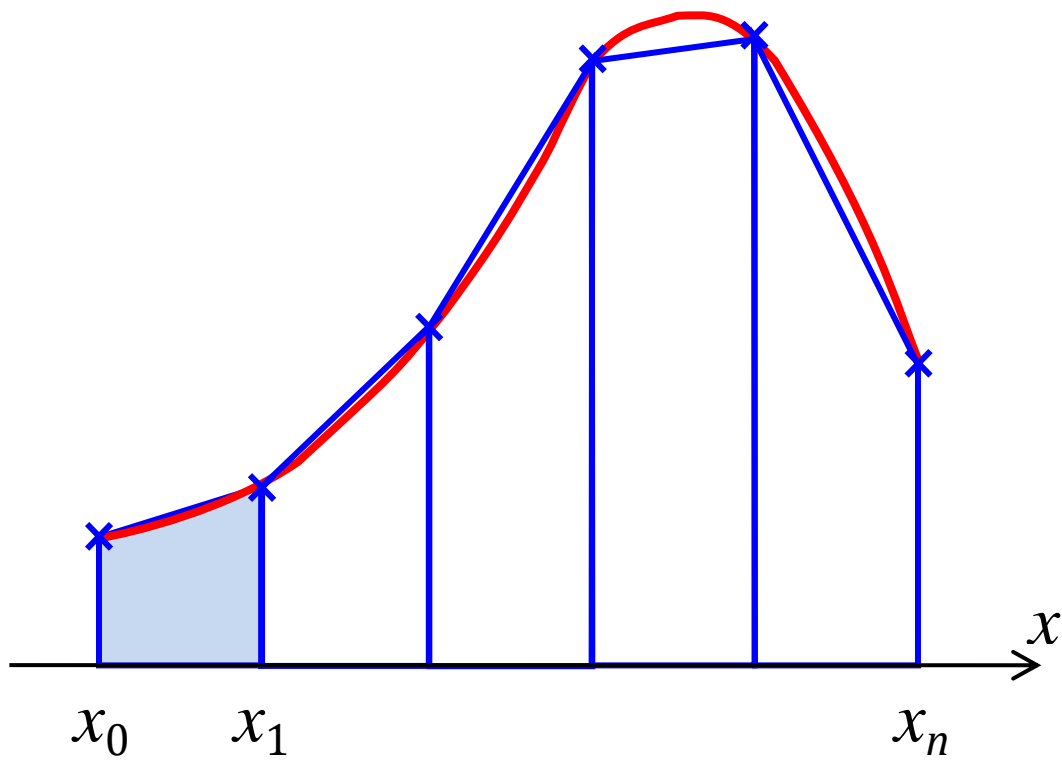


Т.В. Иванова  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ОПТИКЕ



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Т.В. Иванова

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ОПТИКЕ

Учебное пособие

 УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург

2017

Т.В. Иванова. Численные методы в оптике. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2017 - 84 с.

Учебное пособие подготовлено на кафедре прикладной и компьютерной оптики Университета ИТМО. В пособии рассматриваются основные численные методы, чаще всего используемые при решении задач прикладной оптики, приводятся примеры их использования и задания для самостоятельной работы.

Учебное пособие предназначено для подготовки студентов по направлению бакалавриата 12.03.02 «Оптотехника».

Рекомендовано к печати Ученым советом факультета ЛиСИ от 13.12.2016, протокол №12.



**Университет ИТМО** – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научно-образовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

