, определяющее волновую структурную функцию:

$$D(r) = 8\pi^2 (0,033) \bar{k}^2 z C_n^2 \int_0^\infty [1 - J_0(\alpha_t r)] \alpha_t^{\frac{8}{3}} d\alpha_t \quad (5.176)$$

Применив интегральное тождество

$$\int_0^\infty [1 - J_0(x)] x^{-p} dx = \pi \left\{ 2^p \Gamma^2\left(\frac{p+1}{2}\right) \sin\left[\frac{\pi(p+1)}{2}\right] \right\}^{-1}, \quad (5.177)$$

получаем окончательный вид выражения, определяющего волновую структурную функцию:

$$D(r) = 2,91 \bar{k}^2 z C_n^2 r^{\frac{5}{3}} \quad (5.178)$$

Полученное выражение точно совпадает с выражением (5.146), которое получено в результате анализа при весьма упрощающих задачу предположениях. Причину, по которой результаты

упрощенного анализа носят столь общий характер, можно увидеть из рассмотрения выражений (5.173), описывающих фильтрующие функции для амплитуды и фазы. Из вида этих выражений и из вида кривых на рис. 5.12 следует, что при очень малых длинах пути, при которых применим упрощенный анализ, имеем

$$|H_\chi|^2 \approx 0, \text{ а } |H_\delta|^2 \approx 2\pi\bar{k}^2 z.$$

Именно в этом случае можно пренебречь амплитудными эффектами и оставить только фазовые. Но результаты более общего анализа показали, что при любой длине пути (лишь бы удовлетворялось требование применимости метода малых возмущений) волновая структурная функция зависит от суммы двух фильтрующих функций, а эта сумма равна $2\pi\bar{k}^2 z$, т.е. точно тому же значению, что и описываемая фазовой фильтрующей функцией в случае короткого пути. Следовательно, изменения амплитудной и фазовой фильтрующих функций в случае большого пути взаимно уничтожаются при их сложении.

5.3.4. Влияние плавных изменений структурной постоянной C_n^2

Найдем выражение, определяющее усредненную по большому промежутку времени ОПФ, аналогичное выражению (5.150), но пригодное в случае, когда интенсивность турбулентности медленно изменяется вдоль пути распространения. Такие изменения естественны при распространении световой волны в атмосфере и особенно заметны при вертикальном наблюдении через атмосферу.

Медленный и плавный характер изменений интенсивности турбулентности позволяет использовать «квазиоднородную» модель структурной функции флуктуаций показателя преломления:

$$D_n(\bar{r}_1, \bar{r}_2) = C_n^2 \frac{r_1 + r_2}{2} |\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^{2/3}, \quad (5.179)$$

если $l_0 < |\bar{r}_1 - \bar{r}_2| < L_0$. В этом выражении неявно предполагается, что значительные изменения величины C_n^2 возможны только на расстояниях, сравнимых с L_0 или больших.

Принятая приближенная модель предполагает, что атмосфера может быть разделена на ряд слоев толщиной Δz вдоль пути распространения и что при достаточно большой их толщине флуктуации логарифмических амплитуды и фазы, вносимые разными слоями, в хорошем приближении можно считать некоррелированными. Тогда волновую структурную функцию после

прохождения N слоев можно представить в виде суммы N волновых структурных функций, связанных с отдельными слоями:

$$D(r) = \sum_{i=1}^N D_i(r) \quad (5.180)$$

Если z_i – значение координаты z в середине i -го слоя, то, используя выражение (5.178) для каждого слоя, можем написать

$$D(r) = 2,91 \bar{k}^2 r^3 \sum_{i=1}^N C_n^2(z_i) \Delta z \quad (5.181)$$

Поскольку по мере изменения расстояния z величина C_n^2 изменяется непрерывно, сумму в выражении (5.181) можно заменить интегралом по пути распространения волны. При этом

$$D(r) = 2,91 \bar{k}^2 r^3 \int_0^z C_n^2(\xi) \Delta \xi, \quad (5.182)$$

где z – полная длина пути. Окончательное выражение ОПФ при длительной экспозиции принимает вид:

$$\langle \tau_L(\Omega') \rangle = \exp \left[-57,4 \frac{\int_0^z C_n^2(\xi) d\xi}{\bar{\lambda}^{1/3}} \Omega'^{5/3} \right] \quad (5.183)$$

Спектральная плотность мощности случайного процесса n_1 максимальна при малых величинах α (при больших масштабах турбулентности). Однако, принятое предположение о том, что флуктуации показателя преломления, создаваемые всеми слоями, некоррелированы исключает из рассмотрения наличие крупномасштабных неоднородностей. И тем не менее полученный результат точно согласуется с полученным при более полном анализе.

Это объясняется тем, что искомая волновая структурная функция не чувствительна к крупномасштабным турбулентным структурам. Такие структуры не вызывают ни значительных изменений амплитуды, ни значительных изменений разности фаз в пределах входного зрачка оптической системы, формирующей изображение, а поэтому и мало влияют на волновую структурную функцию.

Итак, ОПФ атмосферы при длительной экспозиции определяется выражением (5.183), когда структурная постоянная флуктуаций показателя преломления C_n^2 изменяется вдоль пути распространения. Возникает естественный вопрос о том, какой вид имеют эти

изменения. При горизонтальном распространении волнового фронта не существует аналитической зависимости изменения C_n^2 от пути распространения, так как эти изменения сильно зависят от локального рельефа и от «розы ветров». При вертикальном же наблюдении изменения величины C_n^2 также зависят от атмосферных условий во время эксперимента, но существуют и аналитические приближенные выражения, одно из которых имеет вид:

$$C_n^2(\xi) = 4,2 \cdot 10^{-14} \xi^{-1/3} \exp\left(-\frac{\xi}{\xi_0}\right), \quad (5.184)$$

где $\xi_0 = 3200$ м.

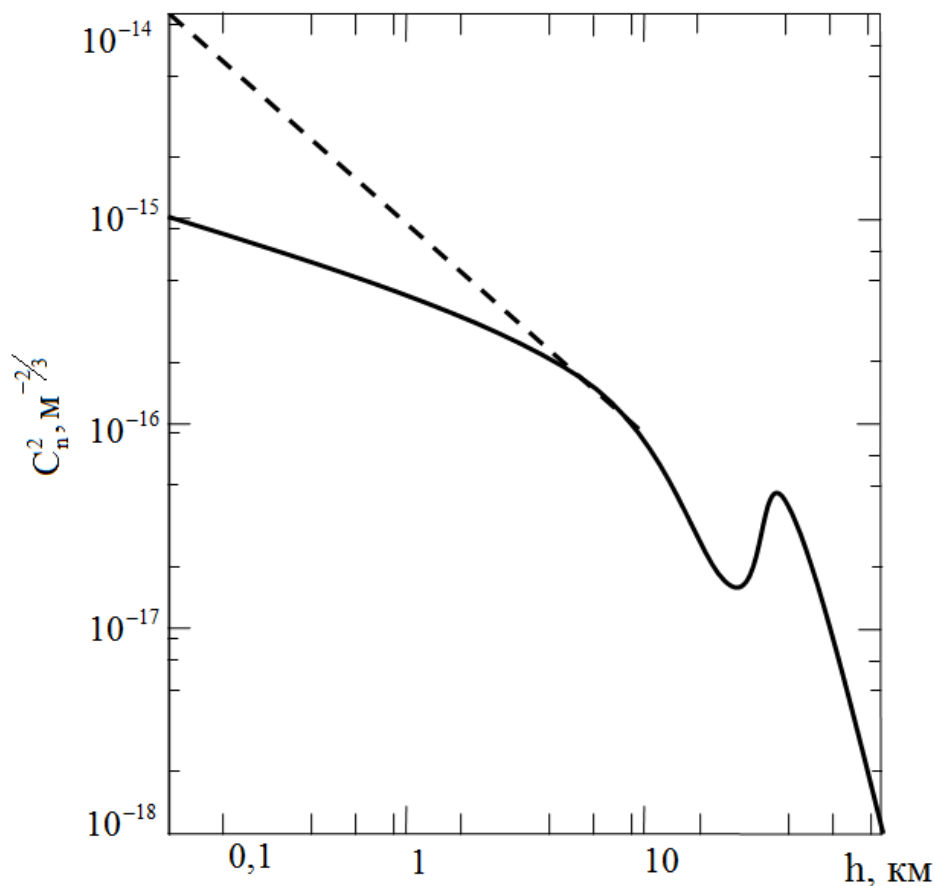


Рис. 5.13. Зависимость структурной постоянной от высоты. Сплошная линия – для ночных условий, штриховая линия – для дневных условий.

На рис. 5.13 показана типичная зависимость C_n^2 от высоты над поверхностью Земли, откуда следует, что интенсивность турбулентности уменьшается с увеличением высоты вследствие уменьшения температурных флуктуаций на больших высотах. Некоторое увеличение C_n^2 наблюдается в области тропопаузы, т.е. на высоте, примерно равной 10 км.

5.3.5. Атмосферный радиус когерентности

Качество изображения, образованного оптической системой, вполне характеризуется ОПФ, в рассматриваемом случае функцией действительной, обладающей круговой симметрией. При этом поскольку $\tau(0)=1$ мерой разрешения в изображении, образованном оптической системой, может служить интервал вида:

$$\mathfrak{R} = 2\pi \int_0^{\infty} \Omega' \tau(\Omega') d\Omega' \quad (5.185)$$

Рассмотрим случай, когда на входной зрачок круглой формы оптической системы, обладающей весьма совершенной коррекцией aberrаций образованного изображения, падает волновой фронт, прошедший сквозь турбулентную атмосферу. Полная усредненная ОПФ в этом случае определится выражением вида:

$$\langle \tau(\Omega') \rangle = \tau_0(\Omega') \exp \left[-57,4 \frac{\int_0^z C_n^2(\xi) d\xi}{\lambda^{1/3}} \Omega'^{5/3} \right], \quad (5.186)$$

где $\tau_0(\Omega')$ – ОПФ оптической системы при отсутствии атмосферной турбулентности:

$$\tau_0(\Omega') = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos \left(\frac{\Omega'}{\Omega'_0} \right) - \frac{\Omega'}{\Omega'_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega'}{\Omega'_0} \right)^2} \right] & \text{при } \Omega' \leq \Omega'_0, \\ 0 & \text{при } \Omega' > \Omega'_0; \end{cases} \quad (5.187)$$

$\Omega'_0 = \frac{D_0}{\lambda}$ – предельная пространственная частота, при которой контраст изображения равен нулю. Выполнив замену переменных $u = \frac{\Omega'}{\Omega'_0} = \frac{\bar{\lambda}\Omega'}{D_0}$ и подставив выражения (5.186) и (5.187) в выражение (5.185), преобразуем последнее к виду:

$$\mathfrak{R} = 4 \left(\frac{D_0}{\bar{\lambda}} \right)^2 \int_0^1 u [\arccos u - u \sqrt{1-u^2}] \times$$

$$\times \exp \left[-57.4 \frac{\int_0^z C_n^2(\xi) d\xi}{\bar{\lambda}^{1/3}} \left(\frac{D_0}{\bar{\lambda}} \right)^{5/3} u^{5/3} \right] du \quad (5.188)$$

Искажающее влияние атмосферы на изображение удобно характеризовать параметром r_0 , введенным Д.Л. Фридом и названным им атмосферным радиусом когерентности. Параметр r_0 определяется соотношением вида:

$$r_0 = 0,185 \left[\frac{\bar{\lambda}^2}{\int_0^z C_n^2(\xi) d\xi} \right]^{3/5} \quad (5.189)$$

При этом волновая структурная функция

$$D(r) = 6,88 \left[\frac{r}{r_0} \right]^{5/3}, \quad (5.190)$$

где $r = \bar{\lambda} f'v' = \bar{\lambda}\Omega' = \bar{\lambda}\Omega'_0 u = D_0 u$, а выражение (5.188) принимает вид:

$$\mathfrak{R} = 4 \left(\frac{D_0}{\bar{\lambda}} \right)^2 \int_0^1 u [\arccos u - u \sqrt{1-u^2}] \cdot \exp \left[-3.44 \left(\frac{D_0}{r_0} \right)^{5/3} u^{5/3} \right] du \quad (5.191)$$

Этот интеграл при разных значениях отношения $\frac{D_0}{r_0}$ был вычислен Фридом численным методом. Полученные им результаты в виде кривой зависимости нормированного разрешения $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_{\max}}$ от отношения $\frac{D_0}{r_0}$ представлены на рис. 5.14.

Заметим, что при $\frac{D_0}{r_0} \ll 1$ разрешение \mathfrak{R} увеличивается пропорционально квадрату отношения $\frac{D_0}{r_0}$, а при $\frac{D_0}{r_0} \gg 1$ оно стремится к горизонтальной асимптоте, соответствующей значению

\mathfrak{R}_{\max} . При $\frac{D_0}{r_0} < 1$ разрешение \mathfrak{R} увеличивается пропорционально отношению $\frac{D_0}{r_0}$, при этом продолжение линии увеличения разрешения пересекает асимптоту при $D_0 = r_0$.

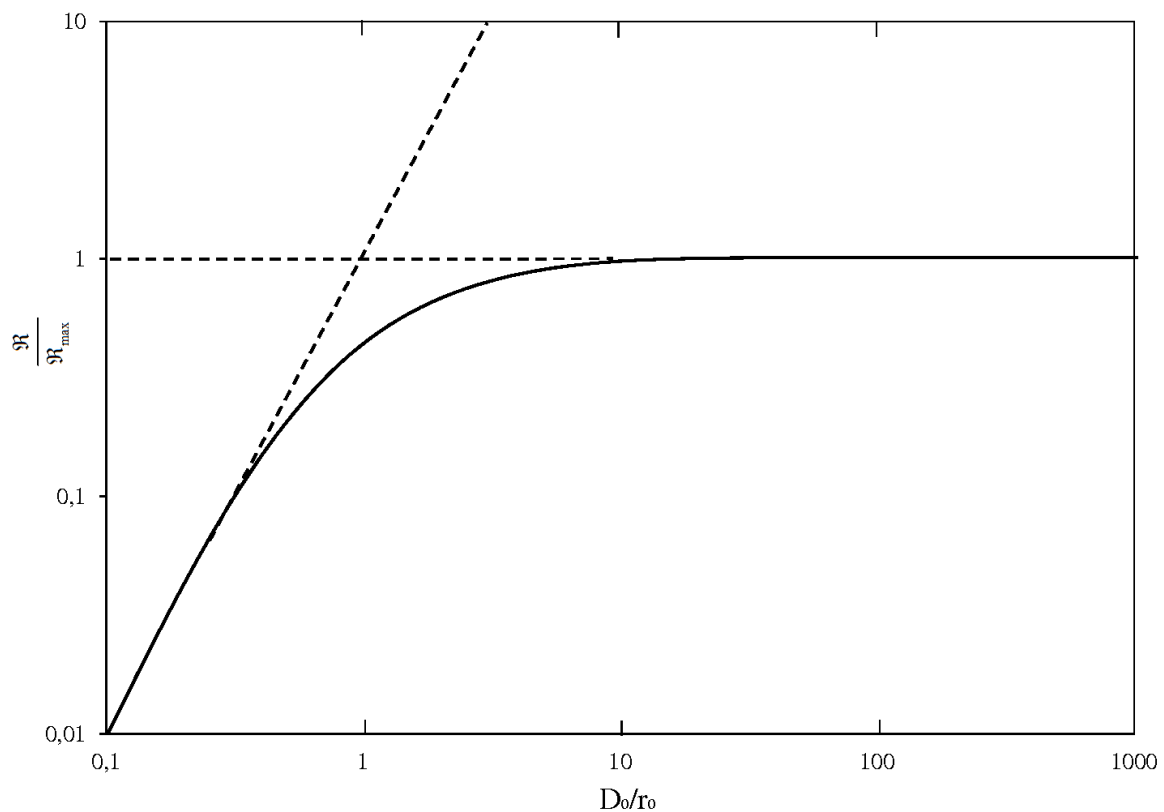


Рис. 5.14. Зависимость нормированного разрешения $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_{\max}}$ от нормированного диаметра $\frac{D_0}{r_0}$ оптической системы, формирующей изображение, в случае длительного экспонирования изображения

Таким образом, разрешение изображения дифракционно-ограниченного качества, фиксируемое при длительной экспозиции, повышается с увеличением апертуры оптической системы, пока размер входного зрачка ее не достигает значения, приблизительно равного r_0 , после чего при последующем увеличении апертуры разрешение остается почти постоянным. Параметр r_0 упрощает

выражения, определяющие атмосферные передаточные функции, и делает более понятным характер их изменения.

Типичные значения r_0 для хорошей высокогорной астрономической обсерватории могут составлять от 5 см в условиях довольно плохой видимости до 20 см в условиях исключительно хорошей видимости. Среднее значение в условиях хорошей видимости – примерно 10 см. Значительно меньше значение r_0 в случае горизонтальных путей формирования изображения.

5.3.6. Волновая структурная функция при сферической форме волнового фронта

При наблюдении астрономических объектов с Земли на атмосферу падает плоский волновой фронт, излучаемый любой точкой наблюдаемого объекта или самим объектом, который можно принять в качестве точечного источника излучения. Однако может оказаться, что при наблюдении объектов, расположенных в пределах атмосферы, сферичностью волнового фронта, излучаемого каждой точкой наблюдаемого объекта и падающего на входной зрачок оптической системы, формирующей изображение, как показано на рис. 5.15, пренебречь нельзя.

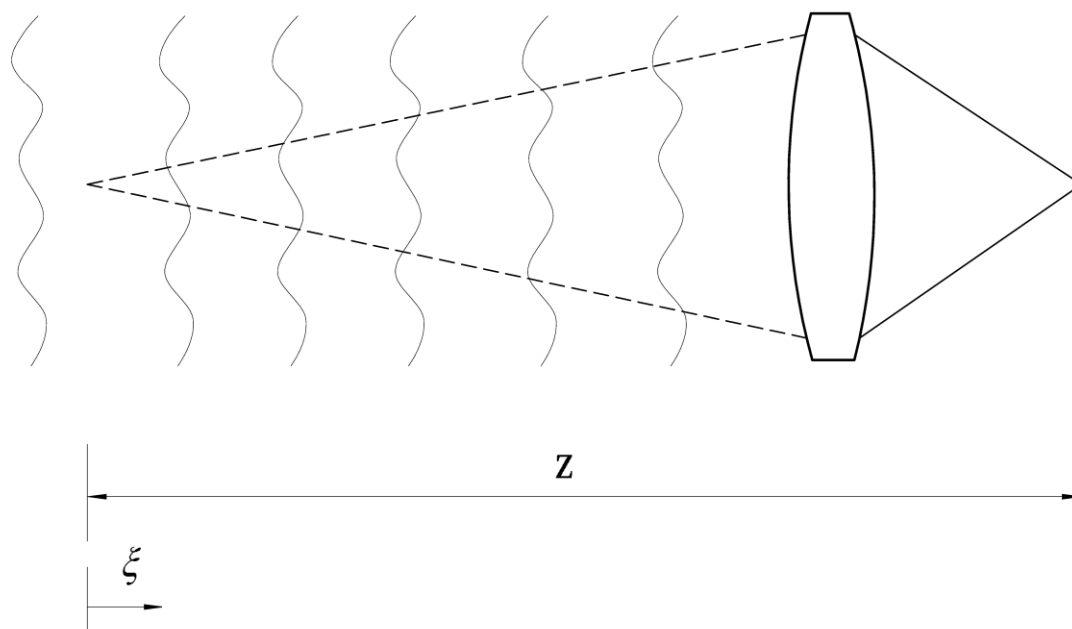


Рис. 5.15. Распространение сферической волны

Выражения для дисперсии логарифмической амплитуды и фазы сферической волны, распространяющейся через случайно

неоднородную среду, были получены В.И. Татарским. Волновая структурная функция для этого случая впервые была найдена Д.Л. Фридом на основе результатов, полученных Р.А. Шмельтцером. Было показано, что в случае распространения сферической волны в случайно неоднородной среде волновая структурная функция определяется выражением

$$D(r) = 2,91\bar{k}^2 r^{5/3} \int_0^z \left(\frac{\xi}{z}\right)^{5/3} C_n^2(\xi) d\xi \quad (5.192)$$

Если структурная постоянная C_n^2 не зависит от расстояния, пройденного волновым фронтом, то

$$D(r) = \frac{3}{8} \left(2,91\bar{k}^2 C_n^2 z r^{5/3} \right), \quad (5.193)$$

что отличается от результата в случае плоского волнового фронта постоянным множителем, равным $\frac{3}{8}$. И в этом случае ОПФ атмосферы при длительной экспозиции связана со структурной функцией соотношением

$$\langle \tau_L(\Omega') \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} D(\bar{\lambda}\Omega') \right] \quad (5.194)$$

5.4. ОПФ при короткой экспозиции

Непрерывная эволюция независимых реализаций атмосферных возмущений во время экспозиции позволила для получения ОПФ, усредненной во времени, использовать усреднение по ансамблю. При наблюдении достаточно ярких объектов возникает вопрос о влиянии атмосферных неоднородностей на изображение, наблюдаемое при экспозиции, когда время интегрирования мало по сравнению с характерным временем флуктуаций в атмосфере.

5.4.1. Длительные и короткие экспозиции

Однозначно определить, какую экспозицию считать длительной, а какую короткой, весьма сложно. Во-первых, необходимое время интегрирования зависит от конкретных атмосферных условий в период отображения изображения на приемнике, а, во-вторых, это время зависит от того, какая пространственная частота нас интересует. Напомним, что ФПМ оптической системы определяется интегралом свертки (5.1), который можно переписать в виде:

$$\tau(N'_x, N'_y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(m, M) F^*(m - \bar{\lambda} f' N_x, M - \bar{\lambda} f' N_y) dm dM}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(m, M) F^*(m, M) dm dM}, \quad (5.195)$$

где $F(m, M)$ – зрачковая функция, которая определяется выражением:

$$F(m, M) = P(m, M) u(m, M) \tau(m, M) \exp[-ikW(m, M)],$$

где $u(m, M)$ – амплитуда светового возмущения на входном зрачке оптической системы; $\tau(m, M)$ – коэффициент пропускания оптической системы; $W(m, M)$ – функция волновой аберрации; $P(m, M)$ – единично-нулевая функция:

$$P(m, M) = \begin{cases} 1, & (m, M) \in S_{зр}, \\ 0, & (m, M) \notin S_{зр}. \end{cases}$$

Из формулы (5.195) следует, что ОПФ в этом случае определяется распределением светового возмущения и волновой аберрации в пределах общей площади исходной поверхности входного зрачка и смещенной на расстояние, равное $\bar{\lambda} f N$, как показано на рис. 5.16, где N – пространственная частота, для которой требуется определить значение ОПФ.

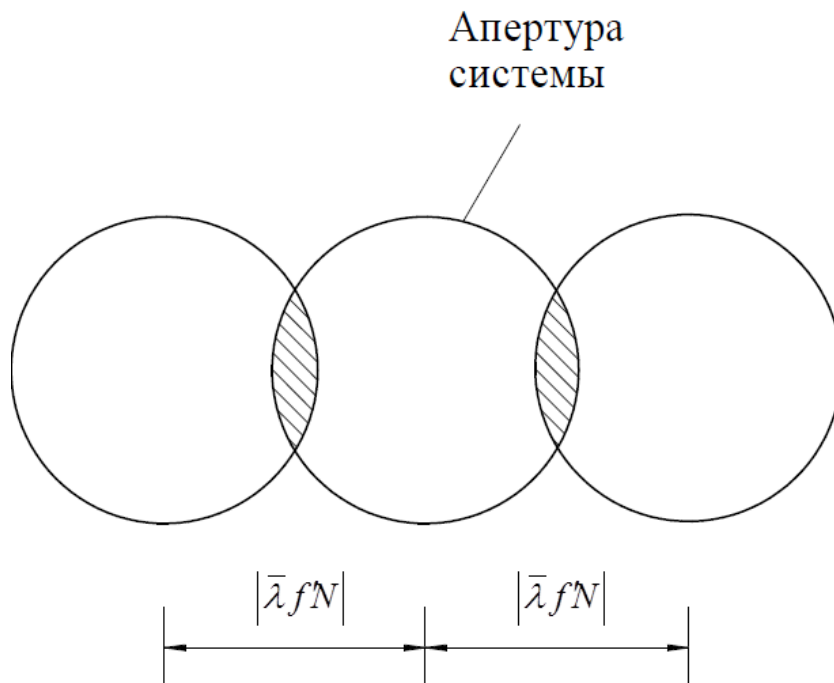


Рис. 5.16. Зоны выходных зрачков, вносящие вклад в составляющую интенсивности с пространственной частотой

В случае высоких пространственных частот эта площадь зрачка мала и достаточно сравнительно короткого времени, чтобы один набор распределения светового возмущения и деформаций волнового фронта сменился другим. При более низких пространственных частотах часть зрачка, вносящая вклад в структуру изображения, становится больше, а поэтому требуется больше времени для смены распределения светового возмущения и деформации волнового фронта.

Таким образом, реально наблюдаемая картина изображения может отличаться от той, которая сформировалась при мгновенной реализации структуры заполняющего зрачок света при короткой экспозиции, до картины изображения, усредненной во времени при длительной экспозиции, при этом при разных пространственных частотах наблюдаемая картина будет изменяться по-разному. Чтобы определить, какое время необходимо для того, чтобы обеспечивалась требуемая точность модели длительной экспозиции, надо знать временные спектральные плотности мощности турбулентности атмосферы, связанные со всеми требуемыми частотными компонентами изображения.

При отображении на приемнике изображения ярких объектов экспозиция может оказаться весьма короткой, при этом модель длительной экспозиции может оказаться неприменимой. ФРТ и ОПФ, соответствующие отображениям изображения при короткой экспозиции, заметно отличаются от соответствующих функций при длительной экспозиции. Как показано на рис. 5.17, ФРТ при длительно экспонируемом изображении представляет собой плавную и широкую функцию, а соответствующая ей ОПФ – плавная, но узкая. В случае же короткой экспозиции ФРТ – зубчатая и более узкая, тогда как соответствующая ОПФ обнаруживает значительные флуктуации как величины, так и фазы при изменении пространственной частоты.

Заметим, что при малом наклоне падающего на входной зрачок оптической системы волнового фронта происходит сдвиг изображения в поперечном к оптической оси направлении при сохранении его качества. Короткой экспозицией отображения изображений на приемнике будем называть такую, при которой влиянием наклона волнового фронта на качество изображения можно пренебречь.

Вполне очевидно, что при длительной экспозиции отображения изменения наклона волнового фронта во времени приводят к размытию пятна рассеяния на отображении, т.е. к уширению ФРТ и,

соответственно, к сужению ОПФ. И, тем не менее, при короткой экспозиции структура ОПФ носит статистический характер. Поэтому будем искать усредненную ОПФ, причем усреднение будем проводить по ансамблю реализаций атмосферных неоднородностей.

Мгновенная ОПФ системы определяется выражением (5.108) в виде:

$$\tau(\omega'_x, \omega'_y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') F^*(\mu' - \omega'_x, \nu' - \omega'_y) \exp[(\chi_1 + \chi_2) + i(\delta_{w1} - \delta_{w2})] d\mu' d\nu'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu', \nu')|^2 \exp(2\chi) d\mu' d\nu'} \quad (5.196)$$

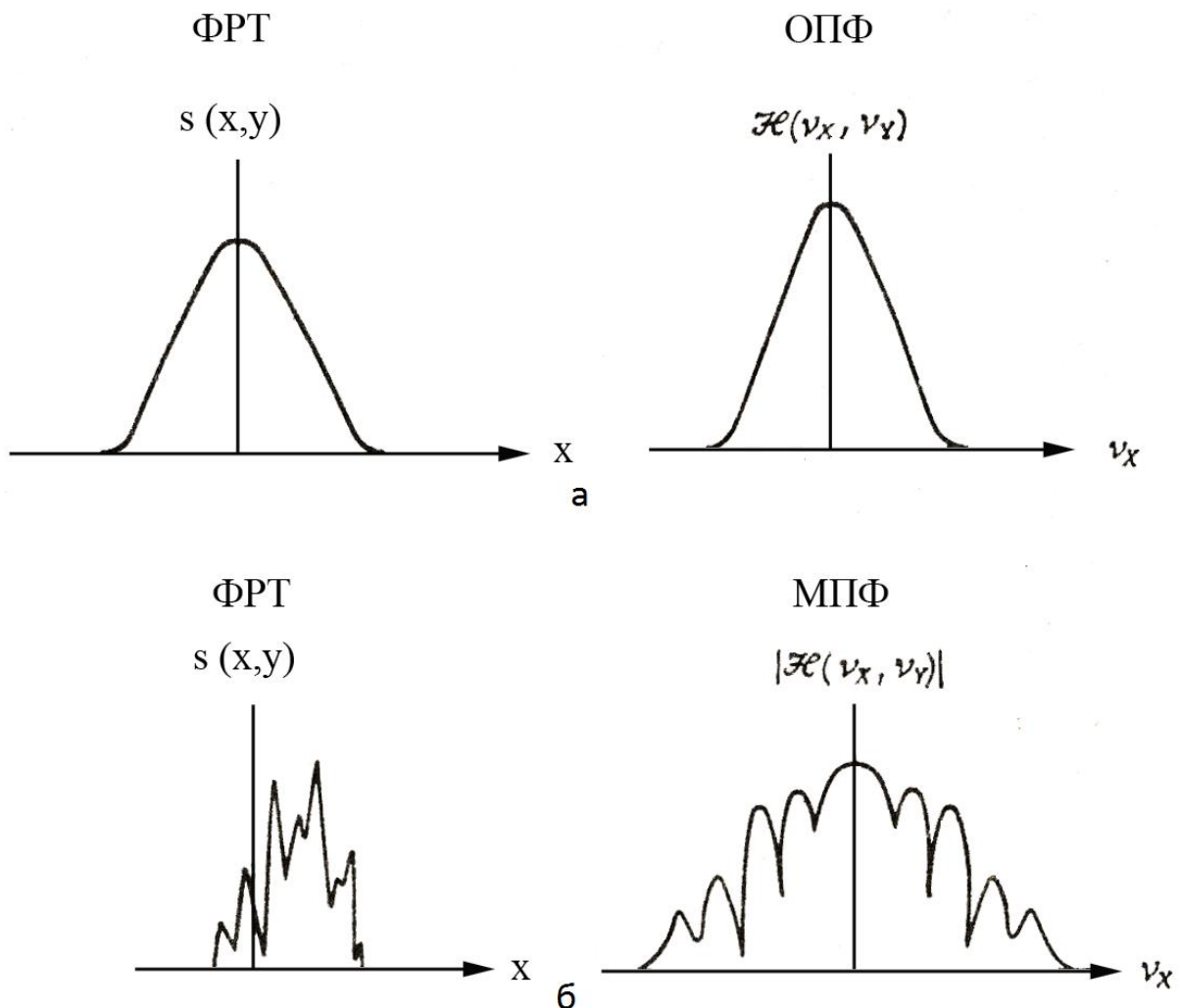


Рис. 5.17. Типичные функции размытия точки и передаточные функции для изображений, полученных при разной экспозиции. а – длительная экспозиция, б – короткая экспозиция

Усреднение числителя и знаменателя в этом выражении по отдельности позволило получить выражение для ОПФ при длительной экспозиции. В рассматриваемом случае надо учесть, что наклон волнового фронта не влияет на качество изображения при короткой экспозиции. Поэтому сначала следует исключить наклон волнового фронта из фаз δ_{W1} и δ_{W2} в приведенном выражении, а затем выполнить усреднение.