© Университет ИТМО, 2017

© Иванова Т.В., 2017

<b>Введение</b> .....	<b>5</b>
<b>Глава 1. Методы численного дифференцирования функций</b> .....	<b>8</b>
1.1. Методы односторонней разности .....	8
1.2. Метод двусторонней разности .....	10
1.3. Частное дифференцирование функции многих переменных .....	11
1.4. Производные высоких порядков.....	11
1.5. Практическое задание.....	12
Задания для работы .....	12
Пример выполнения отчета.....	14
<b>Глава 2. Методы численного интегрирования</b> .....	<b>16</b>
2.1. Задача численного интегрирования .....	16
2.2. Методы Ньютона-Котеса.....	18
Метод прямоугольников .....	18
Метод трапеций .....	19
Метод Симпсона.....	20
Семейство методов Ньютона-Котеса .....	22
2.3. Метод Гаусса.....	23
2.4. Практическое задание.....	25
Задание для работы.....	25
Пример выполнения отчета.....	27
<b>Глава 3. Интерполяция</b> .....	<b>29</b>
3.1. Задача интерполяции .....	29
3.2. Локальная и глобальная интерполяция .....	29
3.3. Кусочно-линейная интерполяция .....	30
3.4. Кусочно-квадратичная интерполяция .....	31
3.5. Многочлен Лагранжа.....	32
3.6. Многочлен Ньютона.....	33
3.7. Практическое задание.....	34
Задание для работы.....	34
Пример выполнения отчета.....	36
<b>Глава 4. Аппроксимация</b> .....	<b>37</b>
4.1. Задача аппроксимации.....	37
4.2. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) .....	38
4.3. Пример использование СЛАУ для решения задачи аппроксимации.....	40

4.4. Метод наименьших квадратов (МНК).....	40
4.5. Практическое задание.....	42
Задание для работы.....	42
Пример выполнения отчета.....	47
<b>Глава 5. Преобразование Фурье и его свойства.....</b>	<b>48</b>
5.1. Непрерывное преобразование Фурье и его свойства.....	48
Одномерное преобразование Фурье .....	48
Двумерное преобразование Фурье .....	48
Основные свойства фурье-образов произвольной функции .....	49
5.2. Таблицы функций и их фурье-образов .....	51
Одномерные функции и их фурье-образы .....	51
Осесимметричные функции и их фурье-образы.....	53
5.3. Дискретное преобразование Фурье .....	54
Спектр периодической функции.....	54
Спектр дискретной функции.....	55
Теорема о выборке.....	55
Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) .....	56
Сдвиговое дискретное преобразование Фурье (СДПФ).....	57
5.4. Практическое задание.....	60
Задание для работы.....	60
Пример выполнения отчета.....	63
<b>Приложение А. Погрешности вычислений .....</b>	<b>64</b>
<b>Приложение Б. Полиномы Цернике.....</b>	<b>69</b>
<b>Приложение В. Аппроксимация показателей преломления по формуле Герцбергера .....</b>	<b>73</b>
<b>Приложение Г. Свойства математических функций.....</b>	<b>76</b>
Преобразование графиков функций .....	76
Свойства дельта-функции .....	81
Свертка.....	82
Тригонометрические функции.....	83
<b>Литература .....</b>	<b>84</b>

## Введение

Численные методы представляют собой отдельную область математики и применяются в различных прикладных направлениях. В частности, с помощью численных методов решаются и проблемы прикладной оптики. В данном пособии приводится обзор основных численных методов, чаще всего используемых при решении задач прикладной оптики. Особенностью пособия является использование в качестве заданий не просто математических функций, а реальных задач из области прикладной оптики, на примере которых рассматриваются численные методы. Это дает не только хорошее понимание сути самих численных методов, но и особенности их применения на практике.

Процесс решения любой сложной задачи, моделирования какого-то оптического процесса, можно представить как последовательность этапов.

**Физическая постановка задачи.** На этом этапе необходимо грамотно сформулировать и поставить задачу с точки зрения физики процесса. Для этого необходимо изучить рассматриваемую проблему и обладать знаниями в соответствующей области.

**Математическая постановка задачи.** На этом этапе нужно переформулировать физическую проблему на математический язык, то есть описывать в виде интегралов, систем уравнений, и т.д. Математическая модель должна корректно описывать основные законы физического процесса. В некоторых случаях на этом этапе можно остановиться, так как если задача простая, то существуют стандартные методы, которые нужно применить для решения этой задачи.

**Метод непрерывной математики.** На этом этапе оперируют не конечными числами, а функциями, общими величинами, то есть ищут решение проблемы в общем виде, и описывают при помощи математических формул.

**Численные методы.** Решение проблемы представляют в виде конечных математических операций – сложение, умножение. Численные методы позволяют свести решение задачи к выполнению конечного количества арифметических действий над числами, при этом результаты получаются в виде числовых значений. Чаще всего возможно использование известных стандартных численных методов.

**Алгоритмизация.** Алгоритмизация служит для упорядочения производимых действий в виде точного формального описания процесса. Алгоритм можно изобразить в виде блок-схемы или описать другим способом.

**Программирование.** На этом этапе алгоритм реализуется на каком-нибудь языке программирования высокого уровня.

**Отладка программы.** На этом этапе выполняется поиск ошибок, которые могли появиться на предыдущих этапах. Программа испытывается на решении тестовых задач для получения уверенности в достоверности результатов. Вполне вероятно, что придется вернуться в самое начало, к изменению физической постановки задачи, или какому-то другому этапу.

**Проведение расчетов.** На этом этапе готовятся исходные данные для расчетов, и проводятся вычисления по отлаженной программе.

**Анализ результатов.** Результаты расчетов анализируются, оформляется научно-техническая документация.

Все численные методы обладают некоторым набором характеристик. Наиболее важной из них является **точность**. На всех этапах решения задачи могут возникать погрешности, искажающие результаты вычислений, которые и определяют точность. Причины возникновения вычислительных погрешностей и способы их устранения рассматриваются в Приложении А.

При анализе точности одним из важнейших критериев является **сходимость** численного метода. Для **дискретных методов** (методы, которые заключаются в замене задачи с непрерывными функциями на задачу, в которой значения функций заданы в фиксированных точках) сходимость – это стремление значений решения метода к соответствующим значениям решения исходной задачи при стремлении к нулю параметра дискретизации (например, шага интегрирования).

Задача называется поставленной **корректно**, если для любых значений исходных данных из некоторого класса ее решение существует, единственно и устойчиво. Применять для решения некорректно поставленных задач численные методы, не имеет смысла, поскольку возникающие в расчетах погрешности округления будут сильно возрастать в ходе вычислений, что приведет к значительному искажению результатов.

**Устойчивость** – это чувствительность метода к неточностям в исходных данных. Задача называется устойчивой, если малые погрешности в исходной величине приводят к малым погрешностям в решении. Отсутствие устойчивости означает, что даже незначительные погрешности в исходных данных приводят к большим погрешностям в решении или даже к неверному результату. О неустойчивых задачах также говорят, что они чувствительны к погрешностям исходных данных.

Таким образом, для получения решения задачи с необходимой точностью ее постановка должна быть корректной, а используемый

численный метод должен обладать устойчивостью (корректностью) и сходимостью.

В большинстве случаев, кроме точности (сходимости, устойчивости, корректности) необходимо следить за минимизацией трудоемкости решения. Применительно к вычислительным задачам трудоемкость определяется объемом памяти, используемым в процессе поиска решения, и временем, необходимым для выполнения вычислений. Время обычно измеряется в количестве элементарных операций (сложения, умножения, и т.д.), которые необходимо выполнить для решения задачи. Эти характеристики желательно уменьшать построением оптимальных алгоритмов вычисления, не потеряв при этом в точности. К сожалению, часто уменьшение трудоемкости и увеличение точности являются взаимоисключающими параметрами, и главной задачей является найти баланс между ними.



# Глава 1. Методы численного дифференцирования функций

Вычисление производной численными методами имеет смысл либо, если аналитическое вычисление производной невозможно либо, если аналитическое выражение неизвестно, и функция задана набором точек.

## 1.1. Методы односторонней разности

Производная функции  $f(x)$  определяется выражением:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \quad (1.1)$$

Заменяя приращение  $dx$  на конечную величину  $\Delta x$ , называемую шагом дифференцирования, получаем выражение:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.2)$$

Если дифференцируемая функция задана в виде непрерывной функции (рис.1.1), то для вычисления значения дифференциала необходимо получить значение функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и в точке  $x_0 + \Delta x$ . После чего можно вычислить значение производной функции  $f'(x_0)$ .