Пусть $\delta_W(\mu', \nu')$ – фаза в точке (μ', ν') входного зрачка объектива. Методом наименьших квадратов найдем плоский волновой фронт, наиболее приближающийся к $\delta_W(\mu', \nu')$, и вычтем фазовое смещение, связанное с этим плоским волновым фронтом, в результате чего получим распределение фазы, не зависящее от наклона. Линейную составляющую фазы $\delta_W(\mu', \nu')$ представим в виде $a_\mu \mu' + a_\nu \nu'$. Значения коэффициентов a_μ и a_ν для любой заданной функции $\delta_W(\mu', \nu')$ найдем из условия минимизации квадратичной ошибки

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') [\delta_W(\mu', \nu') - (a_\mu \mu' + a_\nu \nu')]^2 d\mu' d\nu', \quad (5.197)$$

считая оптическую систему объектива безабберационной и неаподизированной. Прежде чем выполнять минимизацию, представим выражение (5.197) в виде:

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') [\delta_W(\mu', \nu')]^2 d\mu' d\nu' - \\ & - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') (a_\mu \mu' + a_\nu \nu') \delta_W(\mu', \nu') d\mu' d\nu' + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu', \nu') (a_\mu \mu' + a_\nu \nu')^2 d\mu' d\nu'. \end{aligned} \quad (5.198)$$

При круглой форме входного зрачка удобно перейти к полярной системе координат: $\mu' = \rho \sin \varphi$, $\nu' = \rho \cos \varphi$; при этом

$$\mu'^2 + \nu'^2 = \rho^2 \leq \rho_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda f'} \right)^2 \frac{D_0^2}{4}.$$

Тогда интеграл

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int F(\mu', \nu') (a_{\mu} \mu' + a_{\nu} \nu')^2 d\mu' d\nu' = \\
& = \int_0^{\rho_0} \int_0^{2\pi} (a_{\mu} \rho \sin \varphi + a_{\nu} \rho \cos \varphi)^2 \rho d\rho d\varphi = \\
& = \frac{\pi}{4} \rho_0^4 (a_{\mu}^2 + a_{\nu}^2) = \left(\frac{2\pi}{\bar{\lambda} f'} \right)^4 \frac{\pi}{64} D_0^2 (a_{\mu}^2 + a_{\nu}^2).
\end{aligned} \tag{5.199}$$

Используя выражения (5.198) и (5.199), находим частные производные $\frac{\partial \Delta}{\partial a_{\mu}}$ и $\frac{\partial \Delta}{\partial a_{\nu}}$. Положив производные равными нулю,

находим, что

$$a_{\mu} = \left(\frac{\bar{\lambda} f'}{2\pi} \right)^4 \frac{64}{\pi D_0^4} \int \int F(\mu', \nu') \delta_W(\mu', \nu') \mu' d\mu' d\nu' \tag{5.200}$$

$$a_{\nu} = \left(\frac{\bar{\lambda} f'}{2\pi} \right)^4 \frac{64}{\pi D_0^4} \int \int F(\mu', \nu') \delta_W(\mu', \nu') \nu' d\mu' d\nu' \tag{5.201}$$

Тот факт, что a_{μ} и a_{ν} являются линейными функционалами фазы $\delta_W(\mu', \nu')$, означает, что в случае гауссовского распределения фазы δ_W оба коэффициента наклона также являются гауссовскими случайными переменными.

Если исключить наклон волнового фронта из деформации (из распределения фазы по зрачку системы) волнового фронта, формирующего изображение, то выражение (5.196) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\tau(\omega'_x, \omega'_y) &= \int \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu', \nu')|^2 \exp(2\chi) d\mu' d\nu' = \\
&= \int \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu'_1, \nu'_1) F^*(\mu'_2, \nu'_2) \exp[(\chi_1 + \chi_2) + i(\delta_{W1} - a_{\mu} \mu'_1 - a_{\nu} \nu'_1) - \\
&\quad - i(\delta_{W2} - a_{\mu} \mu'_2 - a_{\nu} \nu'_2)] d\mu' d\nu'
\end{aligned} \tag{5.202}$$

где $(\mu'_1, \nu'_1) = (\mu', \nu')$, $(\mu'_2, \nu'_2) = (\mu' - \bar{\lambda} f' N'_x, \nu' - \bar{\lambda} f' N'_y)$.

Усредним правую часть этого выражения по ансамблю независимых реализаций атмосферных возмущений. При этом будем учитывать, что, поскольку величины δ_W , a_{μ} и a_{ν} являются гауссовыми случайными переменными, такими же являются и величины $(\delta_{W1} - a_{\mu} \mu'_1 - a_{\nu} \nu'_1)$ и $(\delta_{W2} - a_{\mu} \mu'_2 - a_{\nu} \nu'_2)$. Кроме того,

определение рассматриваемых средних выполним при следующих упрощающих предположениях:

1. В любой точке (μ', ν') величина $\delta_w(\mu', \nu') - a_\mu \mu' - a_\nu \nu'$ предполагается некоррелированной с a_μ и a_ν , а благодаря гауссовскому распределению и не зависящей от них. Другими словами, предполагается, что отклонение деформированного волнового фронта δ_w от наклонной плоскости не зависит от величины наклона.

2. Разность фаз $(\delta_{w1} - a_\mu \mu'_1 - a_\nu \nu'_1) - (\delta_{w2} - a_\mu \mu'_2 - a_\nu \nu'_2)$, оставшаяся после исключения наклона, не зависит от суммы логарифмических амплитуд $(\chi_1 + \chi_2)$. В соответствии с формулой (5.115) величины $(\chi_1 + \chi_2)$ и $(\delta_{w1} - \delta_{w2})$ независимы. Следовательно, второе предположение сводится к тому, что $\langle [(a_\mu \bar{\lambda} f' N'_x + a_\nu \bar{\lambda} f' N'_y)(\chi_1 + \chi_2)] \rangle = 0$. Заметим, что оба предположения следует рассматривать как приближенные.

Изменив последовательность выполнения операций усреднения и интегрирования, находим среднее значение знаменателя выражения (5.196). Усреднение числителя в выражении (5.196) сводится к определению среднего значения экспоненциального множителя в правой части выражения (5.202). Используя второе предположение, с помощью формул (5.122) и (5.118) находим, что

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\{ \exp \left[(\chi_1 + \chi_2) + i(\delta_{w1} - a_\mu \mu'_1 - a_\nu \nu'_1) - i(\delta_{w2} - a_\mu \mu'_2 - a_\nu \nu'_2) \right] \right\} \right\rangle = \\ & = \exp \left[-\frac{1}{2} D_\chi (\bar{\lambda} f' N'_x, \bar{\lambda} f' N'_y) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left\langle \left[(\delta_{w1} - a_\mu \mu'_1 - a_\nu \nu'_1) - (\delta_{w2} - a_\mu \mu'_2 - a_\nu \nu'_2) \right]^2 \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.203)$$

Это выражение преобразуем, пользуясь тождеством

$$\begin{aligned} & \left[(\delta_{w1} - a_\mu \mu'_1 - a_\nu \nu'_1) - (\delta_{w2} - a_\mu \mu'_2 - a_\nu \nu'_2) \right]^2 = \\ & = (\delta_{w1} - \delta_{w2})^2 + (a_\mu \bar{\lambda} f' N'_x + a_\nu \bar{\lambda} f' N'_y)^2 + \\ & + 2 \left[(\delta_{w1} - a_\mu \mu'_1 - a_\nu \nu'_1) - (\delta_{w2} - a_\mu \mu'_2 - a_\nu \nu'_2) \right] (a_\mu \bar{\lambda} f' N'_x + a_\nu \bar{\lambda} f' N'_y). \end{aligned}$$

В соответствии с первым предположением среднее значение последнего члена равно нулю. Предположим, что сдвиг фазы относительно наклонной плоскости подчиняется симметричному распределению. В результате получаем

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\{ \exp \left[(\chi_1 + \chi_2) + i(\delta_{w1} - a_\mu \mu'_1 - a_\nu \nu'_1) - i(\delta_{w2} - a_\mu \mu'_2 - a_\nu \nu'_2) \right] \right\} \right\rangle = \\ & = \exp \left[-\frac{1}{2} D(\bar{\lambda} f' N'_x, \bar{\lambda} f' N'_y) \right] + \frac{1}{2} \left\langle (a_\mu \bar{\lambda} f' N'_x + a_\nu \bar{\lambda} f' N'_y)^2 \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.204)$$

где $D = D_\chi + D_\delta$ – волновая структурная функция.

Атмосферную турбулентность будем считать изотропной, что в неявном виде было принято при втором предположении. При круглой форме входного зрачка оптической системы полученные результаты удобно представить в функции от радиальной пространственной частоты $N' = \sqrt{N_x'^2 + N_y'^2}$.

Изложенные соображения позволяют среднее значение коротко экспонированной ОПФ представить выражением вида:

$$\langle \tau_L(N') \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} D(\bar{\lambda} f' N') + \frac{1}{2} (\bar{\lambda} f' N')^2 (\bar{a}_\mu^2 + \bar{a}_\nu^2) \right] \quad (5.205)$$

В результате довольно сложных вычислений Д. Фрид показал, что

$$(\bar{\lambda} f' N')^2 (\bar{a}_\mu^2 + \bar{a}_\nu^2) \approx 6,88 \alpha \left(\frac{\bar{\lambda} f' N'}{r_0} \right)^{5/3} \left(\frac{\bar{\lambda} f' N'}{D_0} \right)^{1/3}, \quad (5.206)$$

где коэффициент α принимает значение, равное единице, при распространении волнового фронта в области «ближнего поля» (т.е. в случае, когда существенны только фазовые эффекты) и значение $\alpha = \frac{1}{2}$ при распространении в области «дальнего поля» (когда одинаково существенны и амплитудные, и фазовые эффекты). В этой формуле величина r_0 – атмосферный радиус когерентности, а D_0 – диаметр входного зрачка оптической системы, формирующей изображение.

В соответствии с формулой (5.190)

$$D(\bar{\lambda} f' N') = 6,88 \left(\frac{\bar{\lambda} f' N'}{r_0} \right)^{5/3} \quad (5.207)$$

Подставив выражения (5.206) и (5.207) в выражение (5.205), получаем, что коротко экспонированная ОПФ атмосферы определяется выражением вида:

$$\langle \tau_L(N') \rangle = \exp \left\{ -3,44 \left(\frac{\bar{\lambda} f' N'}{r_0} \right)^{5/3} \left[1 - \alpha \left(\frac{\bar{\lambda} f' N'}{D_0} \right)^{1/3} \right] \right\} \quad (5.208)$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ выражение (5.208) принимает вид выражения, определяющего ОПФ при длительном экспонировании

$$\langle \tau_L(N') \rangle = \exp \left[-3,44 \left(\frac{\bar{\lambda} f' N'}{r_0} \right)^{5/3} \right] \quad (5.209)$$

Если от пространственной частоты N' перейти к угловой пространственной частоте $\Omega = f' N'$, то выражение (5.208) примет вид:

$$\langle \tau_L(\Omega) \rangle = \exp \left\{ -3,44 \left(\frac{\bar{\lambda} \Omega}{r_0} \right)^{5/3} \left[1 - \alpha \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{1/3} \right] \right\}, \quad (5.210)$$

где $\Omega_0 = \frac{D_0}{\lambda}$.

Заметим, что в случае короткой экспозиции в отличие от длительной средняя ОПФ, связанная с атмосферой, зависит от диаметра D_0 входного зрачка изображающей оптики. Это объясняется тем, что при короткой экспозиции величина среднеквадратичного наклона волнового фронта зависит от обратной величины $D_0^{1/3}$, как это следует из формулы (5.206). Таким образом, чем больше диаметр входного зрачка, тем меньше наклонная компонента искажения волнового фронта.

Различие между значениями ОПФ атмосферы при длительной и короткой экспозиции определяется множителем $\left[1 - \alpha \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} \right)^{1/3} \right]$. В

случае короткой экспозиции ненулевое значение α приводит к возрастанию ОПФ и особенно тогда, когда Ω приближается к Ω_0 . В различных значениях коэффициента α , соответствующих случаям ближнего и дальнего поля, находит отражение тот факт, что изменение фазы, связанное с наклонной компонентой деформации волнового фронта, не влияет на ОПФ, при этом в ближнем поле вся структура изображения обусловлена только фазовыми эффектами, тогда как в дальнем поле – и фазовыми смещениями, и амплитудными эффектами.

На рис. 5.18 представлены кривые общих усредненных ОПФ оптической системы, например, телескопа при круглой форме входного зрачка диаметром 1 м и при $r_0 = 10$ см. Длина волны света принята равной 0,5 мкм. Кривая при $\alpha = 0$ соответствует длительной

экспозиции, а кривые при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 1$ – короткой экспозиции. На том же рисунке показана кривая ОПФ оптической системы при $D_0 = 1$ м, формирующей изображение дифракционно-ограниченного качества.

Определив разрешение изображения формулой (5.185), Д. Фрид выполнил численное интегрирование, соответствующее коротко экспонированной ОПФ. Результаты его вычислений в виде кривых представлены на рис. 5.19.

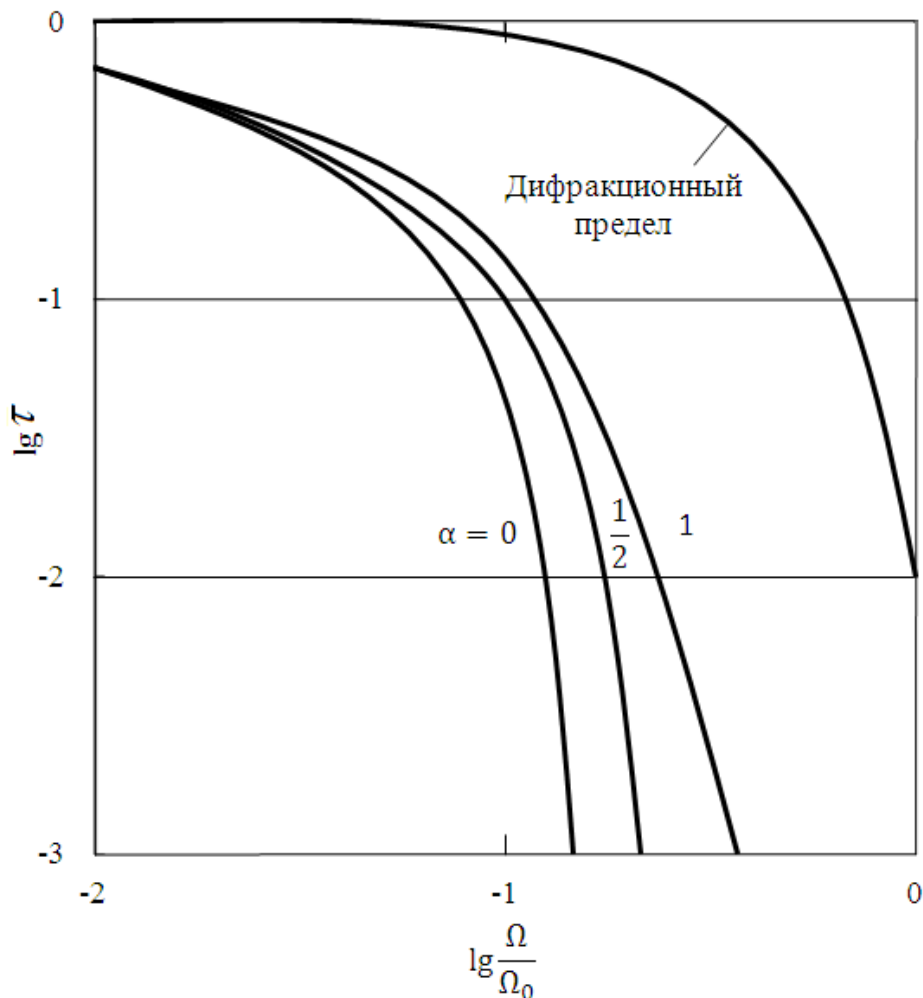


Рис. 5.18. Усредненная оптическая передаточная функция для комбинации система – атмосфера

Предельное разрешение при $D_0 \gg r_0$ оказывается одним и тем же для всех случаев, поскольку наклонная компонента искажения волнового фронта в пределах входного зрачка оптической системы уменьшается с увеличением диаметра D_0 . При $D_0 \approx r_0$ отношение

$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_{\max}} \approx 1$. Значительно более высокое разрешение возможно в случае короткой экспозиции при $D_0 \approx 3,8r_0$ в условиях ближнего поля.

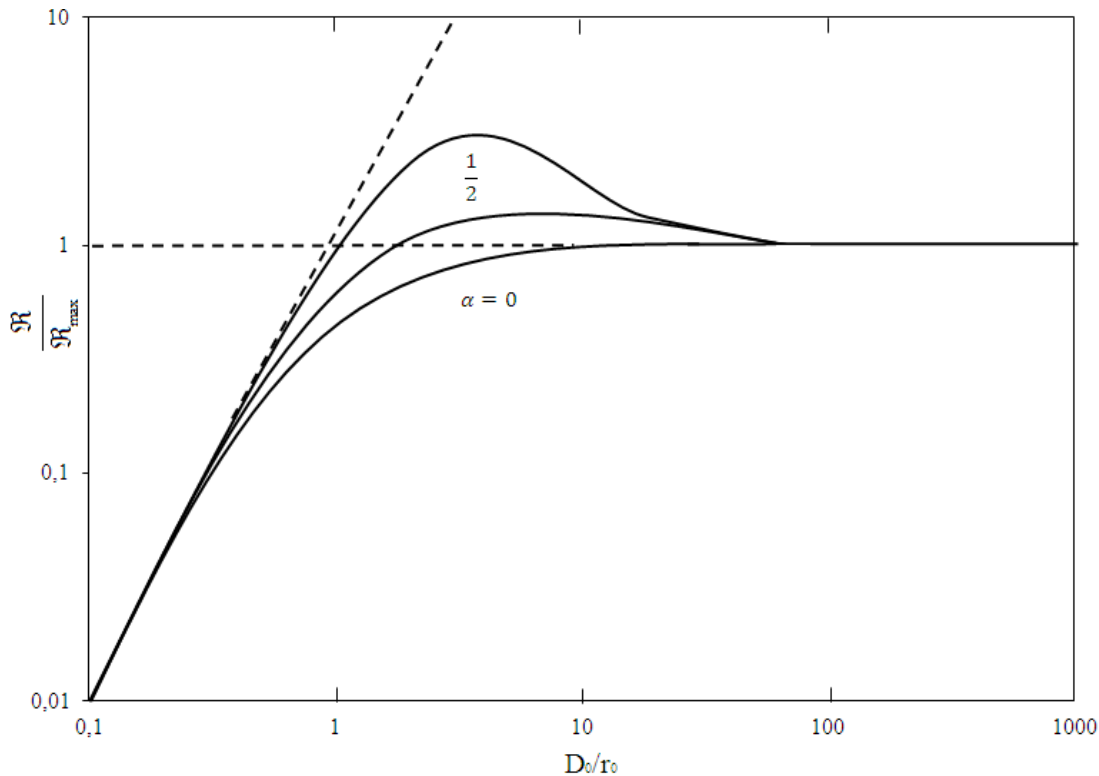


Рис. 5.19. Зависимость нормированного разрешения от нормированного диаметра оптической системы, формирующей изображение при короткой и длительной экспозиции

5.5. Статистическое определение формы волнового фронта, деформированного случайной оптически неоднородной средой

Распространение световой волны в случайной оптически неоднородной среде сопровождается деформацией волнового фронта. Пространственная статистика этой деформации обычно описывается так называемой фазовой структурной функцией. Если фазовые вариации, связанные с деформацией волнового фронта в точках, определяемых векторами \bar{L} и \bar{L}' , обозначить через $W(\bar{L})$ и $W(\bar{L}')$ соответственно, то фазовая структурная функция определится выражением вида:

$$D(r) = \left\langle |W(\bar{L}) - W(\bar{L}')|^2 \right\rangle, \quad (5.211)$$

где $r = |\bar{L} - \bar{L}'|$, а угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение по ансамблю. При таком определении $D(r)$ предполагается изотропность

и однородность статистики деформаций. Поскольку фазовая структурная функция отображает все статистики фазовых флуктуаций, она позволяет получить информацию, касающуюся «формы» деформированного волнового фронта. Знание формы волнового фронта позволяет оценить влияние её деформации на структуру изображения, образованного оптической системой, и оценить характер её изменения во времени. Так, например, если деформация волнового фронта могла бы быть аппроксимирована случайным наклоном плоского волнового фронта, то вполне очевидно, что чем короче экспозиция при фотографической регистрации изображения, тем выше его качество (разрешение). Фазовая структурная функция позволяет непосредственно вычислить разрешение изображения. Однако, для оценки возможных реализаций структуры изображения необходимо знать статистическую «форму» деформированного волнового фронта.

Наиболее сильное влияние атмосферная турбулентность оказывает на случайный наклон плоского волнового фронта. Возникающая под влиянием атмосферной турбулентности сферичность плоского волнового фронта приводит к продольной расфокусировке изображения. Однако, кривизна прогиба плоского волнового фронта может быть различной в различных его сечениях. Для аппроксимации такой деформации к сферичности волнового фронта можно добавить прогиб разного знака плоского волнового фронта в двух его сечениях, т.е. добавить так называемую астигматическую разность.

Рассмотрим плоскость, перпендикулярную направлению распространения деформированной плоской волны. Фазы световых колебаний в точках этой плоскости, определяемых векторами \bar{L} и \bar{L}' , обозначим как $W(\bar{L})$ и $W(\bar{L}')$ соответственно. Если предположить, что атмосферная турбулентность однородна и изотропна, то координаты этих точек в декартовой системе координат можно определить соотношениями вида: $x = L \cos \theta$, $y = L \sin \theta$; $x' = L' \cos \theta$, $y' = L' \sin \theta$, где $L = |\bar{L}|$, а $L' = |\bar{L}'|$. В рассматриваемой плоскости исследуем круг диаметром $D = 2R$. Введем обозначения: $\bar{\rho} = \frac{\bar{L}}{R} = 2 \frac{\bar{L}}{D}$, $\bar{\rho}' = \frac{\bar{L}'}{R} = 2 \frac{\bar{L}'}{D}$, где $0 \leq \rho \leq 1$, а $0 \leq \rho' \leq 1$. При этом круг определим единично-нулевой функцией вида:

$$P(\bar{\rho}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho \leq 1 (\rho' \leq 1) \\ 0, & \text{если } \rho > 1 (\rho' > 1) \end{cases}$$

В пределах этого круга структурную функцию определим выражением, подобным выражению (5.211):

$$D(r) = \left\langle |W(\bar{\rho}) - W(\bar{\rho}')|^2 \right\rangle, \quad (5.212)$$

где $r = |\bar{L} - \bar{L}'| = R|\bar{\rho} - \bar{\rho}'|$.

В общем случае плоский волновой фронт в результате деформации из-за атмосферной турбулентности принципиально может принимать весьма произвольную форму, для аппроксимации которой в пределах рассматриваемого единичного круга удобно применить ортогональную систему круговых полиномов Цернике, определяемых формулой вида:

$$V_n^l(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta) = R_n^l(\rho) \exp(il\theta), \quad (5.213)$$

где $l \geq 0$ и $n \geq 0$ – целое число, $n \geq |l|$, а $n - |l|$ – четное число.

Ортогональность и нормировка полиномов выражаются формулой

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} [V_n^l(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta)]^* V_{n'}^{l'}(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta = \quad (5.214)$$

$$= \frac{\pi}{n+1} \delta_{ll'} \delta_{nn'},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

звездочка обозначает комплексное сопряжение.

Подставив выражение (5.213) в выражение (5.214), при $l' = l$ получаем

$$\int_0^1 R_n^l(\rho) R_{n'}^l(\rho) \rho d\rho = \frac{1}{2(n+1)} \delta_{nn'} \quad (5.215)$$

Вместо комплексных полиномов V удобно использовать вещественные полиномы:

$$\left. \begin{aligned} U_n^m &= \frac{1}{2} (V_n^m + V_n^{-m}) = R_n^m(\rho) \cos m\theta, \\ U_n^{-m} &= \frac{1}{2i} (V_n^m - V_n^{-m}) = R_n^m(\rho) \sin m\theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.216)$$

Эти полиномы также обладают свойством ортогональности:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} U_n^m(\rho, \theta) U_{n'}^{m'}(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{n+1} \delta_{nm} \delta_{n'm'}.$$

Итак, функцию деформации волнового фронта, представленную разложением в ряд по круговым полиномам Цернике, можно записать в виде:

$$W(\bar{\rho}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[R_n^m(\rho) (C_{nm} \cos m\theta + S_{nm} \sin m\theta) \right], \quad (5.217)$$

где при $m = |l|$:

$$R_n^{\pm m}(\rho) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^s \frac{(n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2} - s\right)! \left(\frac{n-m}{2} - s\right)!} \rho^{n-2s}, \quad (5.218)$$

при этом $R_n^{\pm m}(1) = 1$; C_{nm}, S_{nm} – косинусный и синусный коэффициенты разложения функции деформации волнового фронта (волновой аберрации).

Используя условие ортогональности полиномов, легко убедиться, что выражение, определяющее средний квадрат деформации волнового фронта, представленного рядом (5.217), имеет вид:

$$W_{\text{ср}}^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_{n0}^2}{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{1}{n+1} (C_{nm}^2 + S_{nm}^2) \quad (5.219)$$

В рассматриваемом случае ограничимся рядом вида:

$$W(\bar{\rho}) = C_{00} R_0^0(\rho) + C_{11} R_1^1(\rho) \cos \theta + S_{11} R_1^1(\rho) \sin \theta + C_{20} R_2^0(\rho) + C_{22} R_2^2(\rho) \cos 2\theta + S_{22} R_2^2(\rho) \sin 2\theta, \quad (5.220)$$

где $R_0^0(\rho) = 1, R_1^1(\rho) = \rho, R_2^0(\rho) = 2\rho^2 - 1, R_2^2(\rho) = \rho^2$.

В этом выражении коэффициент $A_{00} = C_{00}$ определяет среднее положение деформированного волнового фронта относительно номинального положения плоского; коэффициент $A_{11} = \sqrt{C_{11}^2 + S_{11}^2}$ определяет величину наклона плоского волнового фронта, коэффициент $A_{20} = C_{20}$ – его сферичность, а коэффициент $A_{22} = \sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}$ – астигматизм, т.е. деформации, о которых уже шла речь.

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned}
F_1(\bar{\rho}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} R_0^0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \\
F_2(\bar{\rho}) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} R_1^1(\rho) \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \cos \theta, \\
F_3(\bar{\rho}) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} R_1^1(\rho) \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \rho \sin \theta, \\
F_4(\bar{\rho}) &= \sqrt{\frac{3}{\pi}} R_2^0(\rho) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} (2\rho^2 - 1), \\
F_5(\bar{\rho}) &= \sqrt{\frac{6}{\pi}} R_2^2(\rho) \cos 2\theta = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \rho^2 \cos 2\theta, \\
F_6(\bar{\rho}) &= \sqrt{\frac{6}{\pi}} R_2^2(\rho) \sin 2\theta = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \rho^2 \sin 2\theta.
\end{aligned} \right\} \quad (5.221)$$

Легко проверить, что эти полиномы удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} P(\bar{\rho}) F_\mu(\bar{\rho}) F_\nu(\bar{\rho}) d\bar{\rho} = \delta_{\mu\nu} \quad (5.222)$$

Здесь $d\bar{\rho} = \rho d\rho d\theta$. Пределы интегрирования, по сути дела, определяются единично-нулевой функцией $P(\bar{\rho})$. Используя полиномы (5.221), выражение (5.220) можно представить в виде:

$$W(\bar{\rho}) = \sum_{\mu=1}^{\mu=6} a_\mu F_\mu(\bar{\rho}), \quad (5.223)$$

где коэффициенты a_μ определяются из условия минимальной погрешности аппроксимации. Погрешность Δ аппроксимации функции деформации плоского волнового фронта $W_0(\bar{\rho})$ рядом (5.223) определяется разностью значений $W(\bar{\rho})$ и $W_0(\bar{\rho})$, взятой в пределах апертуры, ограниченной единично-нулевой функцией:

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) [W(\bar{\rho}) - W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} \quad (5.224)$$

Заметим, что здесь площадь круглой апертуры $\Sigma = \pi \rho_{\max}^2 = \pi$.

Для последующего анализа удобно ввести коэффициенты:

$$(a_c)^2 = (a_1)^2 = \pi (C_{00})^2 = \pi A_{00}^2, \quad (5.225a)$$

$$(a_L)^2 = (a_2)^2 + (a_3)^2 = \frac{\pi}{4} (C_{11}^2 + S_{11}^2) = \frac{\pi}{4} A_{11}^2, \quad (5.225b)$$

$$(a_S)^2 = (a_4)^2 = \frac{\pi}{3} C_{20}^2 = \frac{\pi}{3} A_{20}^2, \quad (5.225\text{в})$$

$$\begin{aligned} (a_Q)^2 &= (a_4)^2 + (a_5)^2 + (a_6)^2 = \frac{\pi}{3} A_{20}^2 + \frac{\pi}{6} (C_{22}^2 + S_{22}^2) = \\ &= \frac{\pi}{3} A_{20}^2 + \frac{\pi}{6} A_{22}^2, \end{aligned} \quad (5.225\text{г})$$

$$(a_P)^2 = (a_5)^2 + (a_6)^2 = \frac{\pi}{6} (C_{22}^2 + S_{22}^2) = \frac{\pi}{6} A_{22}^2 \quad (5.225\text{д})$$

Величины усредненных по ансамблю квадратов коэффициентов $\langle (a_C)^2 \rangle$, $\langle (a_L)^2 \rangle$, $\langle (a_S)^2 \rangle$, $\langle (a_Q)^2 \rangle$ и $\langle (a_P)^2 \rangle$ являются мерами среднего квадрата флуктуаций среднего положения деформированного волнового фронта: наклона плоского волнового фронта, его сферичности, сферичности и астигматизма и только астигматизма соответственно на выбранной круглой зоне волнового фронта.

Рассмотрим конечные последовательности:

$$W_j(\bar{\rho}) = \sum_{\mu=1}^{n_j} a_\mu F_\mu(\bar{\rho}), \quad (5.226)$$

где j принимает значения C, L, S и Q , а n_j принимает значения 1, 3, 4 и 6 соответственно. Геометрическая интерпретация деформации волнового фронта, определяемой каждой последовательностью членов ряда (5.226), очевидна. Погрешность аппроксимации при таком представлении деформации волнового фронта равна

$$\Delta_j = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) [W_j(\bar{\rho}) - W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} \quad (5.227)$$

Эта величина, усредненная по ансамблю, позволяет оценить насколько точно различные конечные последовательности аппроксимируют деформацию волнового фронта.