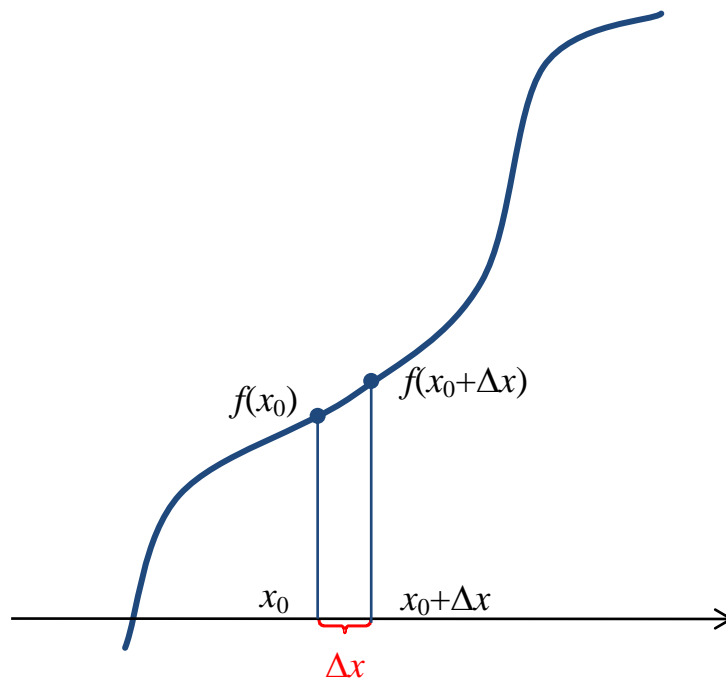


Рис.1.1. Непрерывная функция

Если функция задана выборкой, то есть набором значений функции в точках (рис.1.2), то выражение для численного дифференцирования (при условии, что  $x$  образуют возрастающую последовательность) можно переписать в виде:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (1.3)$$

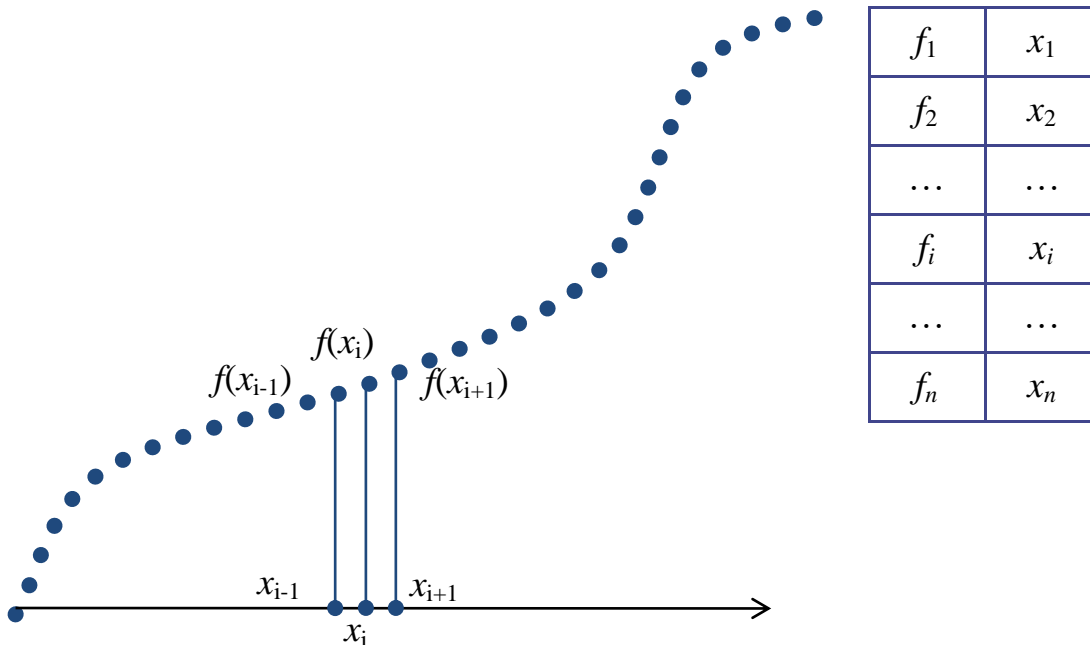


Рис.1.2. Дискретная функция

Как видно из этих выражений, значение производной в точке  $x_i$  оценивается по значению функции в этой и в следующей точке  $x_{i+1}$ . Такой способ можно условно назвать **правосторонней разностью**. Нетрудно записать выражение для **левосторонней разности**:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (1.4)$$

или

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (1.5)$$

## 1.2. Метод двусторонней разности

С точки зрения точности методы левосторонней и правосторонней разностей равнозначны. Более точное значение дает метод **двусторонней разности** (что особенно справедливо для гладких функций). Теорема Лагранжа говорит о том, что уравнение:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1.6)$$

(при условии, что  $(a, b)$  – замкнутый промежуток, на котором функция  $f(x)$  дифференцируема) имеет по меньшей мере один корень  $x = \zeta$ . Значение этого корня, вообще говоря, зависит от вида функции  $f(x)$ . Если она квадратичная, то уравнение первой степени и его корень лежит в точности на середине отрезка  $(a, b)$ , то есть:

$$\zeta = \frac{b + a}{2} \quad (1.7)$$

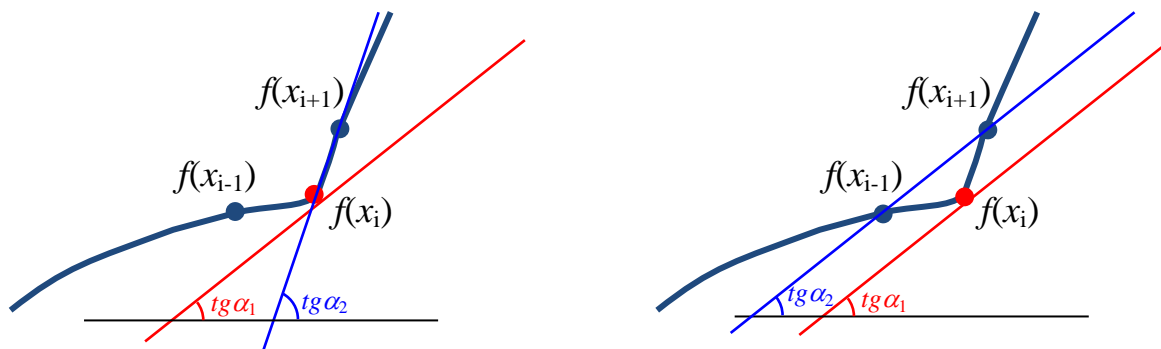
Если  $a$  имеет постоянное значение, а  $b$  стремится к  $a$ , то один из корней, как правило (за исключением случаев, когда вторая производная  $f''(a)$  равна нулю или не существует), стремится к середине отрезка, то есть  $\lim_{b \rightarrow a} \frac{\zeta - a}{b - a} = \frac{1}{2}$ . Поэтому более точное приближение к искомому значению производной функции в точке  $x_0$  можно получить, воспользовавшись формулами двусторонней разности:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x} \quad (1.8)$$

или, для функций заданных в виде выборки:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (1.9)$$

Наглядно сравнить одностороннюю и двустороннюю разности можно представив производную, как тангенс угла наклона касательной к функции в точке  $x_i$ . На рисунке 1.3 точное значение производной обозначено как  $\text{tg } \alpha_1$ . В методе односторонней разности (рис.1.3, а) вместо касательной проводится прямая через точки  $x_i$  и  $x_{i+1}$ . Если в окрестностях точки  $x_i$  функция не гладкая, то значение производной ( $\text{tg } \alpha_2$ ) будет существенно отличаться от точного. В то время как в методе двусторонней разности, проведя прямую через точки  $x_{i-1}$  и  $x_{i+1}$  (рис.1.3, б), можно получить значение производной практически совпадающее с точным.



а) односторонняя разность

б) двусторонняя разность

Рис.1.3. Графическое представление производной

### 1.3. Частное дифференцирование функции многих переменных

Отдельно следует отметить случай численного определения частных дифференциалов функций многих переменных. В этом случае все аргументы функции становятся константами кроме аргумента, по которому проводится дифференцирование, а требуемый порядок производной получается путем последовательного вычисления производных, вплоть до требуемого порядка:

$$\frac{df}{dx_i} = \frac{f(\dots, x_i + \Delta x_i, \dots) - f(\dots, x_i, \dots)}{\Delta x_i} \quad (1.10)$$

### 1.4. Производные высоких порядков

При вычислении производных высоких порядков производная (n)-го порядка считается первой производной от (n-1)-го порядка. Так вторая производная функции является первой производной от первой производной:

$$f''(x) = (f'(x))' \text{ или } \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) \quad (1.11)$$

Тогда выражение для вычисления производной примет вид:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{f'_1 - f'_{-1}}{2\Delta x} = \frac{\frac{f'_2 - f'_0}{2\Delta x} - \frac{f'_0 - f'_{-2}}{2\Delta x}}{2\Delta x} = \frac{f'_2 - 2f'_0 + f'_{-2}}{(2\Delta x)^2} \quad (1.12)$$

## 1.5. Практическое задание

Цель работы: углубление знаний по разделу «Численное дифференцирование», приобретение практических навыков численного дифференцирования методами односторонней и двусторонней разности.