Фазовое смещение деформированного волнового фронта в общем случае можно аппроксимировать бесконечной последовательностью членов ряда:

$$W(\bar{\rho}) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu F_\mu(\bar{\rho}) \quad (5.228)$$

Подставив выражение (5.228) в выражение (5.224), возведя результат в квадрат и поменяв последовательность операций суммирования и интегрирования, получаем

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) [W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} - \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) W_0(\bar{\rho}) F_{\mu}(\bar{\rho}) d\bar{\rho} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{\mu, \nu}^{\infty} a_{\mu} a_{\nu} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) F_{\mu}(\bar{\rho}) F_{\nu}(\bar{\rho}) d\bar{\rho}$$
(5.229)

Учитывая условие (5.222) ортогональности полиномов, выражение (5.229) можно преобразовать к виду:

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) [W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} - \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) W_0(\bar{\rho}) F_{\mu}(\bar{\rho}) d\bar{\rho} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} (a_{\mu})^2.$$
(5.230)

Как было отмечено, коэффициенты разложения деформации волнового фронта в ряд (5.223), а, соответственно, и в ряд (5.228), определяются из условия минимизации погрешности ее аппроксимации. Взяв для этого производную по соответствующему коэффициенту от величины Δ , определяемой формулой (5.230), и приравняв ее нулю, получаем

$$a_{\mu} = \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) W_0(\bar{\rho}) F_{\mu}(\bar{\rho}) d\bar{\rho}$$
(5.231)

При этом выражение (5.230) принимает вид:

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) [W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} - \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{\infty} (a_{\mu})^2.$$
(5.232)

Заменив произведение $a_{\mu} \cdot a_{\mu}$ двойным интегралом, получаем

$$\Delta = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) [W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \iint_{\Sigma} P(\bar{\rho}) P(\bar{\rho}') \sum_{\mu=1}^{\infty} F_{\mu}(\bar{\rho}) F_{\mu}(\bar{\rho}') W_0(\bar{\rho}) W_0(\bar{\rho}') d\bar{\rho} d\bar{\rho}'$$
(5.233)

При конечной последовательности членов ряда выражения (5.232) и (5.233) можно переписать в виде:

$$\Delta_j = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) [W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} - \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=1}^{n_j} (a_{\mu})^2$$
(5.234)

$$\Delta_j = \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) [W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \iint_{\Sigma} P(\bar{\rho}) P(\bar{\rho}') \sum_{\mu=1}^{n_j} F_{\mu}(\bar{\rho}) F_{\mu}(\bar{\rho}') W_0(\bar{\rho}) W_0(\bar{\rho}') d\bar{\rho} d\bar{\rho}'$$
(5.235)

Из сопоставления выражений (5.225а)–(5.225д) и (5.234) следует, что

$$(a_L)^2 = \Delta_C - \Delta_L \quad (5.236а)$$

$$(a_S)^2 = \Delta_L - \Delta_S \quad (5.236б)$$

$$(a_Q)^2 = \Delta_L - \Delta_Q \quad (5.236в)$$

$$(a_P)^2 = \Delta_S - \Delta_Q \quad (5.236г)$$

Таким образом, проблема нахождения средних по ансамблю значений $\langle (a_L)^2 \rangle$, $\langle (a_S)^2 \rangle$, $\langle (a_Q)^2 \rangle$ и $\langle (a_P)^2 \rangle$ сводится к вычислению средних по ансамблю значений $\langle \Delta_j \rangle$ и определению взаимосвязи результата с фазовой структурной функцией.

Заметим, что $F_1(\bar{\rho})$ не зависит от $\bar{\rho}$. Следовательно,

$$\int_{\Sigma} P(\bar{\rho}') F_1(\bar{\rho}) F_1(\bar{\rho}') d\bar{\rho}' = 1.$$

С другой стороны, при $\mu \neq 1$:

$$\int_{\Sigma} P(\bar{\rho}') F_{\mu}(\bar{\rho}) F_{\mu}(\bar{\rho}') d\bar{\rho}' = 0.$$

При этом интеграл в выражении (5.232) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) [W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} = \\ & = \frac{1}{\pi} \iint_{\Sigma} P(\bar{\rho}) P(\bar{\rho}') \sum_{\mu=1}^{n_j} F_{\mu}(\bar{\rho}) F_{\mu}(\bar{\rho}') [W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} d\bar{\rho}' \end{aligned} \quad (5.237)$$

Вполне очевидно, что равенство сохранится, если в правой части вектор $\bar{\rho}$ заменить вектором $\bar{\rho}'$ и наоборот. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma} P(\bar{\rho}) [W_0(\bar{\rho})]^2 d\bar{\rho} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} P(\bar{\rho}) P(\bar{\rho}') \sum_{\mu=1}^{n_j} F_{\mu}(\bar{\rho}) F_{\mu}(\bar{\rho}') \left\{ [W_0(\bar{\rho})]^2 + [W_0(\bar{\rho}')]^2 \right\} d\bar{\rho} d\bar{\rho}' \end{aligned} \quad (5.238)$$

Подставив это выражение в выражение (2.235), получаем

$$\Delta_j = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} P(\bar{\rho}) P(\bar{\rho}') \sum_{\mu=1}^{n_j} F_{\mu}(\bar{\rho}) F_{\mu}(\bar{\rho}') [W_0(\bar{\rho}) - W_0(\bar{\rho}')]^2 d\bar{\rho} d\bar{\rho}' \quad (5.239)$$

Заменим переменные интегрирования $\bar{\rho}$ и $\bar{\rho}'$ переменными \bar{r} и \bar{r}' при $\bar{r} = R(\bar{\rho} - \bar{\rho}')$, а $\bar{r}' = \frac{1}{2} R(\bar{\rho} + \bar{\rho}')$. При этом

$$\bar{\rho} = \frac{1}{R} \left(\bar{r}' + \frac{1}{2} \bar{r} \right) \quad (5.240)$$

$$\bar{\rho}' = \frac{1}{R} \left(\bar{r}' - \frac{1}{2} \bar{r} \right) \quad (5.241)$$

Заметим, что $0 \leq \rho \leq 1$. При $\bar{r}' = 0$: $\bar{r} = 2R\bar{\rho}$, а при $\bar{r} = 0$: $\bar{r}' = R\bar{\rho}$. Следовательно, имеем $0 \leq r \leq 2R$, $0 \leq r' \leq R$. Подставив соотношения (5.240) и (5.241) в выражение (5.239) и учитывая выражение (5.212), определяющее фазовую структурную функцию, преобразуем выражение (5.239) к виду:

$$\begin{aligned} \langle \Delta_j \rangle &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} P \left(\left| \bar{r}' + \frac{1}{2} \bar{r} \right| \right) P \left(\left| \bar{r}' - \frac{1}{2} \bar{r} \right| \right) \times \\ &\times \sum_{\mu=1}^{n_j} F_{\mu} \left(\bar{r}' + \frac{1}{2} \bar{r} \right) F_{\mu} \left(\bar{r}' - \frac{1}{2} \bar{r} \right) D(r) d\bar{r} d\bar{r}' \end{aligned} \quad (5.242)$$

Выполним сначала интегрирование по \bar{r}' . Для этого введем функцию вида:

$$\begin{aligned} F_j(r) &= \\ &= \int_{\Sigma} P \left(\left| \bar{r}' + \frac{1}{2} \bar{r} \right| \right) P \left(\left| \bar{r}' - \frac{1}{2} \bar{r} \right| \right) \sum_{\mu=1}^{n_j} F_{\mu} \left(\bar{r}' + \frac{1}{2} \bar{r} \right) F_{\mu} \left(\bar{r}' - \frac{1}{2} \bar{r} \right) d\bar{r}' \end{aligned} \quad (5.243)$$

Тогда

$$\langle \Delta_j \rangle = \frac{1}{2\pi R^2} \iint_D F_j(r) D(r) r dr d\theta.$$

Изотропность интегрирования по \bar{r} определяет возможность выполнить интегрирование по углу θ , в результате чего получаем

$$\langle \Delta_j \rangle = \frac{1}{R^2} \int_D F_j(r) D(r) r dr \quad (5.244)$$

Учитывая соотношения (5.240) и (5.241), имеем

$$\begin{aligned} R^2 \bar{\rho} \bar{\rho}' &= \left(\bar{r}' + \frac{1}{2} \bar{r} \right) \left(\bar{r}' - \frac{1}{2} \bar{r} \right) = r'^2 - \frac{1}{4} r^2, \\ R^4 \rho^2 \rho'^2 &= \left(\bar{r}' + \frac{1}{2} \bar{r} \right)^2 \left(\bar{r}' - \frac{1}{2} \bar{r} \right)^2 = r'^4 + \frac{1}{2} r^2 r'^2 + \frac{1}{16} r^4 - (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2. \end{aligned}$$

При этом находим, что

$$\sum_{i=1}^{n_c} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') = F_1(\bar{\rho}) F_1(\bar{\rho}') = \frac{1}{\pi R^2},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n_L} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') &= \sum_{i=1}^{n_C} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') + F_2(\bar{\rho}) F_2(\bar{\rho}') + F_3(\bar{\rho}) F_3(\bar{\rho}') = \\
&= \frac{1}{\pi R^2} + \frac{4}{\pi R^2} \rho \rho' \cos^2 \theta + \frac{4}{\pi R^2} \rho \rho' \sin^2 \theta = \frac{1}{\pi R^4} (4r'^2 - r^2 + R^2), \\
\sum_{i=1}^{n_S} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') &= \sum_{i=1}^{n_L} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') + F_4(\bar{\rho}) F_4(\bar{\rho}') = \\
&= \frac{1}{\pi R^4} (4r'^2 - r^2 + R^2) + \frac{12}{\pi R^6} \left[\left(\bar{r}' + \frac{1}{2} \bar{r} \right)^2 - \frac{1}{2} R^2 \right] \left[\left(\bar{r}' - \frac{1}{2} \bar{r} \right)^2 - \frac{1}{2} R^2 \right] = \\
&= \frac{1}{\pi R^6} \left[12r'^4 + (6r^2 - 8R^2)r'^2 + \frac{3}{4}r^4 - 4R^2r^2 + 4R^4 - 12(\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 \right], \\
\sum_{i=1}^{n_Q} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') &= \sum_{i=1}^{n_S} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') + F_5(\bar{\rho}) F_5(\bar{\rho}') + F_6(\bar{\rho}) F_6(\bar{\rho}') = \\
&= \sum_{i=1}^{n_S} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') + \frac{6}{\pi} \rho^2 \rho'^2 \cos^2 2\theta + \frac{6}{\pi} \rho^2 \rho'^2 \sin^2 2\theta = \\
&= \frac{1}{\pi R^6} \left[18r'^4 + (9r^2 - 8R^2)r'^2 + \frac{9}{8}r^4 - 4(r^2 - R^2)R^2 + 4 - 18(\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 \right].
\end{aligned}$$

Итак, имеем

$$\sum_{i=1}^{n_C} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') = \frac{1}{\pi R^2}, \quad (5.245a)$$

$$\sum_{i=1}^{n_L} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') = \frac{1}{\pi R^4} (4r'^2 - r^2 + R^2), \quad (5.245б)$$

$$\sum_{i=1}^{n_S} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') = \frac{1}{\pi R^6} \left[12r'^4 + 2(3r^2 - 4R^2)r'^2 + \frac{3}{4}r^4 - 4(r^2 - R^2)R^2 - 12(\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 \right], \quad (5.245B)$$

$$\sum_{i=1}^{n_Q} F_i(\bar{\rho}) F_i(\bar{\rho}') = \frac{1}{\pi R^6} \left[18r'^4 + (9r^2 - 8R^2)r'^2 + \frac{9}{8}r^4 - 4(r^2 - R^2)R^2 - 18(\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 \right] \quad (5.245Г)$$

При этом

$$F_C(r) = \frac{1}{\pi R^2} K_0(r), \quad (5.246a)$$

$$F_L(r) = \frac{1}{\pi R^4} \left[4K_1(r) + (R^2 - r^2)K_0(r) \right], \quad (5.246б)$$

$$F_S(r) = \frac{1}{\pi R^6} \left[12K_2(r) + (6r^2 - 8R^2)K_1(r) + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{4}r^4 - 4r^2R^2 + 4R^4 \right) K_0(r) - 12K_3(r) \right], \quad (5.246B)$$

$$F_Q(r) = \frac{1}{\pi R^6} \left[18K_2(r) + (9r^2 - 8R^2)K_1(r) + \right. \\ \left. + \left(\frac{9}{8}r^4 - 4r^2R^2 + 4R^4 \right) K_0(r) - 18K_3(r) \right], \quad (5.246Г)$$

где

$$K_0(r) = \int P\left(\bar{r}' + \frac{1}{2}\bar{r}\right) P\left(\bar{r}' - \frac{1}{2}\bar{r}\right) d\bar{r}' \quad (5.247a)$$

$$K_1(r) = \int P\left(\bar{r}' + \frac{1}{2}\bar{r}\right) P\left(\bar{r}' - \frac{1}{2}\bar{r}\right) r'^2 d\bar{r}' \quad (5.247б)$$

$$K_2(r) = \int P\left(\bar{r}' + \frac{1}{2}\bar{r}\right) P\left(\bar{r}' - \frac{1}{2}\bar{r}\right) r'^4 d\bar{r}' \quad (5.247B)$$

$$K_3(r) = \int P\left(\bar{r}' + \frac{1}{2}\bar{r}\right) P\left(\bar{r}' - \frac{1}{2}\bar{r}\right) (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 d\bar{r}' \quad (5.247Г)$$

Заметим, что по сути дела произведение $P\left(\bar{r}' + \frac{1}{2}\bar{r}\right) P\left(\bar{r}' - \frac{1}{2}\bar{r}\right)$ определяет область пересечения двух кругов диаметром $D = r_{\max}$.

Введем прямоугольную систему координат, оси которой параллельны и перпендикулярны вектору \bar{r} . Пусть p и q – составляющие вектора \bar{r}' на этих осях соответственно. При этом

$$r'^2 = p^2 + q^2, \quad r'^4 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4, \quad (\bar{r} \cdot \bar{r}')^2 = r^2 p^2, \quad d\bar{r}' = dpdq.$$

Рассмотрим диапазон изменения переменных p и q , соответствующий области перекрытия двух кругов диаметром $D = r_{\max}$, центры которых определяются координатами

$$\left(p = \frac{1}{2}r, q = 0 \right) \quad \text{и} \quad \left(p = -\frac{1}{2}r, q = 0 \right). \quad \text{При} \quad \text{этом}$$

$$P\left(\bar{r}' + \frac{1}{2}\bar{r}\right) P\left(\bar{r}' - \frac{1}{2}\bar{r}\right) \neq 0. \quad \text{Выполнив соответствующую замену}$$

переменных, получаем

$$K_0(r) = \iint_{\Sigma} P(r) dpdq, \quad (5.248a)$$

$$K_1(r) = \iint_{\Sigma} P(r)(p^2 + q^2) dpdq, \quad (5.248\text{б})$$

$$K_2(r) = \iint_{\Sigma} P(r)(p^2 + q^2)^2 dpdq, \quad (5.248\text{в})$$

$$K_3(r) = \iint_{\Sigma} P(r)r^2 p^2 dpdq \quad (5.248\text{г})$$

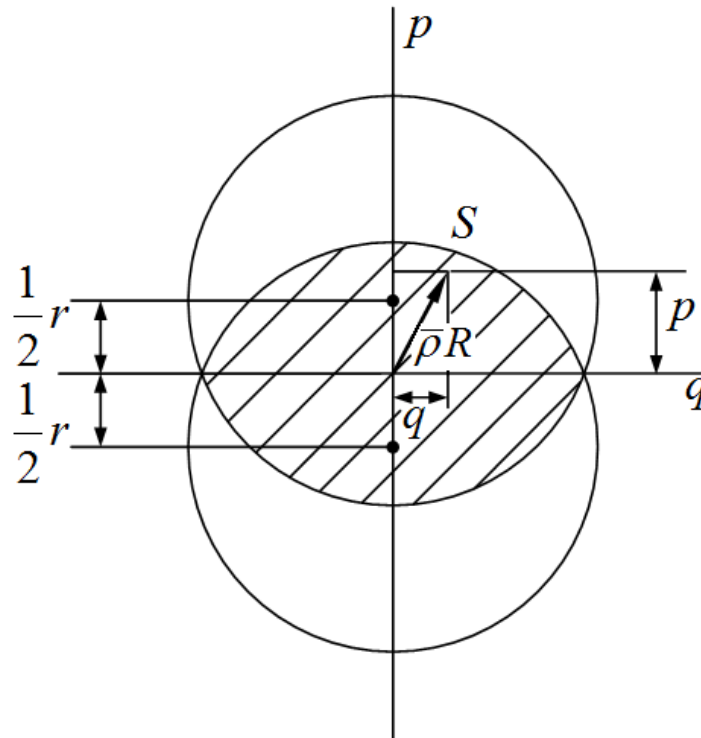


Рис. 5.20. Определение взаимосвязи координат p и q точек зоны перекрытия кругов

Определим взаимосвязь координат p и q точек зоны перекрытия кругов. Для этого обратимся к рис. 5.20, на котором изображены два круга, центры которых смещены вдоль оси p в разные стороны на одинаковое расстояние, равное $\frac{1}{2}r$. В соответствии с рисунком координата p произвольной точки S в зоне перекрытия может изменяться в пределах

$$-\left(R - \frac{1}{2}r\right) \leq p \leq R - \frac{1}{2}r \quad (5.249)$$

При этом значение координаты q должно удовлетворять условию:

$$-\sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}r + p\right)^2} \leq q \leq \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}r + p\right)^2} \quad (5.250)$$

Учитывая значения пределов, определяемых соотношениями (5.249) и (5.250), введем функцию вида:

$$J(m, n; r, 2) = \int_{-\left(R - \frac{1}{2}r\right)}^{R - \frac{1}{2}r} p^m \int_{-\sqrt{R^2 - \left(p + \frac{1}{2}r\right)^2}}^{\sqrt{R^2 - \left(p + \frac{1}{2}r\right)^2}} q^n dpdq \quad (5.251)$$

При этом

$$J(0, 0; r) = \iint dpdq \quad (5.252a)$$

$$J(2, 0; r) = \iint p^2 dpdq \quad (5.252б)$$

$$J(0, 2; r) = \iint q^2 dpdq \quad (5.252в)$$

$$J(4, 0; r) = \iint p^4 dpdq \quad (5.252г)$$

$$J(2, 2; r) = \iint p^2 q^2 dpdq \quad (5.252д)$$

$$J(0, 4; r) = \iint q^4 dpdq \quad (5.252e)$$

Сопоставив соотношения (5.252a)–(5.252e) с соотношениями (5.248a)–(5.248г), находим, что

$$K_0(r) = P(r)J(0, 0; r) \quad (5.253a)$$

$$K_1(r) = P(r)[J(2, 0; r) + J(0, 2; r)] \quad (5.253б)$$

$$K_2(r) = P(r)[J(4, 0; r) + 2J(2, 2; r) + J(0, 4; r)] \quad (5.253в)$$

$$K_3(r) = P(r)J(2, 0; r)r^2. \quad (5.253г)$$

Выполнив в выражении (5.251) интегрирование по q и учитывая, что в соотношениях (5.252a)–(5.252e) число n -четное, получаем

$$J(m, n; r) = \frac{4}{n+1} \int_0^{R - \frac{1}{2}r} \left[R^2 - \left(p + \frac{1}{2}r \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} p^m dp \quad (5.254)$$

Выполнив подстановку $V = \frac{2p+r}{D}$, получаем

$$J(m, n; u) = \frac{4}{n+1} R^{m+n+2} \int_u^1 (V-u)^m (1-V^2)^{\frac{n+1}{2}} dV, \quad (5.255)$$

где $u = \frac{r}{D}$. Это выражение позволяет выражения (5.252a)–(5.252e)

представить в виде:

$$J(0, 0; u) = 4R^2 \int_u^1 \sqrt{1-V^2} dV \quad (5.256a)$$

$$J(2, 0; u) = 4R^4 \int_u^1 (V-u)^2 \sqrt{1-V^2} dV \quad (5.256б)$$

$$J(0, 2; u) = \frac{4}{3} R^4 \int_u^1 (1-V^2) \sqrt{1-V^2} dV \quad (5.256в)$$

$$J(4, 0; u) = 4R^6 \int_u^1 (V-u)^4 \sqrt{1-V^2} dV \quad (5.256г)$$

$$J(2, 2; u) = \frac{4}{3} R^6 \int_u^1 (V-u)^2 (1-V^2) \sqrt{1-V^2} dV \quad (5.256д)$$

$$J(0, 4; u) = \frac{4}{5} R^6 \int_u^1 (1-V^2)^2 \sqrt{1-V^2} dV \quad (5.256e)$$

И, наконец, введем функцию:

$$L(m, n; u) = \int_u^1 V^m (1-V^2)^{\frac{n+1}{2}} dV \quad (5.257)$$

При этом имеем

$$J(0, 0; u) = 4R^2 L(0, 0; u) \quad (5.258a)$$

$$J(2, 0; u) = 4R^4 \left[L(2, 0; u) - uL(1, 0; u) + \frac{1}{4} u^2 L(0, 0; r) \right] \quad (5.258б)$$

$$J(0, 2; u) = \frac{4}{3} R^4 L(0, 2; u) \quad (5.258в)$$

$$J(4, 0; u) = 4R^6 \left[L(4, 0; u) - 2uL(3, 0; u) + \frac{3}{2} u^2 L(2, 0; u) - \frac{1}{2} u^3 L(1, 0; u) + \frac{1}{16} u^4 L(0, 0; u) \right] \quad (5.258г)$$

$$J(2, 2; u) = \frac{4}{3} R^6 \left[L(2, 2; u) - uL(1, 2; u) + \frac{1}{4} u^2 L(0, 2; u) \right] \quad (5.258д)$$

$$J(0, 4; u) = \frac{4}{5} R^6 L(0, 4; u), \quad (5.258e)$$

где $L(0,0;u) = \int_u^1 \sqrt{1-V^2} dV$,

$$L(1,0;u) = \int_u^1 V \sqrt{1-V^2} dV,$$

$$L(2,0;u) = \int_u^1 V^2 \sqrt{1-V^2} dV,$$

$$L(3,0;u) = \int_u^1 V^3 \sqrt{1-V^2} dV,$$

$$L(4,0;u) = \int_u^1 V^4 \sqrt{1-V^2} dV,$$

$$L(1,2;u) = \int_u^1 V(1-V^2) \sqrt{1-V^2} dV = L(1,0;u) - L(3,0;u),$$

$$L(2,2;u) = \int_u^1 V^2(1-V^2) \sqrt{1-V^2} dV = L(2,0;u) - L(4,0;u),$$

$$L(0,4;u) = \int_u^1 (1-V^2)^2 \sqrt{1-V^2} dV = L(0,0;u) - 2L(2,0;u) + L(4,0;u).$$

Используя формулы интегрирования из таблицы неопределенных интегралов [23], находим выражения, определяющие функцию $L(m, n; u)$ при $m = 0, 1, 2, 3$ и при $n = 0, 2$:

$$L(0,0;r) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin u - \frac{1}{2} u \sqrt{1-u^2}. \quad \text{Заметим, что } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin u\right) = u.$$

При этом $\frac{\pi}{2} - \arcsin u = \arccos u$. Тогда

$$L(0,0;u) = \frac{1}{2} \arccos u - \frac{1}{2} u \sqrt{1-u^2} \quad (5.259a)$$

$$L(1,0;u) = \frac{1}{3} (1-u^2) \sqrt{1-u^2} \quad (5.259б)$$

$$L(2,0;u) = \frac{1}{8} \arccos u + \frac{1}{8} u (1-2u^2) \sqrt{1-u^2} \quad (5.259в)$$

$$L(3,0;u) = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} u^2 - u^4 \right) \sqrt{1-u^2} \quad (5.259г)$$

$$L(4,0;u) = \frac{1}{16} \arccos u + \left(\frac{1}{16} u + \frac{1}{24} u^3 - \frac{1}{6} u^5 \right) \sqrt{1-u^2} \quad (5.259д)$$

$$L(1,2;u) = \frac{1}{5} (1-u^2)^2 \sqrt{1-u^2} \quad (5.259е)$$

$$L(2,2;u) = \frac{1}{16} \arccos u + \left(\frac{1}{16} u - \frac{7}{24} u^3 + \frac{1}{6} u^5 \right) \sqrt{1-u^2} \quad (5.259ж)$$

$$L(0,2;u) = \frac{3}{8} \arccos u - \frac{1}{8} u(5 - 2u^2) \sqrt{1-u^2} \quad (5.259з)$$

$$L(0,4;r) = \frac{5}{16} \arccos u - \left(\frac{11}{16} u - \frac{13}{24} u^3 + \frac{1}{6} u^5 \right) \sqrt{1-u^2} \quad (5.259u)$$

Подставив выражения (5.259a)–(5.259u) в выражения (5.258a)–(5.258e), получаем

$$J(0,0;u) = R^2 [2 \arccos u - 2u \sqrt{1-u^2}],$$

$$J(2,0;u) = R^4 \left[\left(\frac{1}{2} + 2u^2 \right) \arccos u - \left(\frac{13}{6} u + \frac{1}{3} u^3 \right) \sqrt{1-u^2} \right],$$

$$J(4,0;u) = R^6 \left[\left(\frac{1}{4} + 3u^2 + 2u^4 \right) \arccos u + \left(-\frac{113}{60} u - \frac{187}{30} u^3 + \frac{88}{15} u^5 \right) \sqrt{1-u^2} \right],$$

$$J(2,2;u) = R^6 \left[\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2} u^2 \right) \arccos u + \left(-\frac{9}{20} u - \frac{7}{45} u^3 + \frac{1}{45} u^5 \right) \sqrt{1-u^2} \right],$$

$$J(0,2;u) = R^4 \left[\frac{1}{2} \arccos u - \left(\frac{5}{6} u - \frac{1}{3} u^3 \right) \sqrt{1-u^2} \right],$$

$$J(0,4;u) = R^6 \left[\frac{1}{4} \arccos u - \left(\frac{11}{20} u - \frac{13}{30} u^3 + \frac{2}{15} u^5 \right) \sqrt{1-u^2} \right].$$

Подставив полученные выражения в выражения (5.253a)–(5.253e), преобразуем их к виду:

$$K_0(u) = R^2 [2 \arccos u - 2u \sqrt{1-u^2}],$$

$$K_1(u) = R^4 \left[(1 + 2u^2) \arccos u - 3u \sqrt{1-u^2} \right],$$

$$K_2(u) = R^6 \left[\left(\frac{2}{3} + 4u^2 + 2u^4 \right) \arccos u + \left(-\frac{10}{3} u - \frac{55}{9} u^3 + \frac{52}{9} u^5 \right) \sqrt{1-u^2} \right],$$

$$K_3(u) = R^6 \left[(2u^2 + 8u^4) \arccos u - \left(\frac{26}{3} u^3 + \frac{4}{3} u^5 \right) \sqrt{1-u^2} \right].$$

При этом формулы (5.246a)–(5.246e) принимают вид:

$$F_C(u) = \frac{1}{\pi} [2 \arccos u - 2u \sqrt{1-u^2}] \quad (5.260a)$$

$$F_L(u) = \frac{1}{\pi} [6 \arccos u - (14u - 8u^3) \sqrt{1-u^2}] \quad (5.260б)$$

$$F_S(u) = \frac{1}{\pi} [8 \arccos u - \left(24u - \frac{86}{3} u^3 + \frac{32}{3} u^5 \right) \sqrt{1-u^2}] \quad (5.260в)$$

$$F_Q(u) = \frac{1}{\pi} [12 \arccos u - (44u - 64u^3 + 32u^5) \sqrt{1-u^2}] \quad (5.260г)$$

Неизвестным в выражении (5.244) остаётся выражение, определяющее фазовую структурную функцию. Как уже отмечалось,

в соответствии с теорией турбулентности Колмогорова структурная функция флуктуаций показателя преломления определяется соотношением

$$D_n(r) = C_n^2 r^{2/3} \text{ при } l_0 < r < L_0.$$

При этом, как было показано, фазовая структурная функция может быть записана в виде:

$$D(r) = Ar^{5/3}, \quad (5.261)$$

где коэффициент A определяется длиной пути распространения волнового фронта, длиной волны излучения и некоторыми условиями окружающей среды. Введённая Фридом величина r_0 , которая имеет размерность длины и определяется как

$$r_0 \approx \left(\frac{6,88}{A} \right)^{3/5}, \quad (5.262)$$

позволяет фазовую структурную функцию определить выражением вида:

$$D(r) = 6,88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/3} \quad (5.263)$$

Принятые обозначения позволяют это выражение представить в виде:

$$D(u) = 6,88 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} u^{5/3} \quad (5.264)$$

При этом выражение (5.244) и выражения (5.236) принимают вид:

$$\langle \Delta_j \rangle = 27,52 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \int_0^1 F_j(u) u^{8/3} du \quad (5.265)$$

$$\langle (a_L)^2 \rangle = 27,52 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \int_0^1 [F_C(u) - F_L(u)] u^{8/3} du \quad (5.266a)$$

$$\langle (a_S)^2 \rangle = 27,52 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \int_0^1 [F_L(u) - F_S(u)] u^{8/3} du \quad (5.266б)$$

$$\langle (a_Q)^2 \rangle = 27,52 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \int_0^1 [F_L(u) - F_Q(u)] u^{8/3} du \quad (5.266в)$$

$$\langle (a_P)^2 \rangle = 27,52 \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3} \int_0^1 [F_S(u) - F_Q(u)] u^{8/3} du \quad (5.266г)$$

Применив известные соотношения

$$\int_0^1 z^{2\alpha+1} (1-z^2)^\beta dz = \frac{1}{2} B(\alpha+1, \beta+1), \quad (5.267a)$$

$$\int_0^1 z^\alpha \arccos z dz = \frac{1}{2(\alpha+1)} B\left(\frac{\alpha+2}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (5.267б)$$

где $B(\alpha, \beta)$ – хорошо известная бета-функция. Обозначив интеграл

$$I_j = \int_0^1 F_j(u) u^{8/3} du, \quad (5.268)$$

находим, что

$$I_C \cong 3,68 \times 10^{-2},$$

$$I_L \cong 4,73 \times 10^{-3},$$

$$I_S \cong 3,96 \times 10^{-3},$$

$$I_Q \cong 2,29 \times 10^{-3}.$$

При этом

$$\langle \Delta_C \rangle \cong 1,013 (D/r_0)^{5/3} \quad (5.269a)$$

$$\langle \Delta_L \rangle \cong 0,1301 (D/r_0)^{5/3} \quad (5.269б)$$

$$\langle \Delta_S \rangle \cong 0,1090 (D/r_0)^{5/3} \quad (5.269в)$$

$$\langle \Delta_Q \rangle \cong 0,0630 (D/r_0)^{5/3} \quad (5.269г)$$

В результате получаем

$$\langle (a_L)^2 \rangle \cong 0,883 (D/r_0)^{5/3} \quad (5.270a)$$

$$\langle (a_S)^2 \rangle \cong 0,0211 (D/r_0)^{5/3} \quad (5.270б)$$

$$\langle (a_Q)^2 \rangle \cong 0,0671 (D/r_0)^{5/3} \quad (5.270г)$$

Значения величин, описываемых выражениями (5.270), определяют среднестатистическую деформацию турбулентной атмосферой формы волнового фронта излучения, падающего на входной зрачок оптической системы. Качество изображения можно оценить относительной величиной освещённости в осевой точке изображения. Нормированная интенсивность в параксиальном изображении точки определяется приближённой формулой [24]:

$$i(P'_0) = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \omega^2, \quad (5.271)$$

где $\omega^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{m=n} \frac{A_{nm}^2}{n+1}$. Физически величина ω^2 не может быть меньше

нуля. Поэтому, если правую часть выражения (5.271) рассматривать

как первые два члена разложения в степенной ряд экспоненты, то это выражение можно представить в виде:

$$i(P'_0) = \exp(-k^2 \omega^2), \quad (5.272)$$

где k – волновое число: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

В соответствии с выражениями (5.225) и (5.270) величины

$$\langle A_{11}^2 \rangle = \frac{4}{\pi} \langle (a_L)^2 \rangle, \quad \langle A_{20}^2 \rangle = \frac{3}{\pi} \langle (a_S)^2 \rangle, \quad \langle A_{22}^2 \rangle = \frac{6}{\pi} \left[\langle (a_Q)^2 \rangle - \langle (a_S)^2 \rangle \right].$$

При этом

$$\omega^2 = \frac{1}{\pi} \left[2 \langle (a_L)^2 \rangle - \langle (a_S)^2 \rangle + 2 \langle (a_Q)^2 \rangle \right] \quad (5.273)$$

Подставив соотношения (5.270) в выражение (5.273), получаем

$$\omega^2 = \frac{1,879}{\pi} \left(\frac{D}{r_0} \right)^{5/3}.$$

Из сопоставления выражений (5.270) следует, что наибольшая деформация волнового фронта определяется величиной $\langle (a_L)^2 \rangle \cong 0,883(D/r_0)^{5/3}$, т.е. наклоном волнового фронта. Наклон волнового фронта вполне можно компенсировать, например, соответствующим наклоном плоского зеркала оптического устройства. При этом будем иметь $\langle (a_L)^2 \rangle \cong 0$. В этом случае величина

ω^2 будет равна $\omega_k^2 = \frac{1}{\pi} \left[2 \langle (a_Q)^2 \rangle - \langle (a_S)^2 \rangle \right] = \frac{0,113}{\pi} \left(\frac{D_k}{r_0} \right)^{5/3}$. При

$D = D_k$ величина $\omega^2 = 16,63\omega_k^2$. При $\omega^2 = \omega_k^2$ диаметр $D_k = 5,4D$. Эффективность компенсации наклона волнового фронта очевидна.

6.1. Краткий исторический очерк развития оптических систем астрономических телескопов

Глаз с его замечательной способностью адаптироваться к очень широкому диапазону яркостей – от уровня яркости дневного неба к уровню яркости ночного – является не только приёмником подавляющего объёма необходимой человеку информации, но и приносит наблюдателю огромное эстетическое наслаждение.

Различимость звёзд во время сумерек – это сочетание контраста звёзд на фоне неба и адаптации глаз. Когда в результате вращения Земли Солнце опускается под горизонт на 18° , яркость неба в зените уменьшается в 400000 раз и наступает астрономическая ночь, при этом в ясную погоду вдали от света городских огней взору открывается изумительная и таинственная красота ночного звёздного неба.

В ясную, безлунную ночь невооружённым глазом над горизонтом можно видеть около 3000 звёзд. Ещё во втором веке до Р.Х. один из основоположников астрономии древнегреческий учёный Гиппарх разделил все видимые на небе невооружённым глазом звёзды по яркости на шесть групп. Самые яркие звёзды он назвал звёздами 1-й величины, а самые слабые – звёздами 6-й величины. Между ними он расположил звёзды 2-й, 3-й, 4-й и 5-й величины. При переходе от одной величины к следующей глаз ощущает одинаковый перепад освещённости (блеска). В 1846 году немецкий анатом и физиолог Эрнест Генрих Вебер (1795–1878) установил, что чувствительность глаза к изменению освещённости пропорциональна относительному

изменению освещённости, т.е. $\Delta m = c \left(\frac{\Delta E}{E} \right)$. Немецкий физик,

психолог, философ-идеалист и писатель-сатирик (псевдоним – доктор Мизес) Густав Теодор Фехнер (1801–1887) в 1860 году сделал допущение, что едва заметные изменения в ощущении глазом света можно считать дифференциалами. Это позволило ему выразить основной психофизический закон в виде дифференциального уравнения:

$$dm = c \frac{dE}{E} \quad (6.1)$$

Интегрирование этого уравнения привело к установлению зависимости интенсивности раздражения глаза светом от освещённости в виде

$$m = c \ln E + k, \quad (6.2)$$

где c и k – некоторые постоянные. Эту зависимость принято называть основным психофизическим законом Вебера-Фехнера. Последнее выражение удобно переписать в виде: $m = c \frac{\lg E}{\lg e} + k = \tilde{c} \lg E + k$.

Отсюда следует, что $m_1 - m_2 = \tilde{c} \lg \frac{E_1}{E_2}$. Звёздный каталог Гиппарха –

древнейший из дошедших до нас. Сопоставляя оценку звёздных величин Гиппархом с современными объективными измерениями освещённости от этих же звёзд, установлено, что когда одна звезда имеет звёздную величину на единицу больше, чем другая, то освещённость от первой в 2,5 раза меньше, чем от второй. Таким образом, при $m_1 - m_2 = 1$: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{2,5} = 0,4$. Отсюда следует, что

$\tilde{c} = -\frac{1}{0,398}$. В 1850 году по предложению Погсона отношение блеска

звёзд при разности в пять звёздных величин было принято равным 100. Это означает, что отношение блеска звёзд, отличающихся на одну звёздную величину, равно $\sqrt[5]{100} = 2,512$. Поскольку при $m_1 - m_2 = 5$ отношение $\frac{E_1}{E_2} = 0,01$, то $\tilde{c} = -2,5$. При этом

$m_1 - m_2 = -2,5 \lg \frac{E_1}{E_2}$. Отсюда следует, что

$$\frac{E_1}{E_2} = 2,512^{m_2 - m_1} \quad (6.3)$$

Последнее выражение, определяющее зависимость между блеском двух звёзд E_1 и E_2 и их видимыми звёздными величинами m_1 и m_2 , называют формулой Погсона. Если теперь приписать какой-либо звезде фиксированную звёздную величину, т.е. выбрать нуль-пункт, то этим соотношением будут определены видимые звёздные величины m всех звёзд. Для расчёта световых и энергетических характеристик приёмников различной спектральной чувствительности необходимо иметь эталонную звезду нулевой звёздной величины. Нуль-пункт для системы звёздных величин был условно

определён по группе выбранных звёзд в области Полярной звезды, называемых Северным Полярным рядом. В видимой области спектра за эталонную звезду нулевой звёздной величины принимается та, которая создаёт на границе атмосферы освещённость, равную $E_0 = 2,78 \cdot 10^{-6} \text{ лк} = 2,78 \cdot 10^{-10} \frac{\text{лк}}{\text{см}^2}$. Величина энергетической освещённости, создаваемой эталонной звездой нулевой звёздной величины, принимается равной

$$E_{0Э} = 3,92 \cdot 10^{-13} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}.$$

Наиболее близка к нулевой звёздная величина таких хорошо известных звёзд, как Вега (или α Лир) и Капелла (или α Возничего). Интегральную освещённость, создаваемую звездой звёздной величины m , можно рассчитать, используя формулу Погсона:

$$E, \text{ лк} = E_0 \cdot 2,512^{-m} = 2,78 \cdot 10^{-6} \cdot 2,512^{-m} \quad (6.4)$$

$$E, \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} = E_{0Э} \cdot 2,512^{-m} = 3,92 \cdot 10^{-13} \cdot 2,512^{-m} \quad (6.5)$$

Вся история астрономии связана с созданием новых инструментов, позволяющих повысить эффективность наблюдений.

6.1.1. Рефракторы

Первые зрительные трубы были изготовлены в маленьком городке Миддельбурге на голландском острове Вальхерен. Первое обстоятельное описание настоящей конструкции телескопа относится к 1590 году, когда Захариас Янсен (сын очкового мастера Ганса Янсена из Миддельбурга) изобрёл этот прибор. Очковый мастер Ганс Липперсгей, проживавший там же, 2 октября 1608 года представил Генеральным штатам изобретённую трубу, ходатайствуя о выдаче ему патента. Но патент на это изобретение ему не был выдан, так как приоритет изобретения подвергся яростному оспариванию со стороны ряда претендентов на это же изобретение. Как бы то ни было, но первые зрительные трубы были изготовлены и слухи об этих новых оптических инструментах быстро распространились в Европе. В 1609 году, через год после появления первых зрительных труб в Голландии, известие об этом изобретении дошло до знаменитого учёного Галилея (1564–1642). По возвращении в свою лабораторию в Падуе, не зная никаких подробностей о конструкции, он изготовил там свой первый телескоп с прямым изображением, смонтировав

плосковыпуклую и плосковогнутую линзы в короткой свинцовой трубке [24]. В ночь на 7 января 1610 года оптический прибор был направлен на звёздное небо. Эта дата считается началом эпохи телескопических наблюдений. Несмотря на несовершенство телескопов, Галилей в течение двух первых лет наблюдений сумел сделать большое количество открытий.

Как известно, все звёзды эквивалентны светящимся точкам даже при наблюдении с помощью самых крупных телескопов. При наблюдении невооружённым глазом световой поток от звезды, падающий на сетчатку глаза, равен освещённости в плоскости зрачка

глаза, умноженной на площадь входного зрачка, т.е. $\Phi = \frac{1}{4} \pi E d_{\Gamma}^2$. При

наблюдении с помощью телескопа световой поток от звезды, падающий на сетчатку глаза, равен освещённости в плоскости входного зрачка телескопа, умноженной на его площадь и коэффициент пропускания оптической системы телескопа, т.е.

$\Phi_T = \frac{1}{4} \pi E D^2 (1 - \eta^2)$, где η – коэффициент центрального экранирования зрачка по диаметру (для линзовых объективов $\eta = 0$). Таким

образом, световой поток на сетчатке глаза при наблюдении с помощью телескопа больше светового потока при непосредственном наблюдении звезды в отношении

$$i = \frac{\Phi_T}{\Phi_{\Gamma}} = \left(\frac{D}{d_{\Gamma}} \right)^2 (1 - \eta^2) = \Gamma^2 k^2 (1 - \eta^2), \quad (6.6)$$

где $\Gamma = \frac{D}{D'}$; $k = \frac{D'}{d_{\Gamma}}$; D' – диаметр выходного зрачка телескопа, при этом $k \leq 1$.

Угловое увеличение изображения, образованного изготовленной Галилеем трубой, имеющей $D = 45$ мм и $f' \approx 500$ мм, равно $\Gamma = 34^x$. При этом величина $D' = 1,32$ мм. Полагая $d_{\Gamma} \approx 5$ мм, при $\eta = 0$ получаем $i \approx 80$. Отсюда следует, что Галилей впервые в мире с помощью своего телескопа увидел в 80 раз более яркие звёзды, горящие на уменьшенном до черноты фоне ночного неба!

Пусть предельно видимая невооружённым глазом звезда создаёт на зрачке глаза освещённость E_{Γ} . Такая же освещённость на зрачке глаза будет при освещённости на входном зрачке объектива

телескопа, равной $E_T = \frac{E_{\Gamma}}{i}$. При этом

$$\frac{E_G}{E_T} = \Gamma^2 k^2 (1 - \eta^2) \quad (6.7)$$

Логарифмируя это выражение, получаем

$$\lg E_G - \lg E_T = 2 \lg \Gamma + 2 \lg k + \lg(1 - \eta^2) \quad \text{или}$$

$$m_T - m_G = 5(\lg \Gamma + \lg k) + 2.5 \lg(1 - \eta^2) \quad (6.8)$$

При наблюдении невооружённым глазом предельная звёздная величина $m_G = 6,5$. При этом звёздная величина предельно видимой звезды с помощью телескопа равна

$$m_T \approx 6,5 + 5(\lg \Gamma + \lg k) + 2,5 \lg(1 - \eta^2) \quad (6.9)$$

Эта величина определяет проникающую силу телескопа лишь в первом приближении, поскольку не учитывались реальное состояние атмосферы, характер коррекции аберраций изображения, образованного оптикой телескопа, коэффициент пропускания оптики и т.д. Легко убедиться, что при $D = 45$ мм, $\Gamma = 34^X$, $d_G \approx 5$ мм и $\eta = 0$ величина $m_T > 10$.

Пусть $k = 1$. При этом имеем

$$m_T \approx 6,5 + 5 \lg \frac{D}{d_G} + 2,5 \lg(1 - \eta^2) \quad (6.10)$$

Отсюда зависимость проникающей силы телескопа от диаметра входного зрачка инструмента вполне очевидна.

Трубу, объектив и окуляр которой выполнены в виде положительной линзы, предложил выдающийся немецкий астроном и физик Иоганн Кеплер (1571–1630). В этой трубе, известной под названием "астрономическая труба" или "труба Кеплера", в плоскости изображения, образованного объективом, можно поместить перекрестье. Благодаря перекрестью появилась возможность "наводить" трубу на определённую точку предмета, а, следовательно, повысить точность угловых измерений. Труба Кеплера впервые была изготовлена и использована для астрономических измерений астрономом-иезуитом Христофором Шейнером в 1614 году.

В это же время первые зрительные трубы были завезены в Москву и упоминания о зрительных трубах впервые встречаются в описях царского и придворного имущества. А ещё через несколько лет в Москве мастера-умельцы "зеркального ряда" уже предлагали зрительные трубы собственного изготовления.

Выдающиеся открытия в результате первых инструментальных наблюдений определили потребность в повышении качества

изготовления линз, что привело к превращению оптики в XVII веке из "чистой" науки в науку прикладную, имеющую огромное практическое значение. Эффективность применения зрительных труб существенно снижалась из-за хроматических aberrаций, вносимых линзами. Используя идеи ахроматизации изображения, предложенные действительным членом Петербургской академии наук Л. Эйлером, английский оптик Д. Доллонд в 1758 году создал конструкцию и изготовил ахроматический объектив из двух линз из двух стекол с различной дисперсией (из крона и флинта). Крупнейший из созданных Д. Доллондом рефракторов имел диаметр объектива 4 дюйма (11 см).

Теория ахроматизации была разработана Л. Эйлером. Однако необходимо было решить не менее важный практический вопрос изготовления различных сортов оптического стекла. Над этим трудились лучшие стекловары многих стран мира. Работали над этим и в России. Наиболее плодотворными оказались исследования академиков Петербургской академии наук И.Э. Цейгера и М.В. Ломоносова.

Следующий шаг в развитии ахроматической оптики связан с именем Йозефа Фраунгофера. Крупнейшим его достижением был изготовленный в 1824 году ахроматический телескоп-рефрактор "Большой Фраунгофер". Начиная с 1825 года по 1839 год, на этом инструменте работал В.Я. Струве, первый директор Пулковской обсерватории, академик Петербургской академии наук. Главным инструментом Пулковской обсерватории стал великолепный рефрактор работы Мерца и Малера с диаметром 15 дюймов (38 см) и длиной 7 м. Пулковская обсерватория была оснащена лучшими в то время угломерными инструментами, позволявшими с невиданной до той поры точностью измерять координаты звёзд. Пулковские звёздные каталоги принесли ей всемирную славу.

"Ни один астроном не может считать себя вполне усвоившим современную наблюдательную астрономию в её наиболее разработанной форме, если он не познакомится с Пулковской обсерваторией во всех её особенностях, – писал английский астроном прошлого века Эри. – Я ничуть не сомневаюсь в том, – продолжает он, – что одно пулковское наблюдение стоит по меньшей мере двух, сделанных где бы то ни было в другом месте".

При создании нового рефрактора два обстоятельства определяют успех – высокое качество оптического стекла и искусство его обработки. Настойчивость в достижении поставленной цели

позволила швейцарскому оптику Пьеру Гинану успешно решить задачу получения качественного стекла. В 1799 году после семи лет упорного труда Гинан отлил несколько отличных дисков диаметром от 10 до 15 сантиметров, что по тем временам было неслыханным успехом. Спустя шесть лет Гинан отправился в Мюнхен, где стал первым консультантом Фраунгофера в организации фабричного производства хороших флинтowych и кроновых стёкол. Фраунгофером была разработана оригинальная конструкция станка для полировки линз и предложен принципиально новый способ обработки линз методом притира.

Знаменитый американский оптик Альван Кларк по профессии был живописцем-портретистом, в юности увлекался шлифовкой и полировкой старых линз. По совету старшего сына Джоржа А. Кларк решил заняться изготовлением телескопов. Так возникла крупнейшая в западном полушарии оптическая фирма "Альван Кларк и сыновья". Объективы изготавливались в американском Кембридже, причём испытание их оптического качества производилось по искусственной звезде в тоннеле длиной 70 метров.

В 1878 году Пулковская обсерватория обратилась к фирме Кларка с заказом на изготовление 30-дюймового, самого крупного в мире рефрактора. На создание этого инструмента русское правительство ассигновало 300 000 рублей. Заказ был выполнен за полтора года, причём объектив изготовил сам Альван Кларк из стёкол парижской фирмы "Фейль", а механическая часть телескопа была сделана немецкой фирмой "Репсольд". Новый Пулковский рефрактор оказался одним из лучших рефракторов мира.

В 1897 году для Йеркской обсерватории, расположенной недалеко от Чикаго, фирмой "Альван Кларк и сыновья" был изготовлен объектив диаметром 40 дюймов (точнее, 107 см).

Важно отметить, что в наше время изготовление линз диаметром до 500 мм проблем не вызывает, а предельный диаметр изготовленных высококачественных линз может достигать порядка 700–750 мм. Отсюда следует, что резервы разумного увеличения диаметра рефракторов вполне исчерпаны в XIX веке фирмой "Альван Кларк и сыновья". В истории астрономии лучшие рефракторы Альвана Кларка сыграли огромную роль. Успешная работа на этих инструментах продолжается и поныне.

6.1.2. Рефлекторы

Хроматические aberrации однокомпонентных линзовых систем и вторичный спектр двухлинзовых ахроматов весьма заметно влияют на качество образованного ими изображения. Поэтому вполне естественно, что не могла не возникнуть мысль о замене линзовых компонентов отражательными (зеркальными).

Свойство отражающих поверхностей формировать изображение бесконечно удалённых предметов известно со времён Архимеда. Уже в 1616 году, т.е. непосредственно после создания телескопов по схемам Галилея и Кеплера, Н. Цукки была предложена идея создания зеркального телескопа (или рефлектора). Оптическую схему телескопа, состоящего из большого вогнутого и малого выпуклого зеркал, отражающая поверхность которых имела форму параболоида вращения, впервые предложил французский учёный Марен Мерсенн (1588–1648) в 1634 году. Оптическую схему объектива телескопа, состоящего из большого вогнутого зеркала с параболоидной формой отражающей поверхности и малого вогнутого зеркала с эллипсоидной формой отражающей поверхности предложил шотландский математик и астроном Джеймс Грегори (1638–1675) в 1663 году. Оптическую схему объектива телескопа, состоящего из двух отражающих поверхностей, первая из которых имеет форму вогнутого параболоида вращения, а вторая поверхность (малое зеркало) имеет форму выпуклого гиперboloида вращения, предложил Г. Кассегрен в 1672 году.

Заслуга создания первого рефлектора, пригодного для наблюдения, принадлежит английскому математику, механику, астроному и физики Исааку Ньютону (1643–1727), который в 1668 году собственноручно изготовил рефлектор с вогнутым зеркалом из зеркальной бронзы диаметром $D = 25$ мм при фокусном расстоянии $f' = 165$ мм, при этом для вывода изображения из падающего на зеркало пучка лучей И. Ньютон применил диагональное плоское зеркало. В 1671 году Ньютон построил второй зеркальный телескоп, диаметр главного зеркала которого $D = 34$ мм при фокусном расстоянии $f' = 159$ мм. Этот телескоп в настоящее время хранится в Музее Лондонского королевского общества. Оптические схемы телескопа Мерсенна, объективов телескопа Грегори, Кассегрена и Ньютона показаны на рис.б.1а, б, в, г соответственно.

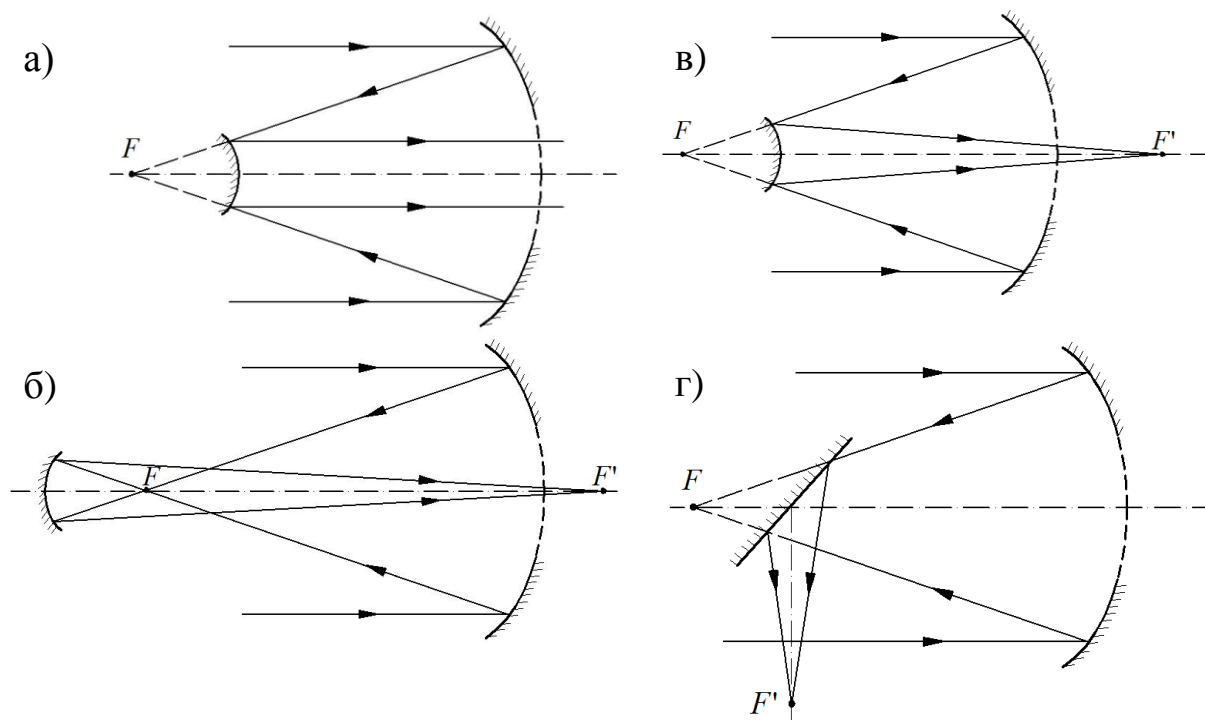


Рис. 6.1. Оптические схемы рефлекторов:
 а) – Мерсенна, б) – Грегори, в) – Кассегрена, г) – Ньютона

Главное преимущество рефлекторов – отсутствие хроматических aberrаций. Однако, влияние отклонений формы отражающих поверхностей от номинальной примерно в 4 раза превышает влияние отклонений формы преломляющих поверхностей на деформацию волнового фронта. И, тем не менее, aberrационные свойства отражающих поверхностей определили потребность в последующем совершенствовании рефлекторов. Уже в 1721 году Джон Гадлей построил ньютоновский рефлектор с бронзовым зеркалом диаметром 15 см при фокусном расстоянии 158 см. С его помощью легко наблюдались спутники Юпитера.

В 1732–1768 годах сначала в Эдинбурге, а затем в Лондоне Джеймс Шорт организовал фабричный выпуск высококачественных рефлекторов. Большинство из них было построено по схеме Грегори, причём самый большой имел главное зеркало диаметром 55 см.

Один из сподвижников Петра I генерал-фельдцейхмейстер русской армии Яков Вилимович Брюс (1670–1735) не только занимался астрономическими наблюдениями в обсерваториях, созданных им в Москве на Сухаревской Башне и в своём подмосковном имении в Глинках, но также сам строил телескопы и изготовлял зеркала к ним.

В Государственном Эрмитаже в Санкт-Петербурге сохранилось вогнутое зеркало для телескопа, изготовленное Брюсом в 1733 году.

Первым, кто начал строить зеркальные телескопы в России, был немецкий оптик И.Г. Лейтман, приглашённый Петербургской академией наук на должность профессора механики и оптики. Немаловажное значение для развития отечественного оптического приборостроения имело созданное Лейтманом руководство по обработке оптического стекла и конструированию оптических инструментов. Однако, основной его заслугой была организация в России замечательной оптической мастерской, которая, по отзывам современников, являлась одной из лучших оптических мастерских Европы.

В творческой деятельности основоположника русской науки Михаила Васильевича Ломоносова (1711–1765) на всём её протяжении важное место занимали вопросы прикладной оптики и особенно конструирование и изготовление различных оптических приборов и инструментов. В частности, в 1761 году он создал целостат, предназначенный для изучения Солнца в неподвижную трубу. В период времени с 1761 по 1765 год М.В. Ломоносов разработал и изготовил несколько разновидностей зеркальных телескопов, отличавшихся от широко известных в то время рефлекторов Грегори и Ньютона. В марте 1762 года Ломоносов решил создать телескоп с наклоном главного зеркала к оси трубы и выполнил все необходимые для этого расчёты. Построив и испробовав его 15 апреля 1762 года, он записал: "Изображение произведено в действие с желательным успехом" [25]. Известно, что через 12 лет (1774 году) аналогичную конструкцию зеркального телескопа предложил Вильям Гершель [26]. Так как работа Ломоносова осталась не опубликованной, то такой зеркальный телескоп считается изобретением Гершеля.

Вызванный Екатериной II в 1767 году в Петербург, Иван Петрович Кулибин (1735–1818) получил должность механика в Петербургской академии наук. За время работы в Академии наук И.П. Кулибин изготовил и отремонтировал большое количество телескопов (в основном зеркальных – по схеме Грегори), разработал технологию обработки поверхностей линз и зеркал, разработал конструкцию и изготовил станок для шлифовки и полировки поверхностей линз и зеркал, установил рецептуру сплавов для изготовления металлических зеркал, а также рецептуру и способы варки флинтowego стекла [27]. Важно отметить, что деятельность

И.П. Кулибина в области инструментальной оптики всегда отвечала первоочередным задачам развития русской науки и техники.

Заметный след в истории телескопостроения оставил Вильям Гершель (1738–1822). Будучи органистом в местной капелле и учителем музыки в городе Бате (Англия), В. Гершель уделял всё свободное время чтению книг по астрономии, оптике и математике. Первый рефлектор Гершель построил по схеме Грегори. Зеркало телескопа имело диаметр 16 см и фокусное расстояние около двух метров. Среди многочисленных телескопов Гершеля особо следует отметить телескоп, изготовленный в 1789 году, диаметр зеркала которого равен 122 см при толщине, равной 9 см. Зеркало было изготовлено из сплава 75 % меди и 25 % олова, обладало массой немногим менее тонны, что приводило к его прогибу под действием собственного веса, а, следовательно, и к ухудшению качества изображения, быстро тускнело, давало трещины и требовало частой переполировки. И, тем не менее, такими не совершенными инструментами Гершель сумел сделать великие открытия.

Среди последователей Вильяма Гершеля следует вспомнить английского пивовара Вильяма Ласселя, который в 1845 году после долгих трудов собственноручно построил отличный по качеству рефлектор с главным зеркалом диаметром 61 см. В 1861 году ему удалось построить вдвое больший рефлектор с главным зеркалом диаметром 122 см. Оба свои телескопа Лассель перевёз на остров Мальту, где и погода была устойчивее и часть южного полушария звёздного неба, недоступная в Англии, была здесь легко наблюдаемой.

Самый крупный рефлектор с металлическим зеркалом был сооружён ирландским аристократом Вильямом Парсоном, носившим титул лорда Росса. Окончив Кембриджский университет и не нуждаясь в средствах, лорд Росс почти полностью отдался научным занятиям. Располагая громадным богатством, он решил соорудить крупнейший в мире телескоп, превзойдя в этом Вильяма Гершеля.

Исполинское зеркало диаметром 2 м и толщиной 15 см при фокусном расстоянии, равном 14 м, было отлито из сплава меди и олова (75 % меди и 25 % олова) весной 1842 года. В феврале 1845 года телескоп лорда Росса стал пригодным для наблюдения. Открытия, сделанные Россом с помощью изготовленного телескопа, трудно переоценить. После смерти Росса зеркало его телескопа быстро потускнело и пришло в негодность. Однако вплоть до первой четверти XX века никому не удавалось создать телескоп более

крупный, чем тот, с которым работал лорд Росс – пожалуй, величайший из любителей астрономии.

6.1.3. Крупнейшие рефлекторы XX века

Во второй половине XIX века французский физик Ж. Фуко и независимо от него немецкий физик Штейнгель изобрели удачный способ серебрения полированной поверхности стекла. Изобретение Фуко и Штейнгеля определило развитие рефлекторов со стеклянными зеркалами. Уже в 1878 году в Париже установили рефлектор со стеклянным зеркалом диаметром 122 см, посеребрённым по методу Фуко. Десять лет спустя, в 1888 году, в Англии был построен (но почти не работал) 153-сантиметровый "стеклянный" рефлектор, созданный Коммоном. Такого же размера рефлектор работы Ричи в 1908 году был установлен в Калифорнии на горе Вилсон и в течение 9 лет этот великолепный по качеству 60-дюймовый рефлектор оставался крупнейшим из действующих телескопов.

В 1917 году на обсерватории Маунт Вилсон установили новый 100-дюймовый рефлектор работы Ричи и этот телескоп был крупнейшим на протяжении последующих 33 лет. Вторым по величине рефлектором в мире на протяжении ряда лет был 205-сантиметровый рефлектор обсерватории Мак-Дональд (Канада), начавший свою работу в 1939 году.

Ещё в 30-х годах прошлого века русские учёные И.В. Гребенщиков и Н.Г. Пономарёв предложили применять в крупногабаритных рефлекторах зеркала с ребристой структурой на тыльной стороне. Это существенно уменьшало вес зеркала при сохранении его жёсткости. Американские оптики использовали идею русских учёных при изготовлении зеркала 200-дюймового рефлектора. И, тем не менее, его масса составляет 13 тонн.

Первым русским оптиком нового времени, собственными руками изготовившим параболоидное зеркало, был Александр Андреевич Чикин (1865–1924). Большой опыт, накопленный в изготовлении отражательных телескопов (рефлекторов), нашёл отражение в книге "Отражательные телескопы (изготовление рефлекторов доступными для любителя средствами)", написанной А.А. Чикиным и изданной в 1915 году Русским обществом любителей мироведения на средства частных пожертвований. Начиная с 1919 года и до последнего дня своей жизни основоположник современного телескопостроения в России А.А. Чикин по приглашению академика Дмитрия Сергеевича Рождественского (1876–1940) плодотворно работал в организованном

им Государственном оптическом институте (ГОИ). Ученики А.А. Чикина стали достойными продолжателями его дела.

Выдающиеся достижения в исследовании аберрационных свойств, в разработке оптических схем зеркальных и зеркально-линзовых объективов и методов их расчёта принадлежат отечественным учёным: профессорам Георгию Георгиевичу Слюсареву (1896–1987) (ГОИ), Дмитрию Дмитриевичу Максутову (1896–1964) (ГАО), Владимиру Николаевичу Чуриловскому (1898–1983) и его ученице Галине Ивановне Цукановой, профессору Михаилу Михайловичу Русинову (1909–2004) (СПб ГИТМО), сотруднику Главной (Пулковской) обсерватории (ГАО) Николаю Николаевичу Михельсону (1918–1996), сотруднику крымской астрофизической обсерватории (КрАО) Геннадию Михайловичу Попову и другим.

Астрономические обсерватории Советского Союза были оснащены первоклассными инструментами, разработанными нашими выдающимися конструкторами, среди которых, прежде всего, следует назвать Николая Георгиевича Пономарёва (1900–1942), Баграта Константиновича Иоаннисиани, Павла Вадимовича Добычина, Михаила Дмитриевича Афанасьева, Владимира Владимировича Демидова, Владимира Александровича Ковалёва, Василия Николаевича Павлова, Александра Семёновича Васильева, Николая Ивановича Валова и многих других. Основным разработчиком и изготовителем телескопов было Ленинградское оптико-механическое объединение (ЛОМО) им. В.И. Ленина (до того ГОМЗ им. ОГПУ).

Развитие телескопостроения в России достигло столь высокого уровня, что в 1975 году был введён в эксплуатацию крупнейший в мире телескоп БТА (Большой Телескоп Азимутальной) с главным зеркалом диаметром 6 метров, впервые построенный на основе применения альт-азимутальной монтировки при автоматическом наведении телескопа на объект наблюдения и автоматическом сопровождении его. Телескоп создан в ЛОМО под руководством главного конструктора Б.К. Иоаннисиани (1911–1985).

Известные рефлекторы, изготовленные в XX веке, и место их установки приведены в табл.6.1.