### Задания для работы

Продифференцировать функцию волновой aberrации (приложение А)  $W(\rho_x, \rho_y)$  по  $\rho_x$  и  $\rho_y$ :  $\frac{\partial W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_x}$  и  $\frac{\partial W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_y}$  методами односторонней и двусторонней разностей на интервале  $\rho \in [-1; 1]$ .

Результатом работы программы являются:

- графики поперечных aberrаций

$$\Delta \eta_x(\rho_x) = \frac{\partial W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_x}, \quad \Delta \eta_y(\rho_y) = \frac{\partial W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_y};$$

- графики зависимости точности от  $\rho$  и шага для различных методов.

Таблица 1.1. Варианты заданий

Вариант	Функция волновой aberrации
1	В разложении волновой aberrации присутствует только расфокусировка: $W(\rho, \varphi) = c_{20} R_2^0(\rho)$ , где $R_2^0(\rho) = 2\rho^2 - 1$ .
2	В разложении волновой aberrации присутствует только сферическая aberrация 3-го порядка: $W(\rho, \varphi) = c_{40} R_4^0(\rho)$ , где $R_4^0(\rho) = 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$ .
3	В разложении волновой aberrации присутствует только сферическая aberrация 5-го порядка: $W(\rho, \varphi) = c_{60} R_6^0(\rho)$ , где $R_6^0(\rho) = 20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$ .
4	В разложении волновой aberrации присутствует только кома 3-го порядка: $W(\rho, \varphi) = c_{31} R_3^1(\rho) \cos(\varphi)$ , где $R_3^1(\rho) = 3\rho^3 - 2\rho$ .
5	В разложении волновой aberrации присутствует только кома 5-го порядка: $W(\rho, \varphi) = c_{51} R_5^1(\rho) \cos(\varphi)$ , где $R_5^1(\rho) = 10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho$ .
6	В разложении волновой aberrации присутствует только астигматизм 3-го порядка: $W(\rho, \varphi) = c_{22} R_2^2(\rho) \cos(2\varphi)$ , где $R_2^2(\rho) = \rho^2$ .

<b>7</b>	В разложении волновой aberrации присутствует только астигматизм 5-го порядка: $W(\rho, \varphi) = c_{42} R_4^2(\rho) \cos(2\varphi)$ , где $R_4^2(\rho) = 4\rho^4 - 3\rho^2$ .
<b>8</b>	В разложении волновой aberrации присутствуют только расфокусировка и наклон: $W(\rho, \varphi) = c_{20} R_2^0(\rho) + c_{11} R_1^1(\rho) \cos \varphi$ , где $R_2^0(\rho) = 2\rho^2 - 1$ , $R_1^1(\rho) = \rho$ .
<b>9</b>	В разложении волновой aberrации присутствуют только сферическая aberrация 3-го порядка и наклон: $W(\rho, \varphi) = c_{40} R_4^0(\rho) + c_{11} R_1^1(\rho) \cos \varphi$ , где $R_4^0(\rho) = 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$ , $R_1^1(\rho) = \rho$ .
<b>10</b>	В разложении волновой aberrации присутствуют только сферическая aberrация 5-го порядка и наклон: $W(\rho, \varphi) = c_{60} R_6^0(\rho) + c_{11} R_1^1(\rho) \cos \varphi$ , где $R_6^0(\rho) = 20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$ , $R_1^1(\rho) = \rho$ .
<b>11</b>	В разложении волновой aberrации присутствуют только кома 3-го порядка и наклон: $W(\rho, \varphi) = c_{31} R_3^1(\rho) \cos(\varphi) + c_{11} R_1^1(\rho) \cos \varphi$ , где $R_3^1(\rho) = 3\rho^3 - 2\rho$ , $R_1^1(\rho) = \rho$ .
<b>12</b>	В разложении волновой aberrации присутствуют только кома 5-го порядка и наклон: $W(\rho, \varphi) = c_{51} R_5^1(\rho) \cos(\varphi) + c_{11} R_1^1(\rho) \cos \varphi$ , где $R_5^1(\rho) = 10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho$ , $R_1^1(\rho) = \rho$ .
<b>13</b>	В разложении волновой aberrации присутствуют только астигматизм 3-го порядка и наклон: $W(\rho, \varphi) = c_{22} R_2^2(\rho) \cos(2\varphi) + c_{11} R_1^1(\rho) \cos \varphi$ , где $R_2^2(\rho) = \rho^2$ , $R_1^1(\rho) = \rho$ .
<b>14</b>	В разложении волновой aberrации присутствуют только астигматизм 5-го порядка и наклон: $W(\rho, \varphi) = c_{42} R_4^2(\rho) \cos(2\varphi) + c_{11} R_1^1(\rho) \cos \varphi$ , где $R_4^2(\rho) = 4\rho^4 - 3\rho^2$ , $R_1^1(\rho) = \rho$ .