Таблица 6.1. Известные рефлекторы, изготовленные в XX веке

D , м	Место установки
0,4	Апланатический телескоп Максудова, ГАО, Пулково
0,7	Рефлектор РМ-700, ГАО АН СССР
0,9	Кембриджская обсерватория
0,92	Обсерватория Китт-Пик, США
1,0	Флагстаффская станция Морской обсерватории США, с 1973 года в Венской обсерватории
1,0	Обсерватория Каракас, Венесуэла
1,09	Обсерватория Пик-дю-Миди
1,2	Институт им. Макса Планка
1,22	Обсерватория Доминион (Канада)
1,22	Крымская обсерватория КрАО
1,25	Телескоп ЗТЭ, южная база ГАИШ в Крыму
1,5	Телескоп АЗТ-12, обсерватория им. В.Я. Струве, Тарту
1,5	Морская обсерватория, США
1,5	Обсерватория Маунт Вилсон
1,52	Обсерватория им. Л. Фигля, Вена
1,8	Телескоп с мозаичным зеркалом, Болонский университет, Италия
1,93	Обсерватория Верхний Прованс, Франция
2,0	Болгарская обсерватория
2,0	Ондржейовская обсерватория, ЧССР
2,0	Шемахинская обсерватория, Азербайджан
2,08	Обсерватория Мак-Дональд, США
2,2	Институт им. Макса Планка
2,24	Обсерватория Маунта-Кеа на Гавайях
2,48	Телескоп им. Ньютона в Херстмонсо
2,5	Обсерватория Дю-Понт
2,5	Обсерватория Маунт Вилсон
2,6	Телескоп ЗТА, Бюраканская обсерватория, Армения
2,6	Телескоп ЗТШ, КрАО
2,72	Телескоп им. О. Струве, обсерватория Мак-Дональд, США
3,0	Ликская обсерватория, США
3,6	Южная Европейская обсерватория (ESO), Чили
4,0	Обсерватория Китт-Пик, США
4,0	Обсерватория Серро-Гололо
5,0	Телескоп им. Хейла, обсерватория Маунт Паломар, США
6,0	Телескоп БТА, САО АН СССР

Важно отметить, что в XX веке рефлекторы со сплошной отражающей поверхностью достигли естественного предельного значения диаметра главного зеркала, равного $D \approx 6 - 8$ м.

6.1.4. Телескопы следующего поколения

К телескопам первого поколения относят крупные рефлекторы начала XX века. Главные зеркала телескопов, изготовленные из обычного стекла с коэффициентом теплового расширения $\approx 70 \cdot 10^{-7}$, имеют параболоидную форму отражающей поверхности при относительном отверстии 1:4 – 1:5, обычно позволяют работать в прямом фокусе, фокусе Кассегрена и в фокусе куде. Типичными представителями этого поколения крупных рефлекторов являются 60-дюймовый и 100-дюймовый рефлекторы обсерватории Маунт Вилсон (1905 и 1917 годы).

Ярким представителем второго поколения крупных рефлекторов является 5-метровый телескоп, установленный на горе Паломар и начавший работать в 1949 году. Оптические системы этого инструмента такие же, как у его предшественников (прямой фокус, фокус Кассегрена, фокус куде). Зеркало телескопа изготовлено из пирекса.

Зеркало телескопа БТА диаметром 6 метров изготовлено из стекла с пониженным ($\approx 30 \cdot 10^{-7}$) коэффициентом теплового расширения [28]. Отражающая поверхность зеркала при относительном отверстии 1:4 имеет параболоидную форму. Телескоп может работать в прямом фокусе без корректора или с двухлинзовым корректором, обеспечивающим поле в $10'$, а также в фокусе Кассегрена – куде при светосиле 1:30. Формально уникальный телескоп БТА можно отнести к телескопам второго поколения. Третье поколение телескопов характеризуются применением следующих новшеств: апланатическая широкоугольная ($\approx 1^\circ$) оптическая система Ричи-Кретьена с гиперболоидной формой отражающей поверхности главного зеркала. Зеркала изготавливаются из материала с малым коэффициентом теплового расширения – кварца или ситалла. Такая оптика более стабильна, чем стеклянная, и позволяет получить лучшее качество изображения (до 50 % света в кружке диаметром $\approx 0,1''$). Типичными представителями телескопов третьего поколения являются 4-метровые инструменты обсерваторий Кит Пик и Серро Тололо, а также 3,66-метровый рефлектор ESO. Таким образом, во второй половине XX века наземная оптическая астрономия сделала

очередной шаг вперед. Начали работать несколько широкоугольных рефлекторов Ричи-Кретьена – телескопов третьего поколения. Астрономы получили в своё распоряжение целую гамму высокоэффективных приёмников излучения, охвативших весь доступный для наблюдений с земной поверхности спектральный диапазон. Наконец, в последнее время появилась возможность более полно оценивать характер искажений земной атмосферой вида космических объектов. Однако, для решения многих задач эффективность имеющихся в настоящее время систем телескоп-приёмник близка к теоретической и возникает вопрос: куда же двигаться дальше?

Обсуждению самых разных аспектов создания наземных телескопов четвёртого поколения был посвящен симпозиум, состоявшийся в Женеве в 1977 году. Каким же, по мнению большинства участников симпозиума, должен быть основной наземный инструмент астрофизики четвёртого поколения?

Во-первых, он должен быть большим. Светособирающая площадь, которая позволит поставить ряд новых задач, должна превосходить площадь Паломарского 5-метрового рефлектора в 4 – 5 раз. Во-вторых, этот инструмент должен быть реально осуществимым.

Переход от телескопов второго и третьего поколений к 25-метровому телескопу представляется делом весьма рискованным. Как показала история телескопостроения, при разработке новых рефлекторов скачок в размерах главного зеркала не должен превосходить 2 – 2,5 раза. В противном случае не удастся правильно проэкстраполировать многие факторы, влияние которых растёт пропорционально второй, третьей и четвёртой степеням диаметра главного зеркала [29].

В конце прошлого века шло завершение изготовления 6,5-метрового боросиликатного зеркала сотовой конструкции, имеющего параболоидную форму отражающей поверхности, для телескопа "Магеллан" (обсерватория Карнеги и Аризонский университет).

К числу реализуемых зарубежных проектов крупногабаритных телескопов можно отнести два 8-метровых телескопа Gemini (Близнецы) – совместный проект Канады, Англии, США, Чили, Аргентины и Бразилии, 8- метровый телескоп SUBARU (Япония), большой бинокулярной телескоп (LBT), состоящий из двух 8,4-метровых телескопов – совместный проект Италии и США, 11-

метровый спектроскопический обзорный телескоп Hobby/Eberly (США, Германия) и ряд других [30, 31, 32].

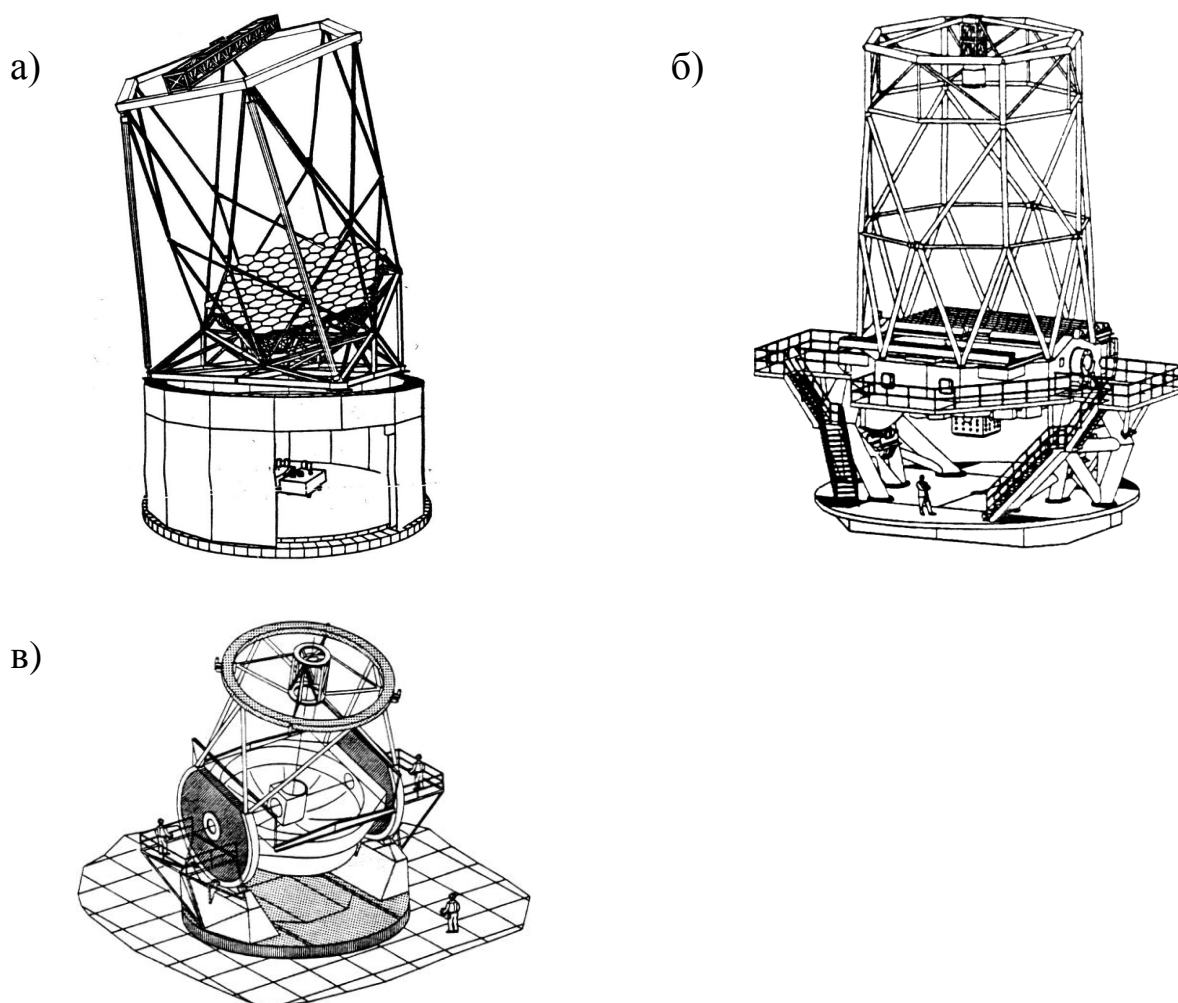


Рис.6.2. Крупногабаритные телескопы с сегментированным главным зеркалом:

а) – Hobby/Eberly, б) – Gemini, в) – Magellan

Весьма привлекательным вариантом эквивалента 25-метрового телескопа является система (некогерентная или когерентная) из нескольких 8 – 10-метровых телескопов [33, 34]. Эти телескопы можно было бы использовать как по отдельности, так и совместно, когда эффективность отдельного инструмента оказалась бы недостаточной для решения поставленной задачи.

Таким образом, построенные телескопы можно назвать многомодульными телескопами с синтезированной апертурой [35], обладающие рядом преимуществ, что определяет потенциальную перспективность этого направления развития крупногабаритных

телескопов. Отдельные телескопы, формирующие общее изображение, принято называть модулями. Многомодульный телескоп можно построить из отдельных модулей, задние фокусы которых с помощью системы плоских зеркал совмещены в одной точке (рис.6.3), или из афокальных модулей, применение которых требует дополнительного объектива, формирующего общее изображение в своей задней фокальной плоскости, как показано на рис.6.4.

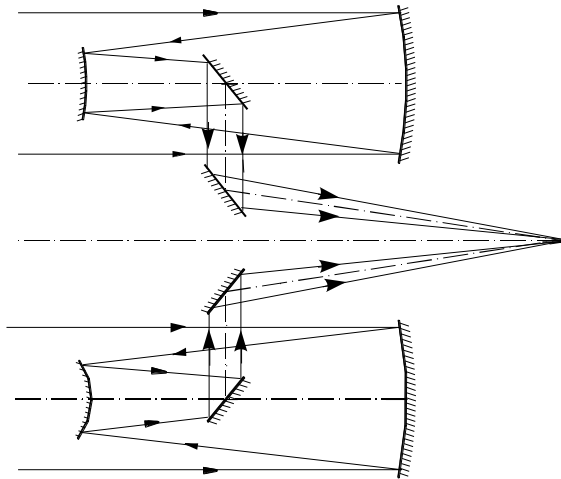


Рис.6.3. Схема компоновки модульного телескопа с "силовыми" модулями

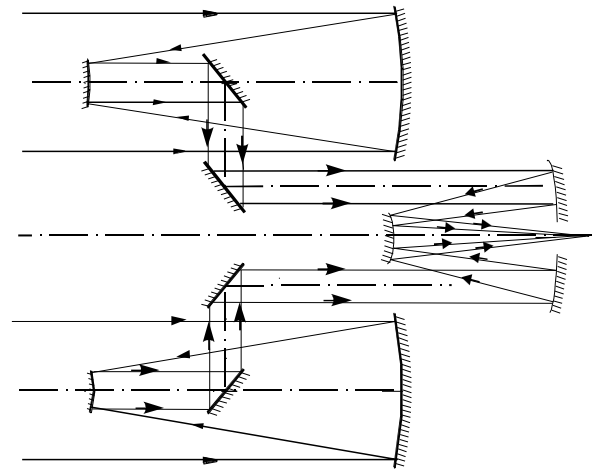


Рис.6.4. Оптическая схема телескопа состоящего из "афокальных" модулей

Из классических оптических схем крупногабаритных телескопов особенно привлекательна схема с сегментированным главным зеркалом сферической формы, что позволяет выполнить его в виде отдельных элементов приемлемых габаритов [34, 36, 37, 38, 39, 40]. Возможный вариант такой схемы показан на рис.6.5 и рис.6.6. Другой вариант схемы показан на рис.6.7.

Поиски оптимальной оптической схемы телескопа с главным зеркалом диаметром 25 метров, имеющим сферическую форму отражающей поверхности продолжаются [41, 42].

Оптическая схема телескопа, её сложность, её параметры и абберационные свойства определяют не только качество образованного оптической системой изображения, но и сложность изготовления. Поэтому исследование свойств возможных схем построения крупногабаритных телескопов весьма актуально.

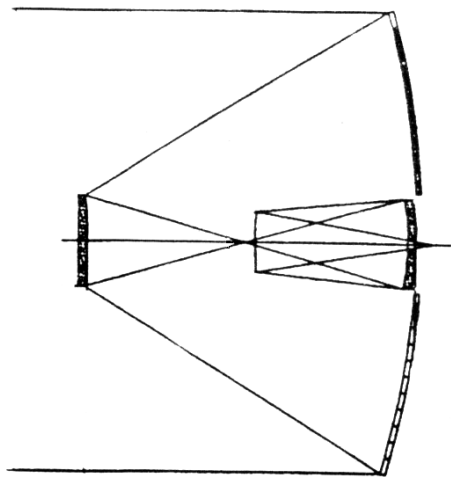


Рис.6.5. Оптическая схема 25-ти метрового телескопа

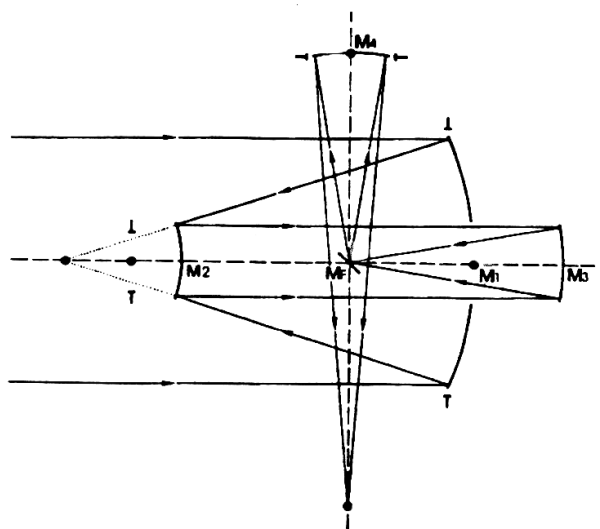


Рис.6.6. Двухосевой телескоп с 16-ти метровым сферическим главным зеркалом

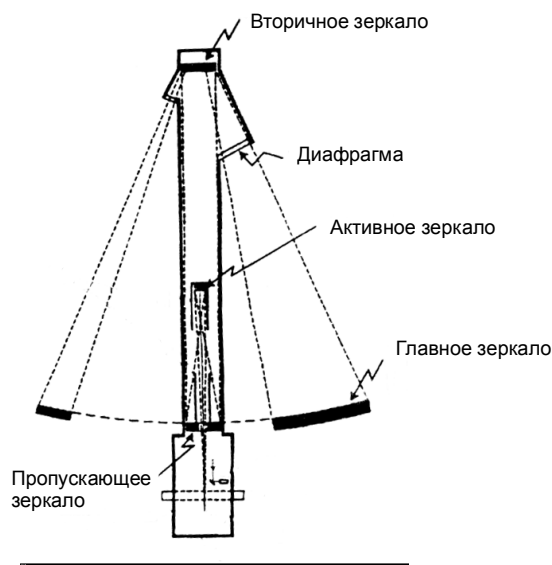


Рис.6.7. Полярный Стратосферический Телескоп

Выполненный анализ истории развития телескопостроения позволяет сделать следующие выводы:

- Линзовые объективы телескопов получили развитие, начиная с XVII века. К концу XIX века линзовые объективы достигли предельного диаметра, равного 700 – 750 мм.

- Схемы зеркальных объективов (рефлекторов) были предложены в XVII веке. Однако проблемы точной обработки металлических поверхностей определили их осуществление лишь в

XVIII веке. Изобретение в XIX веке отражающих покрытий стеклянных поверхностей определило интерес к созданию рефлекторов, принципиально обладающих лучшим качеством изображения. Совершенствование технологии обработки отражающих поверхностей, а также создание точных методов контроля несферичных поверхностей определили подлинное развитие рефлекторов в XX веке. К концу века диаметр рефлекторов достиг своего предельного значения, равного 6 – 8 метрам.

▪ Развитие астрономии в XXI веке требует создания телескопов диаметром до 20 – 25 метров. Принципиально существуют два направления развития больших телескопов: совершенствование традиционной оптической схемы или применение модульной структуры построения оптической системы телескопа.

Обоснованный выбор одного из вариантов решения задачи возможен лишь в результате их исследования.

6.2. Главное зеркало телескопа

Главное зеркало современного рефлектора является наиболее ответственной частью телескопа, определяющей его выходные параметры. Помимо необходимости решения очевидных проблем, возникающих при изготовлении крупной заготовки главного зеркала и качественной обработки её рабочей поверхности, необходимо решение основной конструкторской проблемы – обеспечения высокой стабильности формы отражающей поверхности зеркала как в процессе её обработки, так и в весьма сложных условиях эксплуатации в обсерватории.

6.2.1. Деформация поверхности главного зеркала

Известны два основных источника деформации зеркала: деформации вследствие температурных градиентов в материале зеркала, возникающих за счёт изменений температуры окружающей среды, и деформации от собственного веса зеркала. Если уменьшение влияния перепада температуры достигается, прежде всего, выбором материала при любой конструкции зеркала, то уменьшение деформаций поверхности зеркала от его собственного веса определяется и конструктивными параметрами зеркала.

В простейшем случае главное зеркало представляет собой равнотолщинный мениск. Поскольку относительная величина высоты сегмента, образованного отражающей поверхностью, достаточно мала, для оценки прогиба зеркала от собственного веса заменим

мениск круглой плоскопараллельной пластиной. Прогиб δ свободно опёртой круглой пластины диаметра D и толщины h , изготовленной из материала с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона μ и плотностью γ , равен [24]:

$$\delta = G \frac{D^2}{q^2} (1 - \rho^2) \left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} - \rho^2 \right), \quad (6.15)$$

где $q = \frac{h}{D}$; $G = \frac{3}{256} \frac{1 - \mu^2}{E} \gamma$; $\rho = \frac{r}{r_0} = 2 \frac{r}{D}$; r – расстояние от оси до произвольной точки поверхности круглой пластины, при этом $0 \leq \rho \leq 1$. При $\rho = 0$: $\delta_0 = G \frac{D^2}{q^2} \frac{5 + \mu}{1 + \mu}$. При этом плоский волновой фронт, падающий на отражающую поверхность, принимает форму, отклонение которой от плоскости равно

$$W_p(\rho) = 2(\delta_0 - \delta) = 2G \frac{D^2}{q^2} \rho^2 \left(\frac{5 + \mu}{1 + \mu} + 1 - \rho^2 \right) \quad (6.16)$$

Заметим, что если $\rho = 0$, то $W_p(0) = 0$, а если $\rho = 1$, то $W_p(1) = 2G \frac{D^2}{q^2} \frac{5 + \mu}{1 + \mu}$. Сферичность волнового фронта можно компенсировать перефокусировкой изображения. Отклонение сферического волнового фронта от плоского можно определить выражением:

$$W_c(\rho) = R - \sqrt{R^2 - r_0^2 \rho^2} = R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2} \rho^2} \right),$$

где R – радиус сферического волнового фронта. При малой величине отклонения можно принять, что

$$W_c(\rho) = \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{R^2} \rho^2. \quad (6.17)$$

При $W_c(1) = W_p(1)$ имеем $W_c(\rho) = \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{R^2} = 2G \frac{D^2}{q^2} \frac{5 + \mu}{1 + \mu}$. Тогда выражение (6.17) можно представить в виде

$$W_c(\rho) = 2G \frac{D^2}{q^2} \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \rho^2 \quad (6.18)$$

При этом остаточная (некомпенсируемая) деформация определяется разностью выражений (6.16) и (6.18), т.е.

$$W_0(\rho) = W_P(\rho) - W_C(\rho) = 2G \frac{D^2}{q_0^2} (1 - \rho^2) \rho^2. \quad (6.19)$$

Из условия $\frac{dW(\rho)}{d\rho} = 0$ находим, что деформация волнового фронта принимает экстремальные значения при $\rho = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. При этом

$$[W_0(\rho)]_{extr} = \frac{1}{2} G \frac{D^2}{q_0^2}. \text{ Положив } [W_0(\rho)]_{extr} \leq k\lambda, \text{ получаем}$$

$$q_0 \geq D \sqrt{\frac{G}{2k\lambda}}, \text{ а } h \geq D^2 \sqrt{\frac{G}{2k\lambda}}. \quad (6.20)$$

При $k < \frac{1}{4}$ максимальная величина нормированной освещённости S_t (число Штреля) в изображении точки приближённо определяется выражением [25]

$$i(P'_0) \approx 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \omega^2, \quad (6.21)$$

где ω – среднеквадратичная величина деформации волнового фронта, равная $\omega = \sqrt{\bar{W}^2 - (\bar{W})^2}$, при этом

$$\bar{W}^n = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} W^n(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi = 2 \int_0^1 W^n(\rho) \rho d\rho \quad (6.22)$$

Применив последовательно выражения (6.19), (6.22) и (6.21), получаем

$$q_0 \geq D \sqrt{\frac{2\pi}{15\lambda}} G \sqrt{\frac{5}{1 - i(P'_0)}} \quad (6.23)$$

Легко убедиться, что при $k \leq \frac{1}{4} \lambda$ (критерий Релея) и при $S_t \geq 0,8$ (критерий Марешаля) выражения (6.20) и (6.23) дают практически одинаковую величину q_0 , равную

$$q_0 \geq D \sqrt{\frac{2G}{\lambda}}. \quad (6.24)$$

Изменение положения трубы телескопа в процессе наведения на объект наблюдения и слежения за ним ось зеркала в оправе отклоняется от нормали к поверхности Земли, при этом изменяется характер распределения сил воздействия зеркала на оправу, а,

следовательно, изменяется величина и форма прогиба зеркала. Поэтому, в общем случае, условие стабильности отражающей поверхности зеркала естественно определять без учёта возможной перефокусировки изображения. Используя выражения (6.16), (6.22) и (6.21), при $i(P'_0) = 0,8$ получаем

$$q \geq 2q_0 \sqrt[4]{\Psi}, \quad (6.25)$$

где $\Psi = 1 + \frac{15}{2} \frac{3 + \mu}{(1 + \mu)^2}$; $q_0 = D \sqrt{\frac{2G}{\lambda}}$.

6.2.2. Материалы, применяемые для изготовления оптических зеркал

На протяжении прошлого столетия и вплоть до настоящего времени в качестве материала зеркал оптических телескопов применялись и применяются до сих пор стекло и разработанные на его основе поликристаллические материалы.

Главное зеркало телескопа БТА диаметром $D=6050$ мм и толщиной $d=650$ мм изготовлено из однородного малопузырного стекла "пирекс 316". Модуль упругости (модуль Юнга) этого стекла

$$E = 6685 \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2}, \quad \text{коэффициент Пуассона } \mu = 0,222, \quad \text{плотность}$$

$$\gamma = 2,48 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}. \quad \text{Положив в выражении (6.24) величину}$$

$$\lambda = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ мм, получим}$$

$$q_0 \geq 0,125D \text{ (м)}. \quad (6.26)$$

Тогда в соответствии с формулой (6.25)

$$q \geq 0,5D \text{ (м)}. \quad (6.27)$$

При $D = 6$ м имеем $q_0 = 0,75$, а $q = 3$! Вполне очевидно, что в этом случае необходима торцевая и радиальная разгрузка главного зеркала телескопа.

Положив в формуле (6.27) $q = 0,1$, получим $D = 0,2$ м. Таким образом, при $q < 0,1$ и $D > 0,2$ м зеркало можно считать "гибким", при этом для исключения возможной деформации отражающей поверхности от собственного веса зеркала необходимо применение конструктивных мер, а, соответственно, возможно применение конструктивных мер для воздействия на форму отражающей поверхности. Вполне очевидно, что чем меньше величина q , тем больше гибкость зеркала, тем меньше постоянная времени (больше

скорость) деформации поверхности и тем больше вероятность успеха применения его в адаптивной оптической системе. Однако при больших диаметрах даже "тонкое" зеркало обладает весьма большой массой. Так, например [45], при диаметре зеркала $D = 8$ м и $q = 1:50$, при плотности стекла $\gamma = 2,48 \frac{\Gamma}{\text{см}^3}$ (стекло "пирекс 316") масса зеркала приближенно равна 19000 кг. Проблемы обращения с таким зеркалом (транспортировка, крепление, разгрузка и т.п.) очевидны. Подобные проблемы проявляются и при более благоприятном соотношении толщины и диаметра зеркала [46].

Выполним анализ возможного варианта уменьшения массы и увеличения жесткости (стабильности формы отражающей поверхности) главного зеркала путём замены сплошного главного зеркала составным из j отдельных облегченных зеркал, которые образуют синтезированную апертуру.

Площадь i -го зеркала в виде круглой пластины равна $S_i = \frac{1}{4} \pi D_i^2$, а площадь j -го зеркала равна $S_j = \frac{1}{4} \pi D_j^2$. При этом масса i -го зеркала равна $m_i = S_i h_i \gamma$, а масса j -го зеркала из того же материала равна $m_j = S_j h_j \gamma$. Следовательно, $\frac{m_i}{m_j} = \frac{S_i h_i}{S_j h_j}$. Пусть $S_i = N S_j$. Тогда

$k_{\ominus} = \frac{m_i}{N m_j} = \frac{h_i}{h_j}$. В соответствии с любой из формул (6.15), (6.18) или (6.19) одинаковый прогиб имеют такие зеркала из одного и того же материала, для которых справедливо равенство: $\frac{h_i}{h_j} = \frac{D_i^2}{D_j^2} = \frac{S_i}{S_j}$.

Отсюда следует, что при $S_i = N S_j$ отношение

$$k_{\ominus} = N \quad (6.28)$$

Пусть $N = 625$. Тогда при $D_i = 25$ м диаметр j -го зеркала $D_j = 1$ м. Стало быть, эффективным путём уменьшения массы главного зеркала является замена сплошной апертуры составной, собранной из отдельных облегченных зеркал, имеющих, например, сотовую структуру [47], при этом каждое зеркало должно быть достаточно жестким.

Для обеспечения тепловой стабильности отражающих поверхностей зеркал материалы, применяемые для их изготовления,

должны обладать низким относительным температурным коэффициентом линейного расширения (ОТКЛР). Многолетние усилия разработчиков перспективных по этому параметру материалов привели к созданию ситалла в России, церодура в Германии и легированного плавленого кварца ULE (*ultralow expansion*) в США. Однако, параметры этих материалов, определяющие прогиб зеркал от собственного веса, остаются вполне соизмеримыми с параметрами пирекса.

Величина термодформаций при квазистационарном режиме (медленно меняющихся тепловых потоках) определяется отношением $\frac{\alpha}{\lambda}$, где α – относительный температурный коэффициент линейного расширения; λ – теплопроводность. Важно заметить, что коэффициент линейного расширения новых материалов остается низким лишь в узком диапазоне изменения температуры. К тому же эти материалы обладают весьма низкой теплопроводностью. Поэтому при значительных изменениях температуры заметные влияния на качество изображения начинают оказывать термодформации отражающих поверхностей.

В России начало поиску и разработке новых подходов к созданию оптических зеркал (нетрадиционных материалов, новых конструктивных и технологических решений) было положено сотрудниками Государственного оптического института им. С.И. Вавилова по инициативе члена-корреспондента РАН профессора М.М. Мирошникова [48]. Ими было показано, что, превосходя стеклообразные материалы по теплопроводности более чем на два порядка, ряд металлов и других материалов даже при относительно высоких значениях ОТКЛР сохраняют форму отражающей поверхности при температурных изменениях окружающего пространства, претерпевая, однако, масштабные изменения. Значения величин $\tilde{q} = \frac{q}{D}$ и $\tilde{q}_0 = \frac{q}{D}$, вычисленные для этих материалов в предположении, что для металлов коэффициент $\mu = 0,3$ [49], а для остальных материалов $\mu = 0,2$, приведены в табл.6.2.

В настоящее время основное внимание материаловедов направлено на отработку технологии изготовления облегченных крупногабаритных заготовок из карбида кремния, чтобы в ближайшие годы обеспечить создание зеркал из этого материала диаметром до 1,5 м [50].

Таблица 6.2. Параметры материалов оптических зеркал

Параметры	Материалы						
	<i>Be</i>	<i>Al</i>	<i>Cu</i>	<i>Mo</i>	<i>Si</i>	<i>SiC*</i>	Пирекс 316
Плотность γ , г/см ³	1,85	2,7	8,9	10,2	2,3	3,05	2,48
Модуль упругости $E \cdot 10^{-3}$, кгс/мм ²	30	7,5	12	35	17	42	6,685
Коэффициент теплопроводности λ , Вт/(м·град)	159	220	400	145	160	185	1,0
$OTKLP \alpha^{-6}$, 1/град	11,4	23,9	16,5	5,0	2,5	2,5	3,0
$\frac{\alpha}{\lambda} \cdot 10^{-8}$ м/Вт	7,2	10,9	4,1	3,4	1,6	1,4	3,0
\tilde{q}_0	0,05	0,12	0,17	0,11	0,08	0,06	0,125
\tilde{q}	0,20	0,47	0,68	0,423	0,31	0,23	0,51

* силицированный карбид кремния

6.3. Эффективность применения телескопов

Астрономия всегда была наблюдательной наукой и остаётся таковой. Её прогресс определяется, прежде всего, квалификацией астронома, любящего свою науку, увлекающегося ею и хорошо знающего необходимый арсенал приборных средств для достижения поставленной цели, а также наблюдениями, при которых используются предельные возможности применяемого телескопа и навесной аппаратуры. С другой стороны, создание эффективного астрономического инструмента невозможно без глубокого понимания смысла предъявляемых к нему требований или, более широко, без понимания условий его применения.

Большинство наблюдений современной наземной астрономии связано со спектральным диапазоном излучения, начинающимся приблизительно у 3000 А и кончающимся приблизительно у 12000 – 12500 А. Под эффективностью телескопа, регистрирующего в сочетании с тем или иным приёмником излучения точечный объект на фоне свечения ночного неба в указанном спектральном диапазоне, понимают меру слабости такого объекта, который может быть

зарегистрирован аппаратурой с заданной точностью [51]. Пусть энергетическая освещённость входного зрачка объектива телескопа, создаваемая излучением наблюдаемого объекта, равна $E_{\text{э}} \frac{\text{квантов}}{\text{см}^2\text{с}}$. Заметим, что блеск звезды определяется освещённостью, создаваемой ею на земной поверхности (в плоскости входного зрачка невооружённого глаза наблюдателя). Поэтому мерой слабости объекта принято считать величину $\frac{1}{E_{\text{э}}}$.

Если мы хотим считать объект зарегистрированным или яркость его измеренной, то отношение сигнала к шуму (отношение $\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}$), при котором поток излучения от объекта регистрируется в условиях наблюдения, должно быть не хуже ρ . Выбор величины ρ определяется свойствами реального приёмника и устройства последующей обработки сигнала. В современной оптической астрономии величина ρ выбирается достаточно большой (~ 5). Однако, при выводе основных соотношений, определяющих эффективность телескопа, нет необходимости конкретизировать её значение.

Введём следующие обозначения:

D – диаметр входного зрачка телескопа в см;

f' – фокусное расстояние объектива телескопа в см;

β – угловой размер изображения звезды на приёмнике в радианах;

$E_{\text{э}}$ – энергетическая освещённость входного зрачка объектива телескопа в $\frac{\text{квантах}}{\text{см}^2\text{с}}$, создаваемая излучением наблюдаемой

звёзды, при этом поток $\Phi_{\text{э}} = \frac{\pi}{4} D^2 E_{\text{э}}$;

L – яркость фона ночного неба в $\frac{\text{квантах}}{\text{см}^2\text{с} \cdot \text{стерадиан}}$, при этом

$$\Phi_{\text{эф}} = \pi L \frac{1}{4} \frac{D^2}{f'^2} \frac{\pi}{4} \beta^2 f'^2 = \frac{\pi^2}{16} L D^2 \beta^2;$$

η – квантовый выход приёмника, регистрирующего излучение звезды и фона;

t – продолжительность экспозиции в секундах;

p – разрешающая способность фотоэмульсии в см;

Ψ – "порог срабатывания" фотоэмульсии в $\frac{\text{квантах}}{\text{см}^2}$;

ρ – отношение $\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}$, удовлетворяющее условиям наблюдения (коэффициент достоверности).

Под квантовым выходом приёмника будем понимать величину, эквивалентную пропусканию такого нейтрального фильтра, который, будучи поставлен перед идеальным приёмником, регистрирующим падающее на него излучение, приравнивает его отношение $\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}$ к такому же для реального приёмника.

Рассмотрим регистрацию точечного объекта на фоне свечения ночного неба с помощью идеального приёмника ($\eta = 1$). Вполне очевидно, что сигнал от фона (энергия излучения фона) при этом равен

$$W_{\Phi} = \Phi_{\text{эф}} \eta t = \frac{\pi^2}{16} L D^2 \beta^2 t \quad (\eta = 1).$$

Когда же объектив телескопа окажется наведённым на звезду, то сигнал будет равен

$$W = W_{\text{з}} + W_{\text{эф}} = \frac{\pi}{4} D^2 \left(E_{\text{з}} + \frac{4}{\pi} L \beta^2 \right) t.$$

При попеременном наведении на объект и на участок фона будем иметь

$$\rho = \frac{W_{\text{з}}}{\sqrt{W_{\text{з}} + W_{\text{эф}}}}, \quad \text{где } W_{\text{з}} = W_{\text{з}} + W_{\text{эф}} - W_{\text{эф}},$$

так как статистическая флуктуация W – числа зарегистрированных квантов энергии – равна \sqrt{W} .

Заметим, что при наблюдении с помощью телескопа одна и та же звезда может оказаться яркой или слабой в зависимости от качества изображения и яркости фона ночного неба.

При измерении блеска яркой звезды $W_{\text{з}} \gg W_{\text{ф}}$. При этом

$$\rho = \frac{W_{\text{з}}}{\sqrt{W_{\text{з}}}} = \frac{\pi}{4} D^2 E_{\text{з}} t \frac{2}{\sqrt{\pi E_{\text{з}} t D}} = \frac{1}{2} D \sqrt{\pi E_{\text{з}} t}.$$

Отсюда следует, что эффективность телескопа, определяемая величиной $E_{\text{з}}^{-1}$, равна

$$E_{\text{э}}^{-1} = \frac{1}{\rho^2} D^2 t. \quad (6.29)$$

Смысл полученного выражения совпадает с весьма распространённым интуитивным мнением, что эффективность телескопа пропорциональна квадрату диаметра входного зрачка его объектива и не зависит от качества построенного им изображения. Видимо этим определяется постоянное стремление к увеличению диаметра входного зрачка объектива телескопов на протяжении всей четырёхвековой истории их применения и развития. Поэтому можно считать, что именно эти соображения определяют потребность в гигантских телескопах.

Рассмотрим теперь слабый объект, для которого $E_{\text{э}} < E_{\text{ф}}$. Наблюдения подобных объектов широко практикуются в современной астрофизике. При наблюдении слабой звезды

$$\rho \approx \frac{W_{\text{э}}}{\sqrt{W_{\text{эф}}}} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{t}{L}} D E_{\text{э}}$$

и соответственно

$$\frac{1}{E_{\text{э}}} = \frac{1}{\rho} \frac{D}{\beta} \sqrt{\frac{t}{L}}. \quad (6.30)$$

Таким образом, в этом случае предельная звёздная величина наблюдаемой звезды пропорциональна диаметру входного зрачка объектива телескопа и корню квадратному из времени экспонирования (вернее, из величины ηt , поскольку квантовый выход регистрирующих изображение устройств эквивалентен времени накопления), и обратно пропорциональна размеру образованного объективом изображения и корню квадратному из яркости фона ночного неба, т.е. от последних факторов зависит заметно слабее.

Наряду с фотоэлектрическими приёмниками излучения в практике астрономических наблюдений для регистрации изображений достаточно широко применяются фотографические эмульсии. Известно, что фотопластинка начинает эффективно работать лишь после того, как получит некоторую минимальную экспозицию, создающую на проявленном снимке плотность, превышающую химическую вуаль незасвеченной его части. Поэтому при регистрации слабых ($W_{\text{э}} < W_{\text{эф}}$) объектов объектив телескопа должен создавать на фотопластинке некоторую освещённость от фона, которую легко определить из соотношения:

$$\frac{\pi D^2 Lt}{4 f'^2} = \Psi.$$

Так как астрономы не могут давать сколь угодно больших экспозиций (ухудшаются параметры фотоэмульсий из-за отклонений от закона взаимозаменяемости, изменяется рефракция атмосферы, гнутя инструмента приводят к изменению положения элементов оптической системы объектива, а, следовательно, к изменению структуры изображения), приходится выбирать светосилу объектива такой, чтобы фон неба регистрировался на используемых фотоэмульсиях при разумном (не более двух часов) времени экспозиции. При этом светосила объектива должна удовлетворять следующему очевидному соотношению:

$$\frac{D}{f'} > \sqrt{\frac{\Psi}{Lt}}.$$

Оптимальная светосила объектива телескопа, образующего изображение на фотоэмульсиях, примерно равна 1:8 – 1:10.

Безабберационное изображение точечного объекта, образованного оптической системой [52], имеет вид дифракционного пятна, при этом радиус кольца первого минимума определяется выражением $r = \frac{1,22\lambda}{D} f'$, где λ – длина волны излучения, при этом

$$\text{угловой размер изображения равен } \beta = 2 \frac{r}{f'} = \frac{2,44\lambda}{D}.$$

Если максимум освещённости в дифракционном изображении одной точки совпадает с первым минимумом в изображении другой, то расстояние между максимумами освещённости в изображении этих точек в соответствии с критерием Рэля принято считать пределом разрешения или разрешающей способностью оптической системы. Таким образом, разрешающая способность идеальной оптической системы определяется радиусом r кольца первого минимума в дифракционном изображении точки, при этом в угловой мере разрешающую способность оптической системы можно определить выражением вида $\gamma = \frac{1}{2} \beta = \frac{1,22\lambda}{D}$.

Если угол γ выразить в угловых секундах, длину волны λ – в микрометрах, а диаметр входного зрачка объектива – в мм, то эта

формула принимает вид: $\gamma'' = \frac{244\lambda \text{ (мкм)}}{D \text{ (мм)}}$. При $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$:

$$\gamma'' = \frac{122}{D \text{ (мм)}}.$$

Вполне очевидно, что контраст изображения $\tau \approx 1$ при угловом расстоянии между изображаемыми точками, определяемом углом β . При этом размер изображения равен $f' \beta$. При фокусном расстоянии объектива, для которого справедливо соотношение

$$f' < \frac{P}{\beta}, \quad (6.31)$$

разрешающая способность инструмента определяется разрешающей способностью приёмника излучения (фотоэмульсии), т.е. в этом случае не полностью используются потенциальные возможности объектива. Таким образом, соотношение (6.31) можно рассматривать как определение короткофокусного объектива. Тогда длиннофокус-ный объектив естественно определить соотношением

$$f' > \frac{P}{\beta}. \quad (6.32)$$

Важно заметить, что если угловой размер изображения β определяется, прежде всего, турбулентностью атмосферы, то её влияние на эффективность применения телескопа непосредственно следует из выражения (6.30) при наблюдении слабой звезды. Это выражение даёт конкретное представление об эффективности применения методов адаптивной оптики, для чего необходима разработка оптических систем с синтезированной апертурой.

Глава 7

АНАЛИЗ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ СХЕМ ОПТИКИ ТЕЛЕСКОПОВ С СИНТЕЗИРОВАННОЙ АПЕРТУРОЙ

Необходимость создания телескопов диаметром до 20 – 25 метров сегодня признана астрономами всего мира [1, 2]. С другой стороны, велика потребность в инструментах диаметром 6 – 8 метров. Поэтому вопрос о том, целесообразнее ли строить один большой телескоп или несколько умеренных, остаётся весьма актуальным.

Задачу увеличения апертуры телескопа можно решить путем применения мультимодульной структуры его конструкции, когда отдельные телескопы находятся на общей монтировке, что определяет компактность телескопа и башни [3]. Собирающая свет поверхность входного зрачка системы из N модулей эквивалентна сплошной поверхности главного зеркала классического телескопа, диаметр которого определяется формулой вида:

$$D_э = \sqrt{\frac{1}{1-\eta_э^2} \sum_{j=1}^N (1-\eta_j^2) D_j^2}, \quad (7.1)$$

где D_j – диаметр входного зрачка j -го модуля; η – коэффициент центрального экранирования по диаметру.

При равных диаметрах входных зрачков всех модулей, т.е. при $D_1 = \dots = D_j = \dots = D_N = D$, и при $\eta_1 = \dots = \eta_j = \dots = \eta_N = \eta$ получим

$$D_э = D \sqrt{N \frac{1-\eta^2}{1-\eta_э^2}}, \quad (7.2)$$

Так, например, если взять $N = 6$, $\eta_j = \eta_э$, а $D = 1,85$ м, то диаметр эквивалентного зеркала $D_э = 4,5$ м. Структура изображения осевой точки предмета, образованного такой системой телескопа, при фазовом сопряжении волновых фронтов, выходящих из каждого модуля, определяется формулой

$$E(r', \theta) = \frac{1}{4} k^2 \left\{ \left[\sum_{j=1}^N u_{0j} A_j'^2 \frac{2J_1(\tilde{r}'_j)}{\tilde{r}'_j} \sin(\tilde{r}'_j \tilde{\rho}_{0j} \cos \varphi_{0j}) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\sum_{j=1}^N u_{0j} A_j'^2 \frac{2J_1(\tilde{r}'_j)}{\tilde{r}'_j} \cos(\tilde{r}'_j \tilde{\rho}_{0j} \cos \varphi_{0j}) \right]^2 \right\}, \quad (7.3)$$

где $J_1(\tilde{r}'_j)$ – функция Бесселя первого рода первого порядка; $\frac{a'_j}{R'} = A'_j$; $\frac{a'}{a'_j} \rho_{0j} = \tilde{\rho}_{0j}$; $kA'_j r' = \tilde{r}'_j$, где a'_j – радиус j -го элемента синтезированной апертуры; a' – радиус выходного зрачка синтезированной апертуры; u_{0j} – амплитуда светового возмущения в выходном зрачке j -го элемента; R' – радиус волновой сферы с вершиной в осевой точке синтезированной апертуры.

Принципиально возможны два варианта реализации модульной структуры телескопа с составной (синтезированной) апертурой. Первый вариант модульного решения задачи являет собой систему объективов, оптические оси которых параллельны, а задние фокусы объективов системой из $2N$ плоских зеркал сводятся в одну точку, определяющую задний фокус F' всей системы телескопа в целом, как показано на рис.7.1.

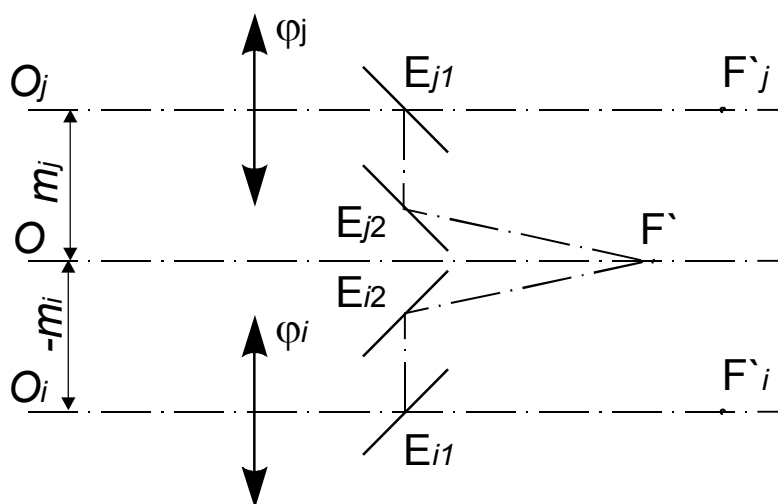


Рис.7.1. Оптическая схема телескопа, состоящего из системы объективов

Второй вариант конструктивной реализации модульной структуры телескопа представляет собой сочетание афокальных систем (телескопов), оптические оси которых параллельны между собой и параллельны оптической оси центральной фокусирующей системы, расположенной за телескопическими системами и формирующей изображение системы в целом, как показано на рис.7.2.

Для обоснованного выбора варианта принципиальной оптической схемы высокоапертурного телескопа, применение которого

наилучшим бы образом решало предполагаемые задачи, необходимо изучение свойств каждого варианта схемы.

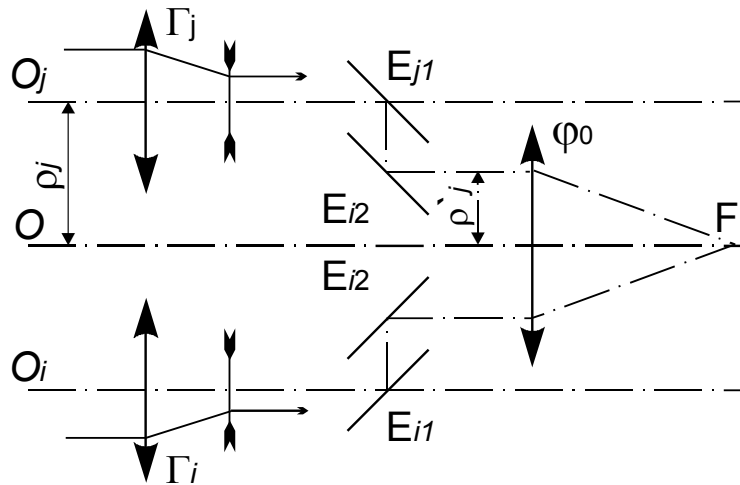


Рис.7.2. Оптическая схема телескопа, состоящего из афокальных систем

7.1. Анализ условий совместного применения системы объективов, образующих синтезированную апертуру высокоапертурного телескопа

Принято считать [4], что стоимость P создания телескопа приблизительно определяется соотношением

$$P = P_0 D^{2,3}, \quad (7.4)$$

где D – диаметр входного зрачка оптической системы телескопа; P_0 – стоимость телескопа при единичной величине диаметра D .

Тогда стоимость N телескопов равна

$$P_\Sigma = \sum_{j=1}^N P_j = P_0 \sum_{j=1}^N D_j^{2,3}, \quad (7.5)$$

а стоимость телескопа с эквивалентной поверхностью входного зрачка в соответствии с соотношением (7.4) равна

$$P_\Sigma = P_0 D_\Sigma^{2,3}, \quad (7.6)$$

Используя формулы (7.2), (7.5) и (7.6) при $D_1 = \dots = D_j = \dots = D_N = D$, $\eta_j = \eta_\Sigma$, получаем

$$k_P = \frac{P_\Sigma}{P_N} = \frac{D_\Sigma^{2,3}}{\sum_{j=1}^N D_j^{2,3}} = \frac{D^{2,3} N^{1,15}}{N D^{2,3}} = N^{0,15}.$$

Следовательно, чем большее число телескопов образует эквивалентный по светособирающей поверхности телескоп, тем

меньше стоимость их создания. Например, при $N=4$ величина $k_p=1,23$, а при $N=6$ отношение стоимостей $k_p=1,31$. Благодаря этому, обсуждаемая среди астрономов идея создания телескопов, имеющих умеренную апертуру, с возможностью их сочетания в составе синтезированной апертуры представляется крайне привлекательной.

Принципиальная оптическая схема высокоапертурного телескопа при модульной структуре её построения на рис.7.3 показана одним из объективов φ_j , оптическая ось которого параллельна оптическим осям других объективов системы, при этом задний фокус объектива F'_j системой из плоских зеркал E_{j1} и E_{j2} совмещен с задними фокусами других объективов в общей точке F' , определяющей задний фокус всей системы телескопа в целом. Из рисунка следует,

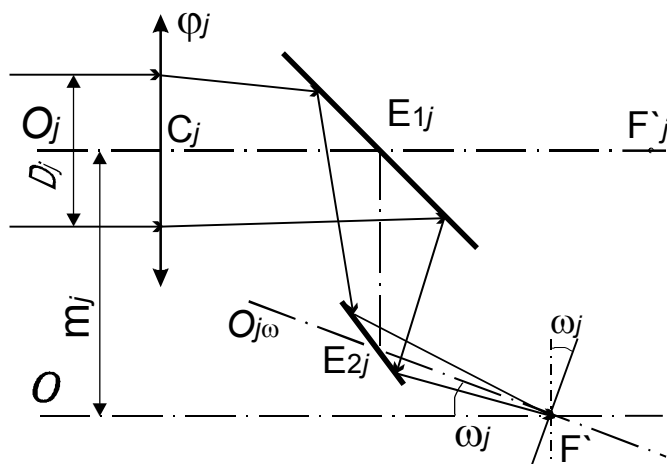


Рис.7.3. К определению положения фокальной плоскости объектива телескопа

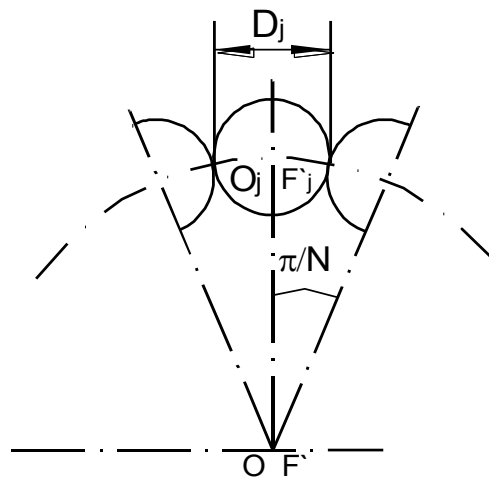


Рис.7.4. К определению минимального угла наклона объектива телескопа

что фокальная плоскость j -го объектива образует с плоскостью, проходящей через точку F' перпендикулярно оптической оси телескопа, угол ω_j , величина которого из габаритных ограничений должна удовлетворять условию:

$$\sin \omega_j \geq \frac{m_j}{f'_j}, \quad (7.7)$$

где из условия равенства масштаба изображений, образованных каждым из объективов, необходимо соблюдение условия:

$$f'_1 = \dots = f'_j = \dots = f'_N = f'_0.$$

При равной площади и круглой форме входных зрачков всех объективов, т.е. при $D_1 = \dots = D_j = \dots = D_N = D_0$, из геометрических соотношений отрезков, представленных на рис.7.4, получаем

$$m_j \geq \frac{D_0}{2 \sin \frac{\pi}{N}}.$$

Здесь $m_j = F'_j F'$. Тогда условие (7.7) принимает вид:

$$\sin \omega_j \geq \frac{D_0}{2 f'_0 \sin \frac{\pi}{N}} = \frac{\sin \sigma'_j}{\sin \frac{\pi}{N}}, \quad (7.8)$$

и угол ω_j принимает минимальное значение при $N = 2$. При этом

$\sin \omega_j \geq \frac{D_0}{2 f'_0} = \sin \sigma'_j$. Заметим, что чем больше угол ω_j , тем меньше

виньетирование полевых пучков лучей на плоских зеркалах, т.е. тем больше угловое поле без виньетирования полевых пучков лучей.

Расположив оптические оси объективов в вершинах правильного шестиугольника, получим $\sin \omega_j = 2 \sin \sigma'_j = \frac{D_j}{f_j}$. Гексагональное

расположение объективов дает хороший коэффициент заполнения апертуры и позволяет сделать оптику всех шести модулей одинаковой. К тому же при таком расположении объективов в центре остается место для размещения гидирующего телескопа и юстировочных устройств [5].

Наклон фокальной плоскости j -го объектива приводит к продольной расфокусировке изображения, образованного им, относительно общей плоскости изображения. Здесь продольная расфокусировка изображения при малом полевом угле W приближенно равна:

$$\Delta'_{wj} \approx l'_j \omega_j \approx -f'_j \omega_j W. \quad (7.9)$$

В волновой мере расфокусировка изображения равна $W_{20j} = \Delta'_{wj} (1 - \cos \sigma'_j) \approx 0,5 \Delta'_{wj} \sigma'^2_j$. (7.10)

Но $\sin \sigma'_j = \frac{D_j}{2 f'_j}$. При этом с учетом выражения (7.9) получаем

$$W_{20j} = -\frac{1}{8 f'_j} D_j^2 \omega_j W \quad (7.11)$$

9 мая 1979 года на вершине Маунт-Хопкинс в Аризоне был торжественно открыт многозеркальный телескоп (МЗТ), в основу построения которого была положена рассматриваемая схема [6]. Система оптики МЗТ приведена на рис.7.5, где показан ход лучей в двух противоположных основных телескопах и в телескопе для гидирования и юстировки. Вверху слева показано угловое заполнение пучка в квазикассегреновском фокусе.

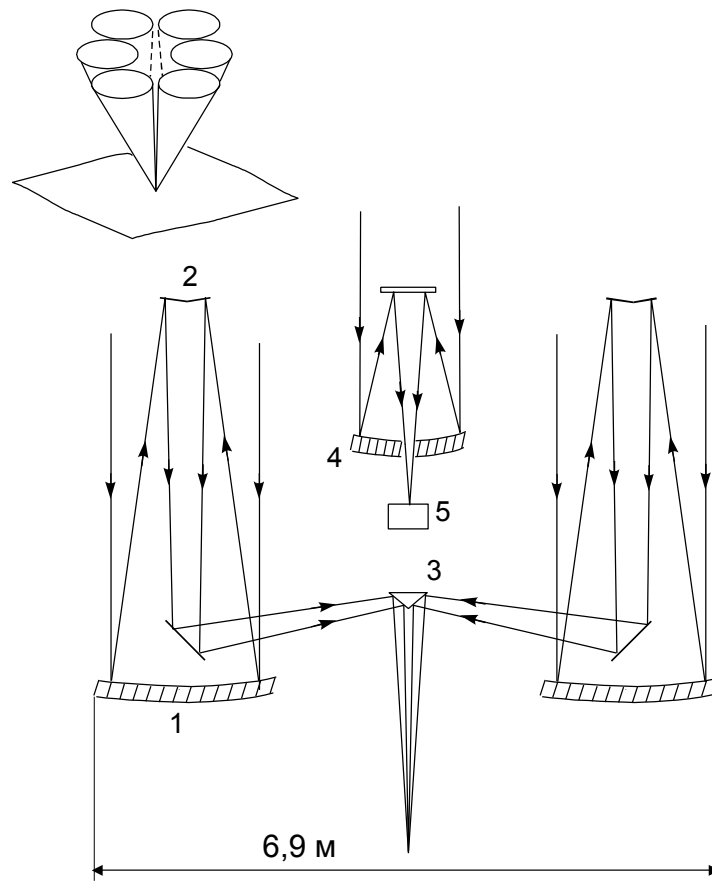


Рис. 7.5. Оптическая схема МЗТ

- 1 – главное зеркало диаметром 1,8 м;
- 2 – вторичное зеркало;
- 3 – объединитель пучков;
- 4 – телескоп для гидирования и юстировки;
- 5 – приёмник автогида.

Конструктивно телескоп состоит из шести кассегреновских телескопов, системы плоских зеркал для объединения световых

пучков лучей и касегреновского телескопа ($D = 76\text{см}$) для гидирования и юстировки. Каждый касегреновский телескоп имеет главное зеркало диаметром 1,8 м при относительном отверстии, равном 1:2,72. После вторичного зеркала относительное отверстие объектива телескопа становится равным 1:31,6. Затем после отражений от двух плоских зеркал свет попадает в квазикасегреновский фокус МЗТ, расположенный на оси конструкции, несущей оптику. Фокусное расстояние касегреновского телескопа $f'_j = D_j \cdot 31,6 = 1,8 \cdot 31,6 \cong 56,88\text{м}$. Если $N = 6$, то в соответствии с формулой (7.8) получаем

$$\sin \omega_j \geq \frac{D_j}{2f'_j \sin 30^\circ} = \frac{1,8}{2 \cdot 56,88 \cdot 0,5} = 0,032.$$

Однако, входные зрачки касегреновских телескопов, образующие синтезированную апертуру МЗТ, вписаны в круг диаметром 6,9 м. Вполне очевидно, что в этом случае $m_j = \frac{6,9 - 1,8}{2} = 2,55\text{ м}$. Тогда в соответствии с формулой (7.7) получаем

$$\sin \omega_j \geq \frac{2,55}{56,88} = 0,045.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $\sin \omega_j \geq (0,032 \div 0,045)$. В МЗТ для уменьшения виньетирования полевых пучков лучей на объединителе $\sin \omega_j$ принят равным 0,04. Тогда при $W_{20j} = \frac{1}{4}\lambda$ в соответствии с формулой (7.11) получаем

$$W = -\frac{8W_{20j}f'_j}{D_j^2\omega_j} = -0,878\lambda \frac{1}{\text{мм}}.$$

При $\lambda = 0,55\text{ мкм}$ имеем $W = -0,00048$, т.е. $2W \approx 3,3'$ и $2l'_j = 54,6\text{ мм}$.

Наклон изображения, образованного j -ым объективом, приводит к поперечному сдвигу его в общей плоскости изображения. При малой величине углового поля в пространстве предметов и большом удалении выходного зрачка от плоскости изображения величину поперечного сдвига можно определить выражением

$$\delta l'_j \approx l'_j \cos \omega_j - l'_j \approx -\frac{1}{2}l'_j\omega_j^2.$$

Если $\omega_j = 0,04$, а $2l'_j = 54,6\text{ мм}$, то получаем, что $\delta l'_j = -0,022\text{ мм}$.

Фаза световых колебаний в соответствующих точках фокальной плоскости одинаковых объективов одна и та же. Однако, при наклоне

фокальной плоскости главный луч пересекает общую плоскость изображения на расстоянии Δ_{0j} от соответствующей точки в j -ой фокальной плоскости, равном фазовому сдвигу световых колебаний волнового фронта, сформированного j -ым объективом. Таким образом, наклон фокальной плоскости j -го объектива приводит не только к продольной расфокусировке и поперечному сдвигу изображения, но и к нарушению фазового сопряжения складываемых волновых фронтов. Важно отметить, что линия в плоскости изображения, образованного j -ым объективом, совпадающая с осью её наклона, расположена в общей плоскости изображения, а, следовательно, на этой линии изображения не происходит ни его расфокусировки, ни поперечного сдвига, ни фазового смещения волнового фронта, формирующего это изображение. Таким образом, структура изображения каждой точки предмета в общей плоскости изображения определяется результатом сложения световых возмущений, формируемых каждым объективом, который зависит как от удаления рассматриваемой точки изображения от оптической оси (точнее, от фокуса F') телескопа, так и от расположения составляющих апертуру объективов.

Пусть волновая аберрация в изображении внеосевой точки в общей плоскости определяется лишь суммой фазовых смещений волновых фронтов, вносимых в общую точку изображения каждым из объективов синтезированной апертуры. Поскольку наклон изображения, образованного каждым объективом, относительно общей плоскости определяется не только величиной угла, но и направлением, т.е. является величиной векторной, то фазовое смещение волнового фронта, вносимое в изображение внеосевой точки j -ым элементом (объективом) синтезированной апертуры, определяется соотношением вида:

$$W_{00j} = W_{00} \cos(\varphi_{0j} - \theta),$$

где φ_{0j} – угол между выбранным направлением в плоскости входного зрачка синтезированной апертуры и линией, проходящей через следы оптических осей телескопа в целом и j -го объектива;

θ – угол между выбранным направлением в плоскости входного зрачка и рассматриваемым направлением в плоскости изображения;

$W_{00} = \Delta'_{0j} = -f'_{0j}\omega_{0j}W$; $\sin \omega_{0j} = \frac{m_{0j}}{f'_{0j}}$. Тогда зрачковая функция

$F(\rho', \theta) = \sum_{j=1}^N F'_j(\rho'_j, \theta) = \sum_{j=1}^N P_j(\rho'_j, \theta)u(\rho'_j, \theta)\exp(-ikW_{00j})$. Положив при этом

$u_{01} = \dots = u_{0j} = \dots = u_0$ и $A'_1 = \dots = A'_j = \dots = A'_0$, получаем, что освещённость в центре пятна рассеяния в изображении точки определяется выражением вида:

$$E(0, \theta) = \frac{1}{4}k^2R'^2u_0^2A_0'^4 \left\{ \left[\sum_{j=1}^N \sin(kW_{00} \cos(\varphi_{0j} - \theta)) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^N \cos(kW_{00} \cos(\varphi_{0j} - \theta)) \right]^2 \right\}.$$

Если $W_{00} = 0$, то $E_0(0, \theta) = \frac{1}{4}N^2k^2R'^2u_0^2A_0'^4$. Тогда число Штреля определится выражением

$$S_t = \frac{E(0, \theta)}{E_0(0, \theta)} = \frac{1}{N^2} \left\{ \left[\sum_{j=1}^N \sin(kW_{00} \cos(\varphi_{0j} - \theta)) \right]^2 + \left[\sum_{j=1}^N \cos(kW_{00} \cos(\varphi_{0j} - \theta)) \right]^2 \right\}. \quad (7.12)$$

Заметим, что $\varphi_{0j+1} - \varphi_{0j} = \frac{2\pi}{N}$. При $N = 6$ получим $\varphi_{0j+1} - \varphi_{0j} = 60^\circ$. Тогда при $\theta = 0$, а $\varphi_{01} = 30^\circ$ имеем

$$\begin{aligned}
S_t &= \frac{1}{36} [\sin(kW_{00} \cos 30^\circ) + \sin(kW_{00} \cos 90^\circ) + \sin(kW_{00} \cos 150^\circ) + \\
&+ \sin(kW_{00} \cos 210^\circ) + \sin(kW_{00} \cos 270^\circ) + \sin(kW_{00} \cos 330^\circ)]^2 + \\
&+ [\cos(kW_{00} \cos 30^\circ) + \cos(kW_{00} \cos 90^\circ) + \cos(kW_{00} \cos 150^\circ) + \\
&+ \cos(kW_{00} \cos 210^\circ) + \cos(kW_{00} \cos 270^\circ) + \cos(kW_{00} \cos 330^\circ)]^2 = \\
&= \frac{1}{36} \left[\left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} kW_{00} + 0 - \sin \frac{\sqrt{3}}{2} kW_{00} - \sin \frac{\sqrt{3}}{2} kW_{00} + 0 + \sin \frac{\sqrt{3}}{2} kW_{00} \right)^2 + \right. \\
&+ \left. \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} kW_{00} + 1 + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kW_{00} + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kW_{00} + 1 + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kW_{00} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{36} \left(2 + 4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kW_{00} \right)^2 = \frac{1}{9} \left(1 + 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} kW_{00} \right)^2.
\end{aligned}$$

При $W_{00} = \frac{1}{4} \lambda$ получаем $S_t = \frac{1}{9} \left(1 + 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right)^2 \approx \frac{2}{9}$.

Пусть $\varphi_{01} = 30^\circ$ и $\theta = 30^\circ$. Тогда

$$\begin{aligned}
S_t &= \frac{1}{36} [\sin(kW_{00} \cos 0^\circ) + \sin(kW_{00} \cos 60^\circ) + \sin(kW_{00} \cos 120^\circ) + \\
&+ \sin(kW_{00} \cos 180^\circ) + \sin(kW_{00} \cos 240^\circ) + \sin(kW_{00} \cos 300^\circ)]^2 + \\
&+ [\cos(kW_{00} \cos 0^\circ) + \cos(kW_{00} \cos 60^\circ) + \cos(kW_{00} \cos 120^\circ) + \\
&+ \cos(kW_{00} \cos 180^\circ) + \cos(kW_{00} \cos 240^\circ) + \cos(kW_{00} \cos 300^\circ)]^2 = \\
&= \frac{1}{36} \left[\left(\sin kW_{00} + \sin \frac{1}{2} kW_{00} - \sin \frac{1}{2} kW_{00} - \sin kW_{00} - \sin \frac{1}{2} kW_{00} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \sin \frac{1}{2} kW_{00} \right)^2 + \left(\cos kW_{00} + \cos \frac{1}{2} kW_{00} + \cos \frac{1}{2} kW_{00} + \cos kW_{00} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \cos \frac{1}{2} kW_{00} + \cos \frac{1}{2} kW_{00} \right)^2 \right] = \frac{1}{36} \left(2 \cos kW_{00} + 4 \cos \frac{1}{2} kW_{00} \right)^2 = \\
&= \frac{1}{9} \left(\cos kW_{00} + 2 \cos \frac{1}{2} kW_{00} \right)^2.
\end{aligned}$$

$$\text{При } W_{00} = \frac{1}{4}\lambda \text{ имеем } S_t = \frac{1}{9} \left(\cos \frac{1}{2}\pi + 2 \cos \frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{2}{9}.$$

Аналогично находим, что при $W_{00} = \frac{1}{8}\lambda$ число Штреля $S_t \approx 0,73$.

При $\omega_0 = 0,04$ величина $l' = \frac{W_{00}}{\omega_0} = \frac{\lambda}{8 \cdot 0,04} \approx 3\lambda$. Заметим, что при

$\frac{D_0}{f'_0} = 1:31,6$ радиус дифракционного пятна Эри равен

$r = \frac{1,22\lambda}{D_0} f'_0 = 1,22 \cdot 31,6\lambda \approx 38,5\lambda$. Если $N = 2$ ($\varphi_{01} = 0, \varphi_{02} = 180^\circ$), то

при $W_{00} = \frac{1}{12}\lambda$ число Штреля $S_t = 0,75$. При этом $\omega_0 \geq \sigma' \approx \frac{D_0}{2f'_0}$. И в

этом случае $l' = \frac{\lambda}{12} \frac{2f'_0}{D_0} \approx 5\lambda$.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что рассматриваемый вариант схемы не применим даже в модификации звёздного интерферометра. При этом представляется вполне очевидным, что, решив задачу совмещения изображений в одной плоскости, одновременно решим и проблему их фазового совмещения [17.6].

Известно [7], что наклон оптической системы приводит к наклону изображения. Действительно, если предмет расположен в бесконечности ($V = 0$), то наклон оптической системы φ_j на угол ω_j приводит к наклону плоскости изображения (фокальной плоскости) относительно её исходного положения на тот же угол ω_j , как показано на рис.7.6а. В этом случае изображение осевой точки предмета смещается из точки F'_{0j} в точку F'_j . Однако это смещение будет одинаковым при наклоне всех объективов телескопа на один и тот же по абсолютной величине угол ω . Если теперь ось O_j с помощью двухзеркальной системы совместить с осью $O_{j\omega}$, как показано на рис.7.3, а фокус F'_j с точкой F' , то наклона изображений относительно нормали к оси O (относительно общей плоскости изображений) не будет. Крайние точки изображения, образованного j -ым объективом при одинаковых по абсолютной величине полевых углах, обозначим буквами A'_j и B'_j . При этом разность оптических

пути $C_j A'_j - C_j B'_j$ определяет разность фаз световых возмущений в точках A'_j и B'_j . Заметим, что разность оптических путей $C_j A'_{0j} - C_j B'_{0j} = 0$.

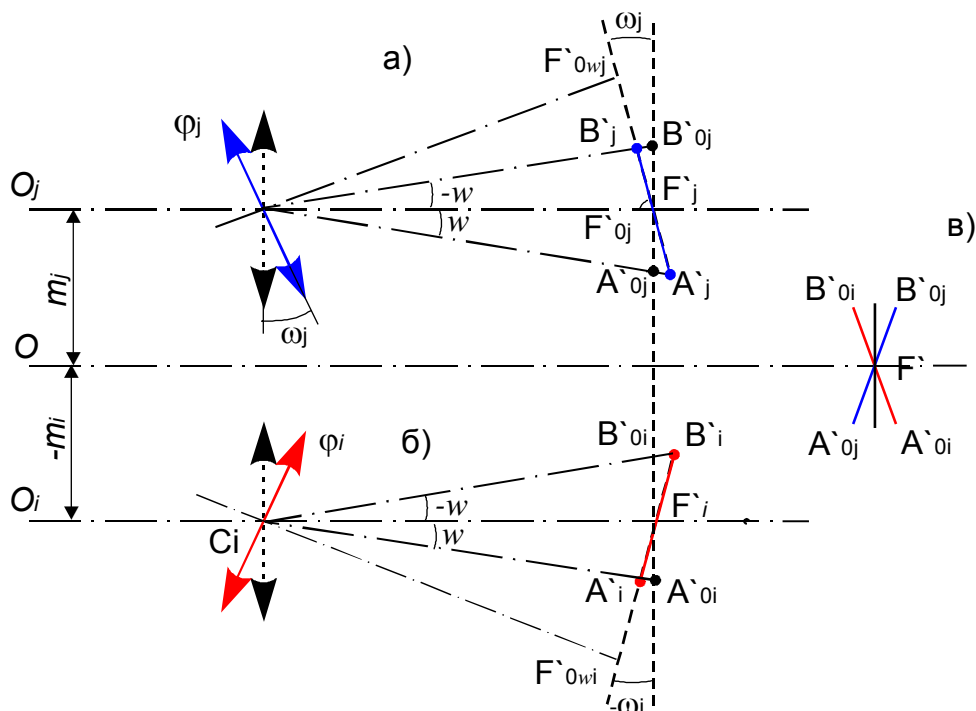


Рис. 7.6. К рассмотрению вопроса о фазовом смещении в изображении точек, полученного системой объективов

При наклоне i -го объектива, противоположного по расположению j -му объективу, на угол $\omega_i = -\omega_j$ получим наклон плоскости изображения (фокальной плоскости объектива φ_i) относительно исходного положения на тот же угол ω_i , как показано на рис.7.6б. Но и в этом случае при совмещении заднего фокуса F'_i с точкой F' фокальная плоскость i -го объектива будет расположена в плоскости, перпендикулярной оси O , т.е. наклона изображения, образованного i -ым объективом, относительно общей плоскости изображений не будет.

Вполне очевидно, что разность оптических путей $C_i A'_i - C_i B'_i = -(C_j A'_j - C_j B'_j)$. Заметим, что $C_i A'_{0i} = C_j A'_{0j}$, а $C_i B'_{0i} = C_j B'_{0j}$. При этом расстояния вдоль главных лучей между точками отрезков $A'_{0j} B'_{0j}$ и $A'_{0i} B'_{0i}$, как показано на рис.7.6в, определяют разность фаз световых возмущений в изображении

соответствующих точек, образованном j -ым и i -ым объективами. Таким образом, путём наклона объективов телескопа с синтезированной апертурой принципиально можно совместить плоскости образованных ими изображений. Однако, фазовые смещения складываемых световых колебаний в изображении точек остаются прежними.

Волновой фронт L_0 излучения осевой точки предмета оптическими системами модулей φ_j и φ_i преобразуется в синфазные волновые фронты, образующие изображение осевой точки в заднем фокусе соответствующего модуля. Пусть волновой фронт L

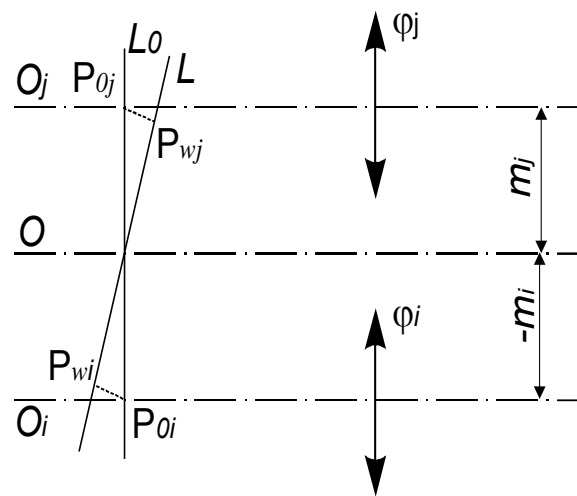


Рис.7.7. Наклонный волновой фронт L , падающий на систему объективов

излучения внеосевой точки предмета образует с волновым фронтом L_0 угол W , как показано на рис.7.7. Оптическая система каждого из модулей преобразует волновой фронт L в волновой фронт, формирующий изображение внеосевой точки.

Пусть точки P_{0j} и P_{0i} определяют положение центров входного зрачка оптических систем модулей φ_j и φ_i . Из рисунка следует, что волновой фронт L центр входного зрачка P_{0i} проходит с отставанием относительно центра входного зрачка P_{0j} , равным

$$W_{00ji} = W_{00j} - W_{00i} = (m_j - m_i)W = 2m_0W \quad (7.13)$$

Пусть $m_0 = 2,55$ м (МЗТ). При этом даже если $W = 1''$ величина $W_{00,ji} = 24,7$ мкм.

В 1991 году в связи с "непреодолимыми трудностями сведения шести фокусов в единый" решено демонтировать шесть телескопов МЗТ и заменить их одним телескопом с 6,5-метровым сотовым зеркалом [13.6].

Выполненный анализ модульного построения оптической схемы телескопа с синтезированной апертурой позволяет сделать вывод о том, что рассмотренный вариант схемы может найти применение для решения лишь тех задач, где требуется большая светособирающая поверхность и нет необходимости в высокой разрешающей способности оптической системы. Очевидным достоинством рассмотренного варианта построения оптической схемы телескопа является возможность независимой работы с каждым объективом (модулем), составляющим синтезированную апертуру [28.6].

Более естественно проблема фокусировки изображения и сопряжения волновых фронтов решается при втором варианте конструктивной реализации модульной структуры телескопа [15.6, 15.6].

7.2. Анализ оптической схемы телескопа с синтезированной апертурой, составленной из афокальных модулей

Принципиально оптическая схема этого варианта конструктивной реализации модульной структуры телескопа представляет собой сочетание афокальных оптических систем, оптические оси которых параллельны между собой и параллельны оптической оси центральной фокусирующей системы, расположенной за афокальными системами и формирующей окончательное изображение [15.6, 24.6, 8], как показано на рис.7.8.

Здесь T_j – телескопическая система; E_{1j}, E_{2j} – плоские зеркала; Φ – фокусирующая система. Для оценки качества изображения, образованного телескопом с синтезированной апертурой, необходимо определить структуру волнового фронта в пространстве перед фокусирующей системой.

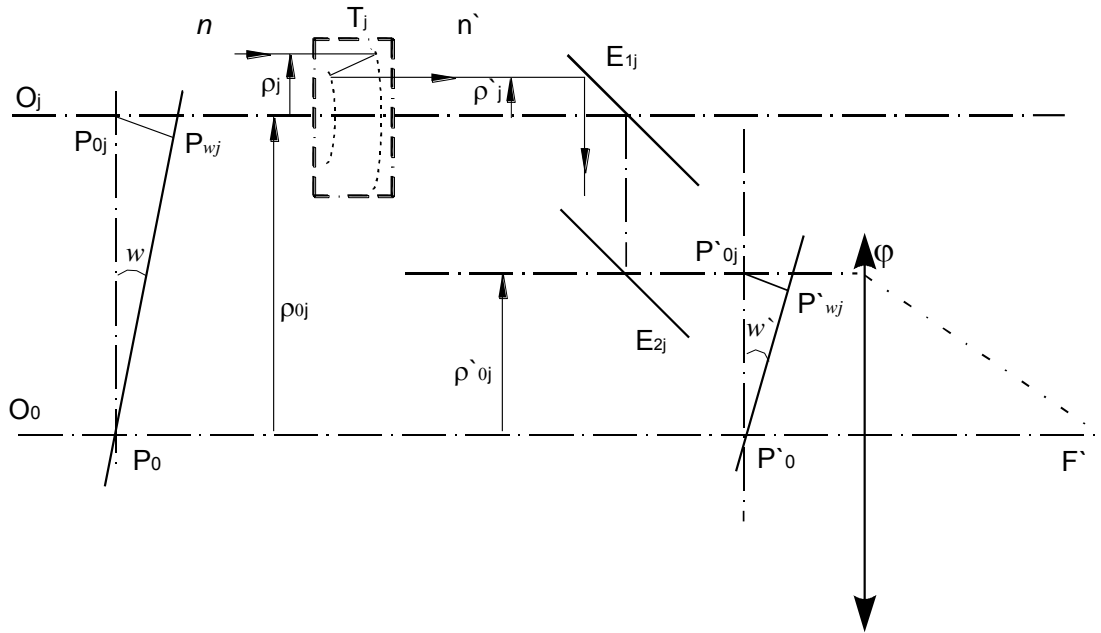


Рис.7.8. Оптическая схема телескопа с синтезированной апертурой, составленной из афокальных модулей

В общем виде волновую aberrацию телескопической системы в изображении внеосевой точки можно определить выражением вида:

$$W = W(w, m, M), \quad (7.13)$$

где w – половина углового поля системы; m, M – координаты луча на входном зрачке афокальной системы.

В общей структуре волнового фронта, образованного афокальными системами в составе синтезированной апертуры, волновую aberrацию j -ой телескопической системы, определяемую выражением (7.13), дополним фазовым сдвигом волнового фронта светового пучка, выходящего из выходного зрачка рассматриваемой системы, в направлении главного луча [9]. При этом получим

$$W_j = W_{00j}(w, 0, 0) + W_j(w, m, M). \quad (7.14)$$

Для определения величины $W_{00j}(w, 0, 0)$ обратимся к рис.7.8, в соответствии с которым имеем

$$P_{0j}P_{wj} = \Delta_j = \rho_{0j} \sin w;$$

$$P'_{0j}P'_{wj} = \Delta'_j = \rho'_{0j} \sin w'.$$

При $\frac{\rho'_{0j}}{\rho_{0j}} = \text{const}$ фазовое смещение волнового фронта в

направлении главного луча можно определить разностью

$$W_{00j}(w, 0, 0) = n'\Delta'_j - n\Delta_j = n'\rho'_{0j} \sin w' - n\rho_{0j} \sin w,$$

которую можно представить выражением вида:

$$W_{00j}(w, 0, 0) = \left(\frac{V_{0cj}}{V_{cj}} - 1 \right) n\rho_{0j} \sin w, \quad (7.15)$$

где V_{cj} – поперечное увеличение в зрачках j -ой телескопической системы, равное $V_{cj} = \frac{n \sin w}{n' \sin w'}$. При $w \rightarrow 0$ имеем: $V_{0cj} = \frac{\rho'_{0j}}{\rho_{0j}}$.

При $V_{cj} = V_{0cj} = const$ справедливы равенства $\rho'_{0j} = V_{0cj}\rho_{0j}$, а $D'_j = V_{0cj}D_j$, где D_j – диаметр входного зрачка j -ой телескопической системы. Здесь применимо золотое правило апертурного синтеза [10], согласно которому форма входного зрачка фокусирующей системы должна быть геометрически подобной форме синтезированной апертуры, собранной из отдельных телескопов. При нарушении этого условия появляется дополнительный фазовый сдвиг наклонного (полевого) волнового фронта в направлении главного луча на величину, определяемую выражением (7.15). Поэтому условие

$$\frac{n \sin w}{n' \sin w'} = const$$

вполне можно назвать условием синусов апертурного синтеза.

Возможным элементом рассматриваемого варианта оптической системы с синтезированной апертурой может служить телескопическая система Мерсена [8, 9], не представляющая большого практического интереса [11] при традиционном построении оптической схемы телескопа. Известно [12], что система Мерсена является апланатическим анастигматом в изображении бесконечно удаленных предметов. Для предметов, расположенных на конечном расстоянии, отмеченными достоинствами система не обладает. Оптическую систему Мерсена образуют два отражающих параболоида, расстояние между которыми $d = \frac{r_{01} - r_{02}}{2}$, где r_{01}, r_{02} – радиусы кривизны поверхностей при вершине первого и второго параболоидов соответственно. При телецентрическом ходе главных лучей между отражающими поверхностями системы углы наклона волновых фронтов в пространстве предметов и изображений взаимосвязаны соотношением вида:

$$r_{01} \operatorname{tg} \frac{w}{2} = r_{02} \operatorname{tg} \frac{w'}{2}.$$

Это соотношение легко преобразовать к виду:

$$\frac{\sin w}{\sin w'} = \frac{2\Gamma_{0j}}{2 + (\Gamma_{0j}^2 - 1)(1 - \cos w)}, \quad (7.16)$$

где Γ_{0j} – угловое увеличение изображения, образованного j -ой телескопической системой, равное $\Gamma_{0j} = \frac{r_{01}}{r_{02}}$. Подставив соотношение (7.16) в формулу (7.15), при $\rho_{0j} = \Gamma_{0j}\rho'_{0j}$ и $n' = n$ получим

$$W_{00j}(w, 0, 0) = -\frac{(\Gamma_{0j}^2 - 1)(1 - \cos w)}{2 + (\Gamma_{0j}^2 - 1)(1 - \cos w')} \rho_{0j} \sin w, \quad (7.17)$$

При $N = 6$ и $D_0 = 1,8$ м величина $\rho_{0j} = \frac{D_0}{2 \sin \frac{\pi}{N}} \approx 1,74$ м.

Пусть $2w = 10'$, а $\Gamma_{0j} = 5^X$. Подставив эти величины в выражение (7.17), получим $W_{00j}(w, 0, 0) = -0,033$ мкм.

Для компенсации кривизны изображения систему Мерсена можно заменить сочетанием двух афокальных систем галилеевского и кеплеровского типа в любой последовательности, при этом из конструктивно – технологических и габаритных соображений первую отражающую поверхность первой системы целесообразно использовать в качестве первой отражающей поверхности второй системы Мерсена [13], как показано на рис.7.9. Полученная таким образом система по коррекции aberrаций представляет собой апланатический плананастигмат, вполне пригодный, как показано в [14] для практического воплощения модульной структуры построения оптических систем телескопов с синтезированной апертурой.

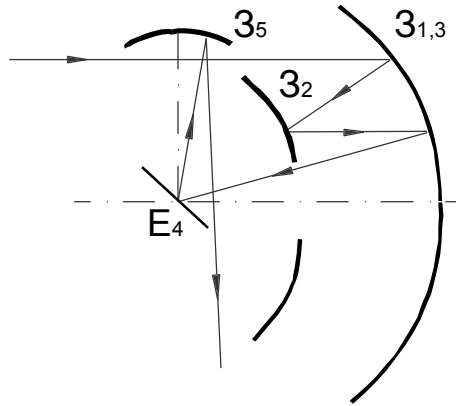


Рис.7.9. Сочетание двух афокальных систем галилеевского и кеплеровского типа

Другой вариант конструктивной реализации системы в составе схемы оптики телескопа представлен на рис.7.10.

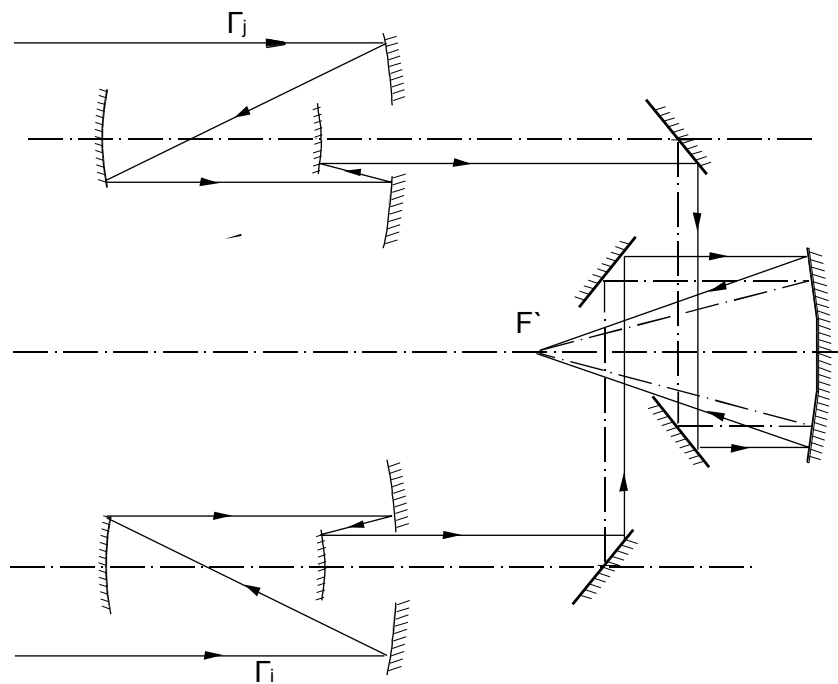


Рис.7.10. Вариант построения модульного телескопа с использованием афокальных систем

Итак, в оптической системе телескопа с синтезированной апертурой, основанной на применении сочетания афокальных систем, не существует принципиальных проблем фокусировки изображения и фазового сопряжения образующих его световых пучков лучей.

Однако, возможность независимого применения афокальных систем, образующих рассматриваемую схему, не очевидна.

Таким образом, разработка оптической системы высокоапертурного телескопа с главным "квазисплошным" (сегментированным) зеркалом сферической формы, построенной на основе традиционной схемы, остаётся перспективным направлением поиска оптимального решения поставленной задачи.

7.3. Варианты композиции оптических систем с синтезированной апертурой при традиционной схеме построения телескопа

Как уже отмечалось, телескопическая система Мерсена, образованная сочетанием двух отражающих параболоидов, по коррекции aberrаций представляет собой апланатический анастигмат в изображении бесконечно удалённых предметов. Как показано в [15], в сочетании главного зеркала сферической формы с вторичным зеркалом, имеющим несферическую форму отражающей поверхности. Можно получить телескопическую систему, строго анаберационную в изображении осевой точки, что существенно упрощает их взаимную юстировку в процессе сборки. В работе [16] показана принципиальная возможность апланатической коррекции aberrаций в системе, образованной сочетанием афокальной насадки зафокального (с промежуточным изображением) типа с отражающим параболоидом. Конструктивные параметры и aberrационные данные разработанного в настоящей работе варианта оптической системы телескопа с диаметром главного зеркала телескопа сферической формы $D = 10$ м представлены на рис.7.11 и 7.12.

При диафрагменном числе главного зеркала $k_{q/z} = 2,5$ диафрагменное число всей системы при апланатической коррекции aberrаций на краю зрачка $k = 1,63$.

Приняв число Штреля S_t равным 0,8, находим, что угловое поле такой системы $2w = 8''$, пятно рассеяния в изображении точек не превосходит в угловой мере $0,1''$ на поле $2w = 24''$, а $0,2''$ – на поле $2w = 34,3''$.

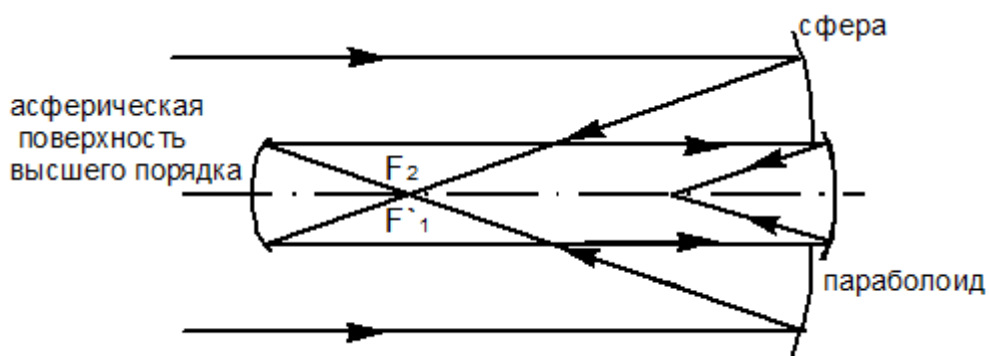


Рис.7.11. Оптическая схема трёхзеркальной системы телескопа

Таблица 7.1. Технические характеристики объектива

N	Название характеристики	Значение
1	Фокусное расстояние, мм	16373.8
2	Диафрагменное число	1.63738
3	Угловое поле, угловые секунды	34.3"
4	Положение предмета	бесконечность
5	Задний фокальный отрезок, мм	-4093.46
6	Диаметр входного зрачка	10000
7	Положение входного зрачка относительно первой поверхности	0
8	Положение выходного зрачка относительно последней поверхности	-4142.54
9	Основная длина волны, нм	546.070

Таблица 7.2. Конструктивные параметры оптической системы телескопа

№ пов.	Радиус, мм	Осевое расстояние, мм	Показатель преломления	Световой диаметр, мм	Непрозрачные экраны
			1		
1	-50000	-31250	-1	10005.04	2778
2	12500*	-31250	1	2569.51	
3	-8186.924**		-1	2777.10	

Уравнения поверхностей:

*) $x^2 + y^2 = 25000z + 3,99979739z^2 - 0,0015889488z^3; +$

$+0,000001102654z^4,$

***) $x^2 + y^2 = -16373,84766z.$

Таблица 7.3. Аберрации осевой точки

Отн зр коор	Продольные аберрации $\Delta S'$, мм	Поперечные аберрации $\Delta y'$, мм,	Волновые аберрации W , дл. волн	Неизопланатизм η , (%)
1	-0.0000055	-0.0000018	-0.0033	-0.0671
0.866	0.0000319	0.00000875	-0.0018	-0.0694
0.707	-0.000075	-0.000017	-0.0027	-0.0589
0.5	0.000106	0.0000163	-0.0027	-0.0358

Таблица 7.4. Кома, астигматизм и кривизна изображения

Размер предм., w	Кома, мм	Астигматизм, мм	Кривизна поверхности изображения, мм
12,11"	0,00177	-0.0191	- 0.00015
17,15"	0,00175	-0.0381	- 0.00045

Аберрации в изображении внеосевой точки в меридиональной плоскости для величин предмета $w = 17,15''$ и $w = 12,11''$ представлены в таблицах 7.5а и 7.5б соответственно.

Таблица 7.5.а

Отн зр коор	Поперечные аберрации $\Delta y'$, мм,	Волновые аберрации W , дл. волн
1	-0.0166	4.18
0.866	-0.0133	3.10
0.707	-0.0103	2.07
0.5	-0.0073	1.07
-0.5	0.00993	1.37
-0.707	0.0138	2.77
-0.866	0.0158	4.12
-1	0.0166	5.37

Таблица 7.5.б

Отн зр коор	Поперечные аберрации $\Delta y'$, мм,	Волновые аберрации W , дл. волн
1	-0.0083	2
0.866	-0.0064	1.46
0.707	-0.0048	0.974
0.5	-0.0034	0.507
-0.5	0.00522	0.708
-0.707	0.00725	1.44
-0.866	0.00817	2.15
-1	0.00828	2.78

Аберрации в изображении внеосевой точки в сагиттальной плоскости для величин предмета $w = 17,15''$ и $w = 12,11''$ представлены в таблицах 7.6а и 7.6б соответственно.

Таблица 7.6.а

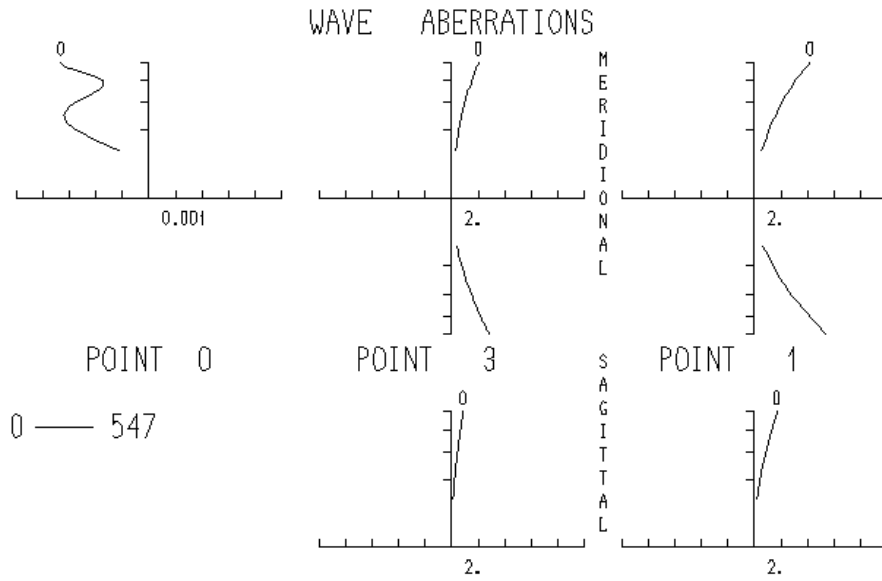
Отн зр коор	Поперечные абerrации $\Delta y'$, мм,	Поперечные абerrации $\Delta x'$, мм,	Волновые абerrации W , дл. волн
1	0.000945	-0.0061	1.68
0.866	0.000968	-0.0052	1.26
0.707	0.000818	-0.0043	0.834
0.5	0.000496	-0.0030	0.414

Таблица 7.6.б

Отн зр коор	Поперечные абerrации $\Delta y'$, мм,	Поперечные абerrации $\Delta x'$, мм,	Волновые абerrации W , дл. волн
1	0.000657	-0.003	0.838
0.866	0.000675	-0.0026	0.627
0.707	0.000572	-0.0021	0.415
0.5	0.000347	-0.0015	0.206

На рис.7.12 представлены графики абerrаций трёхзеркальной системы со сферическим главным зеркалом, обладающей апланатической коррекцией.

FIN



FIN

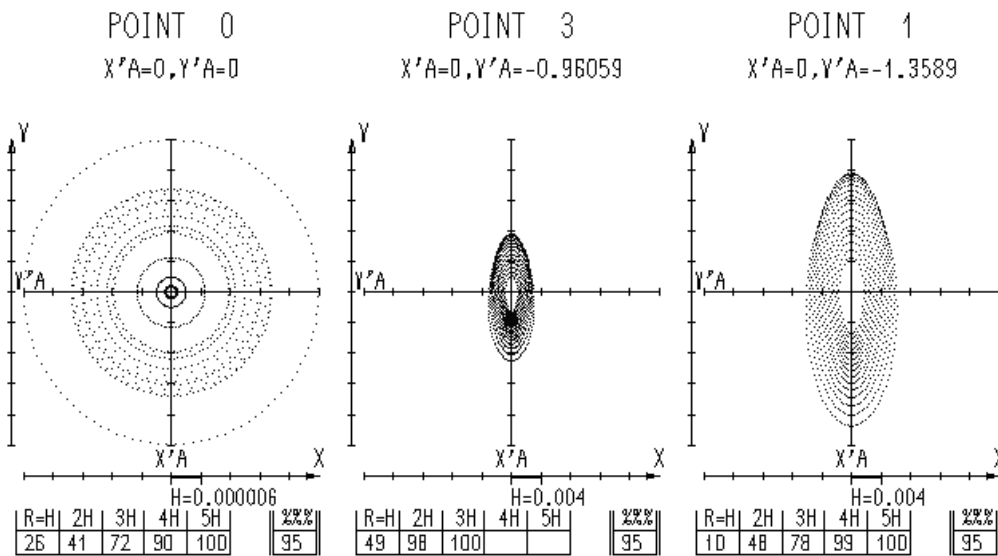


Рис.7.12 Графики aberrаций трёхзеркальной системы со сферическим главным зеркалом, обладающей апланатической коррекцией

Для сравнения произведён расчёт классической двухзеркальной системы телескопа Кассегрена (рис.7.13 и 7.14). При той же оптической силе, пятно рассеяния в изображении точек не превосходит в угловой мере $0,1''$ на поле $2w=3''$, а $0,2''$ – на поле

$2w = 5,8''$, приняв число Штреля S_t равным 0,8, находим, что угловое поле такой системы $2w = 0,5''$. При диафрагменном числе главного зеркала $k_{q\tilde{A}\zeta} = 2,5$ диафрагменное число всей системы $k = 1,63$.

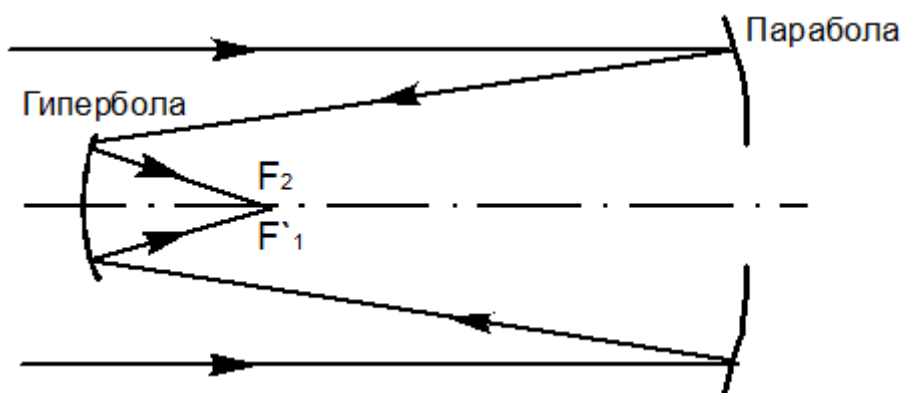


Рис.7.13. Оптическая схема телескопа Кассегрена

Таблица 7.7. Технические характеристики объектива Кассегрена

N	Название характеристики	Значение
1	Фокусное расстояние, мм	16373.8
2	Диафрагменное число	1.63738
3	Угловое поле, угловые секунды	5.8"
4	Положение предмета	бесконечность
5	Задний фокальный отрезок, мм	4912.20
6	Диаметр входного зрачка	10000
7	Положение входного зрачка относительно первой поверхности	0
8	Положение выходного зрачка относительно последней поверхности	76343.8
9	Основная длина волны, нм	546.070

Таблица 7.8. Конструктивные параметры оптической системы телескопа

№ пов.	Радиус, мм	Осевое расстояние, мм	Показатель преломления	Световой диаметр, мм	Непрозрачные экраны
			1		
1	-50000*	-17500	-1	10005.01	3050
2	28473.200**		1	3048.54	

Уравнения поверхностей:

*) $x^2 + y^2 = -100000z$

***) $x^2 + y^2 = 56946,4z + 22,0057087z^2$.

Таблица 7.9. Аберрации осевой точки

Отн зр коор	Продольные абerrации $\Delta S'$, мм	Поперечные абerrации $\Delta y'$, мм,	Волновые абerrации W , дл. волн	Неизопланатизм η , (%)
1	0	0	0	2.33
0.866	0	0	0	1.75
0.707	0	0	0	1.17
0.5	0	0	0	0.583

Таблица 7.10. Кома, астигматизм и кривизна изображения

Размер предм., w	Кома, мм	Астигматизм, мм	Кривизна поверхности изображения, мм
2,04"	0.0165	0	0
2,89"	0.0117	0	0

Аберрации в изображении внеосевой точки в меридиональной плоскости для величин предмета $w = 2,89''$ и $w = 2,04''$ представлены в таблицах 7.11а и 7.11б соответственно.

Таблица 7.11а

Отн зр коор	Поперечные абerrации $\Delta y'$, мм,	Волновые абerrации W , дл. волн
1	0.0165	2.92
0.866	0.0123	1.91
0.707	0.00814	1.04
0.5	0.00404	0.371
-0.5	0.00404	-0.371
-0.707	0.00814	-1.04
-0.866	0.0123	-1.91
-1	0.0165	-2.92

Таблица 7.11б

Отн зр коор	Поперечные абerrации $\Delta y'$, мм,	Волновые абerrации W , дл. волн
1	0.0117	2.07
0.866	0.00870	1.35
0.707	0.00576	0.739
0.5	0.00286	0.263
-0.5	0.00286	-0.263
-0.707	0.00576	-0.738
-0.866	0.00870	-1.35
-1	0.0117	-2.06

Абerrации в изображении внеосевой точки в сагиттальной плоскости для величин предмета $w = 2,89''$ и $w = 2,04''$ представлены в таблицах 7.12а и 7.12б соответственно.

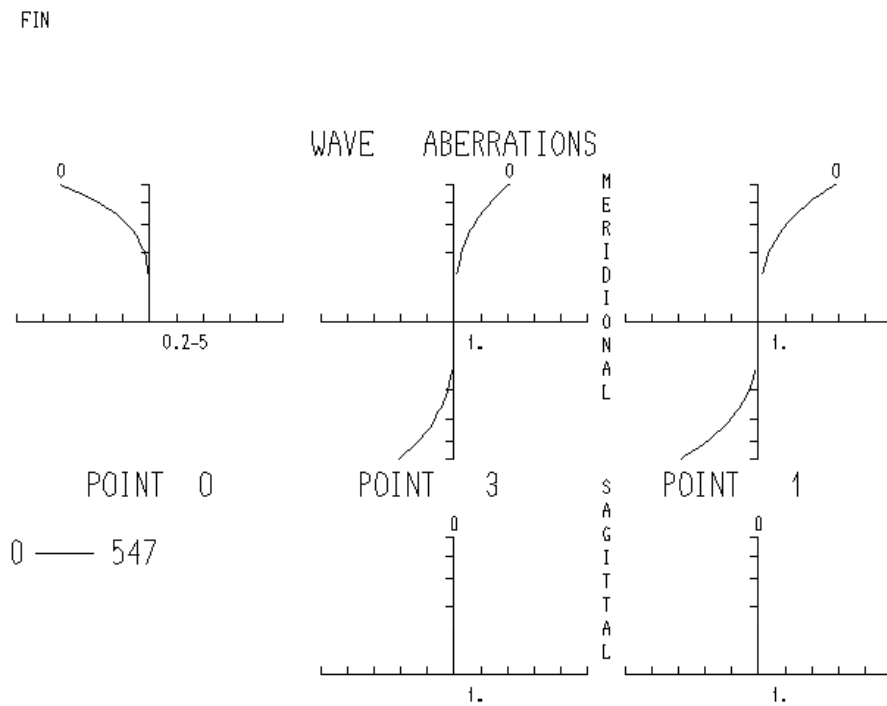
Таблица 7.12.а

Отн зр коор	Поперечные абerrации $\Delta y'$, мм,	Поперечные абerrации $\Delta x'$, мм,	Волновые абerrации W , дл. волн
1	0.00534	0	0.000259
0.866	0.00401	0	0.000198
0.707	0.00267	0	0.000134
0.5	0.00134	0	0.0000684

Таблица 7.12.б

Отн зр коор	Поперечные абerrации $\Delta y'$, мм,	Поперечные абerrации $\Delta x'$, мм,	Волновые абerrации W , дл. волн
1	0.00378	0	0.000126
0.866	0.00283	0	0.000097
0.707	0.00189	0	0.000066
0.5	0.000945	0	0.000034

На рис.7.14 представлены графики абerrаций трёхзеркальной системы со сферическим главным зеркалом, обладающей апланатической коррекцией.



FIN

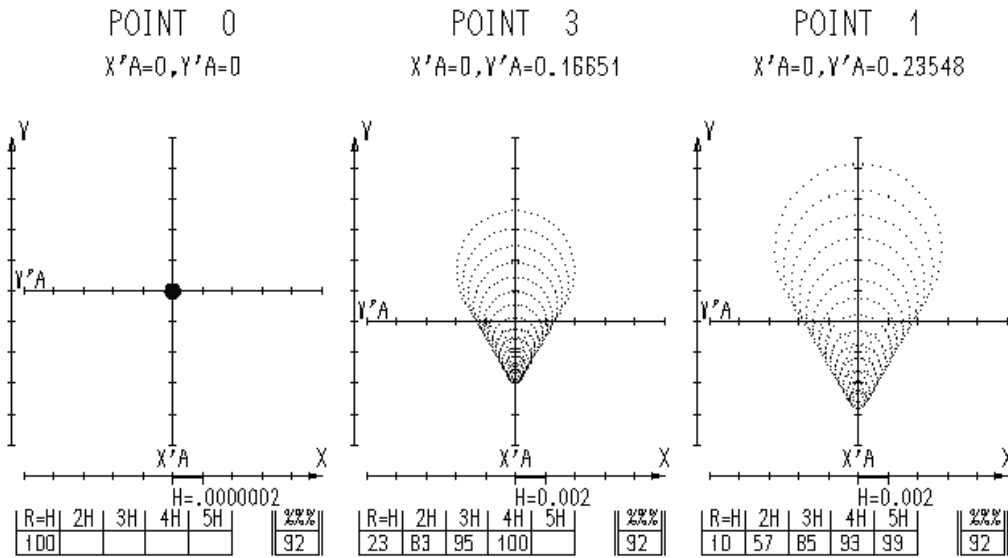


Рис.7.14. Графики aberrаций афокальной системы касегреновского типа

Заменив отражающий параболоид двухзеркальной системой с несферическими отражающими поверхностями, получаем четырёхзеркальную систему, которая обладает апланатической коррекцией aberrаций для всех точек зрачка. На этапе габаритного расчёта данной системы корригируется aberrация кривизны получаемого изображения. Следовательно, изображение такой системы будет определяться остаточным астigmatизмом. Конструктивные и aberrационные характеристики, которой представлены на рис.7.15 и 7.16. При диафрагменном числе главного зеркала $k_{q\tilde{A}\zeta} = 2,5$ диафрагменное число всей системы $k = 4$. Здесь при $S_t = 0,8$ угловое поле $2w = 32''$, пятно рассеяния в изображении точек не превосходит в угловой мере $0,1''$ на поле $2w = 1'25''$, а $0,2''$ – на поле $2w = 2'06''$.

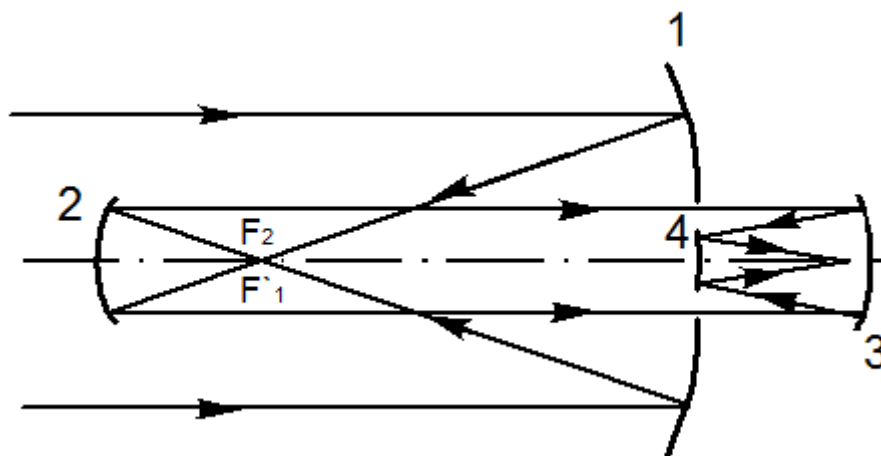


Рис.7.15. Оптическая схема четырёхзеркальной системы со сферическим главным зеркалом, обладающей апланатической коррекцией aberrаций.
1 – сфера; 2,3,4 – асферические поверхности высших порядков

Таблица 7.13. Технические характеристики объектива четырёхзеркальной системы

N	Название характеристики	Значение
1	Фокусное расстояние, мм	-39999.9
2	Диафрагменное число	3.99999
3	Угловое поле, угловые секунды	2'05.9"
4	Положение предмета	бесконечность
5	Задний фокальный отрезок, мм	3027.74
6	Диаметр входного зрачка	10000
7	Положение входного зрачка относительно первой поверхности	0
8	Положение выходного зрачка относительно последней поверхности	247047
9	Основная длина волны, нм	546.070

Таблица 7.14. Конструктивные параметры оптической системы телескопа

№ пов.	Радиус, мм	Осевое расстояние, мм	Показатель преломления	Световой диаметр, мм	Непрозрачные экраны
			1		
1	-50000	-31250	-1	10005.15	2620
2	12500*	31250	1	2583.56	
3	-8685.170**	-3027.76	-1	2615.53	790
4	-4648.16***		1	789.5	

Уравнения поверхностей:

$$*) x^2 + y^2 = 25000z + 3,99979739z^2 - 0,0015889488z^3 + 0,000001102654z^4,$$

$$**) x^2 + y^2 = -17370,34z - 0,8843119449z^2 - 0,00048011211z^3 - 0,00000027021627z^4 + 0,0000000002272267z^5,$$

$$**) x^2 + y^2 = 9296,32z - 10,70402698z^2 - 0,0495202606z^3 - 0,00018334846z^4 + 0,0000004550736z^5,$$

Таблица 7.15. Аберрации осевой точки

Отн зр коор	Продольные аберрации $\Delta S'$, мм	Поперечные аберрации $\Delta y'$, мм,	Волновые аберрации W , дл. волн	Неизопланатизм η , (%)
1	0	0	0	0
0.866	0	0	0	0
0.707	0	0	0	0
0.5	0	0	0	0

Таблица 7.16. Кома, астигматизм и кривизна изображения

Размер предм., w	Кома, мм	Астигматизм, мм	Кривизна поверхности изображения, мм
44,55"	0	0.133	-0.0001
1,05'	0.0001	0.266	-0.0005

Аберрации в изображении внеосевой точки в меридиональной плоскости для величин предмета $w = 1,05'$ и $w = 44,55''$ представлены в таблицах 7.17а и 7.17б соответственно.

Таблица 7.17а

Отн зр коор	Поперечные аберрации $\Delta y'$, мм,	Волновые аберрации W , дл. волн
1	-0.0391	5.04
0.866	-0.0360	3.90
0.707	-0.0312	2.68
0.5	-0.0235	1.38
-0.5	0.0235	1.39
-0.707	0.0313	2.70
-0.866	0.0362	3.94
-1	0.0393	5.11

Таблица 7.17б

Отн зр коор	Поперечные аберрации $\Delta y'$, мм,	Волновые аберрации W , дл. волн
1	-0.0196	2.53
0.866	-0.0180	1.95
0.707	-0.0156	1.34
0.5	-0.0118	0.692
-0.5	0.0118	0.695
-0.707	0.0156	1.35
-0.866	0.0180	1.97
-1	0.0196	2.55

Аберрации в изображении внеосевой точки в сагиттальной плоскости для величин предмета $w = 1,05'$ и $w = 44,55''$ представлены в таблицах 7.18а и 7.18б соответственно.

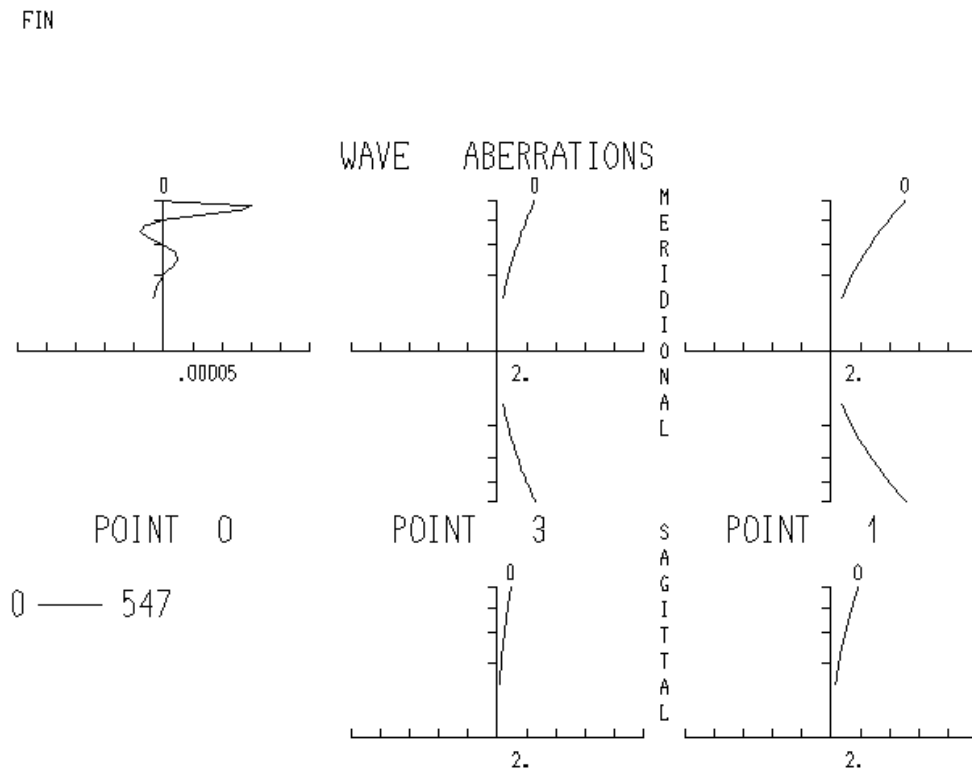
Таблица 7.18.а

Отн зр коор	Поперечные аберрации $\Delta y'$, мм,	Поперечные аберрации $\Delta x'$, мм,	Волновые аберрации W , дл. волн
1	0	-0.0152	1.82
0.866	0	-0.0135	1.38
0.707	0	-0.0113	0.932
0.5	0	-0.0081	0.471

Таблица 7.18.б

Отн зр коор	Поперечные абerrации $\Delta y'$, мм,	Поперечные абerrации $\Delta x'$, мм,	Волновые абerrации W , дл. волн
1	0	-0.0076	0.911
0.866	0	-0.0067	0.691
0.707	0	-0.0056	0.466
0.5	0	-0.0041	0.236

На рис.7.16 представлены графики абerrаций четырёхзеркальной системы.



FIN

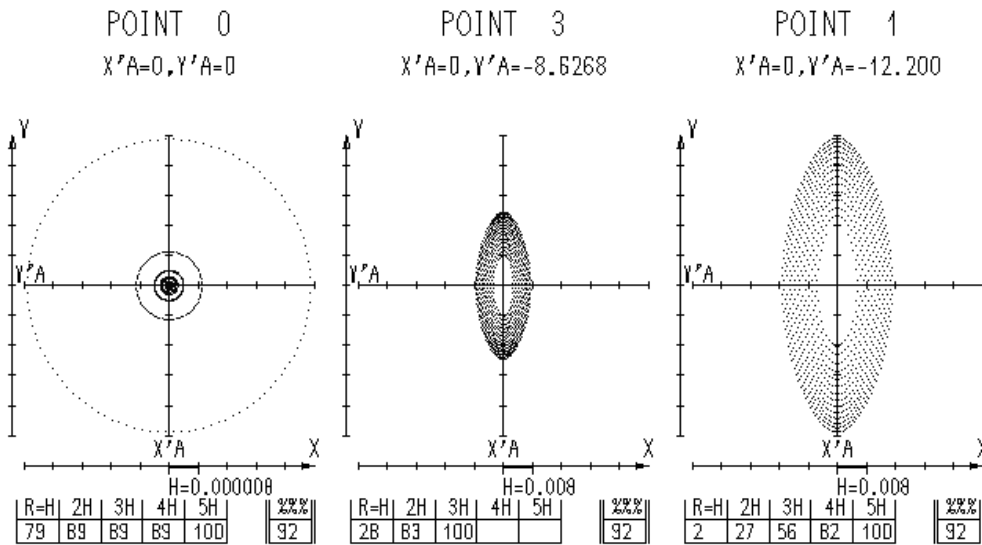


Рис.7.16. Графики aberrаций четырёхзеркальной системы

Оптимизация параметров разработанных оптических систем выполнялась с применением программного обеспечения SARO и OPAL.

Выполненный анализ оптических схем построения высокоапертурных телескопов позволяет сделать следующие выводы:

1. В оптической схеме телескопа, представляющей собой сочетание независимых объективов, плоскости изображения, образованные ими, наклонены друг к другу и к общей плоскости регистрации изображения.

2. Показана принципиальная возможность совмещения изображений в одной плоскости путём наклона объективов.

3. Продемонстрировано, что в такой схеме невозможно фазовое сопряжение изображений, образованных каждым из объективов.

4. Указано, что в оптической схеме телескопа, образованной сочетанием афокальных модулей, нет принципиальных проблем с фокусировкой и фазовым сопряжением образованных изображений, но в связи с невозможностью их независимого использования теряется смысл применения такой модульной структуры.

5. Разработка оптической системы высокоапертурного телескопа с сегментированным главным зеркалом сферической формы, построенной на основе традиционной схемы, остаётся перспективным

направлением поиска оптимального решения рассматриваемой задачи.

Вполне очевидно, что рассмотрение принципиальных схем оптических систем и некоторых вопросов, определяющих стабильность формы отражающих поверхностей, их составляющих, не исчерпывают всех проблем создания высокоапертурных телескопов. Достаточно наглядное представление о сложности проблем создания современных телескопов с большой апертурой, говорит о причинах жизнестойкости традиционных схем их построения.

На основании осуществленного анализа можно сделать следующие выводы:

1. Эффективным путём уменьшения массы главного зеркала является замена сплошной апертуры составной.

2. Оптические системы с составной апертурой позволяют создать более эффективные телескопы при умеренных затратах.

3. Звёздный интерферометр Майкельсона можно рассматривать, как переменный фильтр пространственных частот.

4. Принципиально возможно совмещение изображений, образованных каждым из объективов, составляющих синтезированную апертуру телескопа, но невозможно их фазовое сопряжение.

5. Не очевидна возможность независимого использования афокальных систем, образующих синтезированную апертуру модульного телескопа, в связи, с чем теряется смысл их применения.

6. Результаты выполненных исследований позволяют сделать обоснованный выбор оптической схемы высокоапертурного телескопа с синтезированной апертурой на основе традиционной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беседы по автоматике. Голубничий Н.И., Зайцев Г.Ф., Иващенко М.А., Чинаев П.И., Чумаков Н.М. Киев: "Техника", 1971, С.232.
2. Щеглов П.В. Проблемы оптической астрономии.–М.: Наука, 1980, С.272.
3. Адаптивная оптика: Пер. с англ. / Под ред. Э.А.Витриченко. –М.: Мир, 1980.
4. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах. Сборник научных трудов. Горький: Институт прикладной физики АН СССР, 1979, С.206.
5. Проектирование оптических систем. / Под ред. Р.Шеннона, Дж.Вайанта, Э.Уэзерелл. Оценка качества изображения.
6. Э.А. Витриченко, Наземный адаптивный телескоп. В сб. Атмосферная нестабильность и адаптивный телескоп. Л.: Наука, 1988. 144 с.
7. М.А. Воронцов, А.В. Корябин, В.И. Шмальгаузен. Методы адаптивной оптики в задачах управления структурой излучения. В информационном издании ВИНТИ «Итоги науки и техники». Серия «Управление пространственной структурой оптического излучения». Том 1. Проблемы управления пространственной структурой световых пучков. Москва. 1990.
8. М.А. Воронцов. Принципы адаптивной оптики. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 336 с., ил.
9. В.Г. Тараненко, О.И. Шанин. Адаптивная оптика. – М.: Радио и связь, 1990. – 112 с.: ил.
10. Ю.В. Баранов, С.Б. Новиков, А.А. Овчинников. Улучшение разрешения телескопа с помощью компенсатора наклонов волнового фронта. В сб. статей Атмосферная нестабильность и адаптивный телескоп. Л.: Наука, 1988. 144 с.
11. Н.Д. Устинов, А.С. Васильев и др. Астрономический телескоп АСТ-1200 с составным главным зеркалом. «ОМП», 1985, №11, стр. 22-25; Н.В. Стешенко, В.В. Сычев. Адаптивные оптические системы в крупногабаритном телескопостроении// Итоги науки и техники. Сер. Управление пространственной структурой оптического излучения. Т. 1. – М.: ВИНТИ, 1990. – С. 107–167.
12. Дж. Харди, Дж. Лефевр, К. Колиопулос Компенсация атмосферных возмущений в реальном времени. В сборнике статей “Адаптивная оптика”. Пер. с англ. под ред. Э.А. Витриченко. Стр. 304–331.

13. Дж. В. Харди. Роль активной оптики в крупных телескопах. – В кн.: Оптические телескопы будущего. – М.: Мир, 1981, стр. 341 – 359.
14. М.М. Русинов. Несферические поверхности в оптике. - М.: Недра, 1973, 296 стр.
15. Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В.И. Управляемые оптические системы. – М.: Наука, 1988. – 272 с.: ил.
16. С. А. Ахманов, С. Ю. Никитин. Физическая оптика. — М.: Изд-во МГУ, 1998, 654 с, с. 86.
17. О'Нейл. Введение в статистическую оптику. – М.: «Мир», 1966, 254 с.
18. Зверева С.В. В мире солнечного света. Л., Гидрометеиздат, 1988, 160 с.
19. Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. Справочник по физике, М.: Наука, 1968.
20. Kolmogorov A. – In: Turbulence, Classic Papers on Statistical Theory, eds. S.K. Friedlander, L. Topper. – N.Y.: Wiley – Interscience, 1961.
21. Бейтмен Г., Эрдейи А. при участии Магнуса Б., Оберхеттингера Ф., Трикоми Ф. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. – М.: Наука, 1964.
22. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах. – М.: Мир, 1981.
23. И.Н. Бронштейн и К.А. Семендяев, Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1981, стр. 366–369.
24. Лейзер Д. Создавая картину вселенной: Пер. с англ. /Под ред. Л.П. Грищука. М.: Мир, 1988, 324 с.
25. Вавилов С.И. Собрание сочинений. Том III. - М.: Изд-во АН СССР, 1956, стр.664-700.
26. Храмов Ю.А. Физики: биографический справочник. М.: Наука, Гл. ред. физ. – мат. лит., 1983, 400с.
27. Гуриков В.А. Становление прикладной оптики XV – XIX вв. М.: Наука, 1983, 187с.
28. Создание большого астрономического телескопа БТА. /Под ред. В.Ю. Торочкова. М.: ЦНИИ информации, 1976, 83с.
29. Щеглов П.В. Предисловие к коллективной монографии «Оптические телескопы будущего», М.: Мир, 1981. – 432с.
30. Albert Tebo. Astronomy for the 21st century: current developments. //OE Reports, № 134, february 1995. p. 8-9.

31. Kilston S., Begley D.L. Next-generation space telescope (NGST) and space-based optical SETI. //Proc. SPIE 8/2001, Vol.4273, P.136-143.
32. Coulter D.R., Jacobson D.N. Technology for the Next Generation Space Telescope. // Proc. SPIE 7/2000, Vol.4013, P.784-794.
33. Еськов Д.Н., Бонштедт Б.Д., Лебедева Г.И., Родионов С.А. Внеатмосферные адаптивные телескопы (направления развития). //Оптический журнал, 1995, №10, с.66.
34. Albert Tebo. Astronomy for the 21st century: new telescope mirror designs, mounting methods, materials.// OE Reports, № 135, march 1995. p. 1,7-8.
35. Родионов С.А., Корепанов В.С., Еськов Д.Н., Бонштедт Б.Э. Проблемы апертурного синтеза. //Оптический журнал, №10, 1995.- стр. 17-25.
36. Цуканова Г.И. Оптические системы телескопов с синтезированной апертурой. // Оптический журнал, №9, 1994.- стр. 28-31.
37. Русинов М.М., Цуканова Г.И. Авт. Св. СССР № 308402, 1971, Бюлл. Изобр. №21, с.176.
38. Рябова Н.В. Составные активные зеркала для телескопов. //ОМП, 1975, №11, с.58.
39. Shumilov Y.P., Bacut P.A., Grishina I.A., Sychev V.V. Segmented primary mirror telescope image quality estimation.//Proc.SPIE,7/2000,Vol.4013,P.262-269.
40. O'Neil-Petersen M. Optical design and performance analysis of 25-m class telescope with a segmented spherical primary. // Proc. SPIE 3/1997, Vol.2871, P.607-612.
41. Зверев В.А., Бахолдин А.В., Гаврилюк А.В. Оптическая система высокоапертурного телескопа. //Оптический журнал, том 68, №6, стр.6-14.
42. Бахолдин А.В. Автореферат кандидатской диссертации./СПб. 2002. 16 стр.
43. Гоголев Ю.А., Зверев В.А., Пожинская И.И., Соболев К.Ю. Анализ основных проблем создания оптики крупных телескопов. //Оптический журнал, 1996, №4, стр.16-32.
44. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1975, 855с.
45. Рябова Н.В., Захаренков В.Ф. Активная и адаптивная оптика в крупногабаритных телескопах. //Оптический журнал. 1992, №6, стр.5.

46. Г.К. Карпентер и Дж.. Ринс, Дж. Ф. Лонг, Д.А.У. Тейлор, Д. Уолтшоу, А.Вильсон Особенности конструкции крупных световых коллиматоров оптического и ИК-диапазона; английский 3,8 м инфракрасный телескоп. Стр.54-56 в книге «Оптические телескопы будущего», пер. с англ., под ред. Ф. Пачини, В Рихтера, Р. Вильсона. М.: Мир, 1981. 432стр.
47. П.А. Стритматтер. Многозеркальные телескопы. стр. 121-141, в книге «Оптические телескопы будущего», пер. с англ., под ред. Ф. Пачини, В. Рихтера, Р. Вильсона.- М.: Мир, 1981. – 432стр.
48. М.М. Мирошников, С.В. Любарский, Ю.П. Химич. Зеркала оптических телескопов, //ОМП, 1990, № 9. – стр. 3-18.
49. Физический энциклопедический словарь. /Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Сов. Энциклопедия. – 1983, 928 стр.
50. С.В. Любарский, Ю.П. Химич. Оптические зеркала из нетрадиционных материалов, Оптический журнал. 1994, №1. – стр. 76-83.
51. Щеглов П. В. Проблемы оптической астрономии. М.: Наука, 1980, 272с.
52. Тудоровский А.И. Теория оптических приборов. М. – Л.: изд-во АН СССР. т.І. ,1948, 661с.