## Пример выполнения отчета

### Задание для работы, Вариант 1

Продифференцировать функцию волновой aberrации  $W(\rho_x, \rho_y)$  по  $\rho_x$  и

$\rho_y$ :  $\frac{\partial W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_x}$  и  $\frac{\partial W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_y}$  методами односторонней и двусторонней разностей на интервале  $\rho \in [-1; 1]$ .

В разложении волновой aberrации присутствует только расфокусировка:

$$W(\rho, \varphi) = c_{20} R_2^0(\rho), \text{ где } R_2^0(\rho) = 2\rho^2 - 1.$$

### Вычисления

$$\text{Волновая aberrация: } W(\rho_x, \rho_y) = c_{20} \cdot (2 \cdot \rho_x^2 + 2 \cdot \rho_y^2 - 1)$$

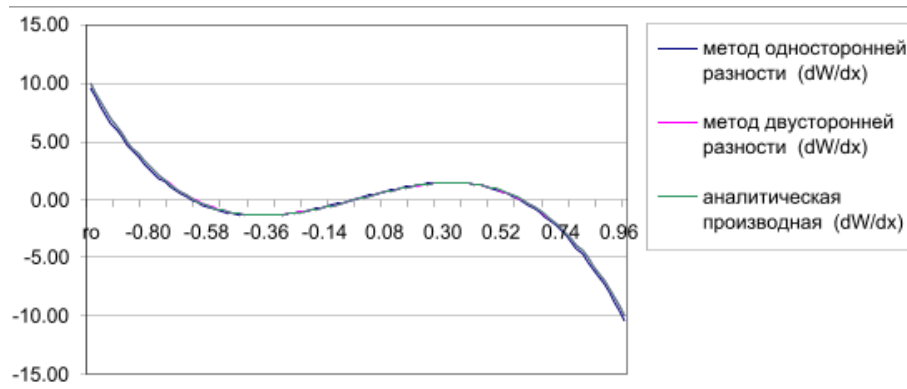
$$\text{Частные производные: } \frac{\partial W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_x} = c_{20} \cdot (4 \cdot \rho_x),$$

$$\frac{\partial W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_y} = c_{20} \cdot (4 \cdot \rho_y)$$

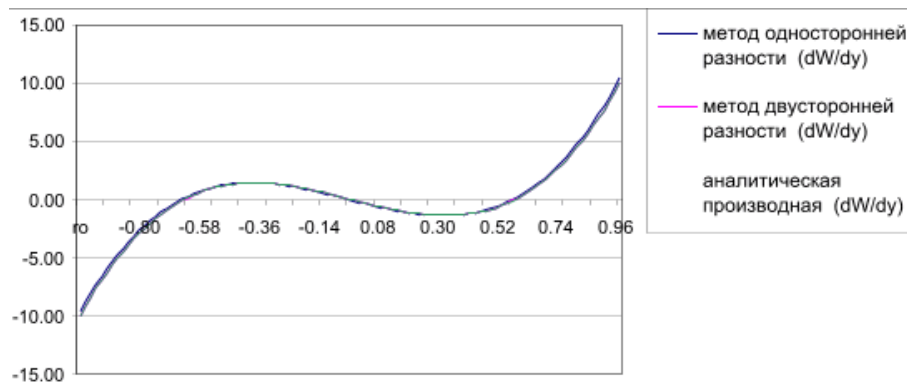
### Результаты работы программы

Графики поперечных aberrаций

Производная по  $\rho_x$  (при  $\rho_y = 0$ ):

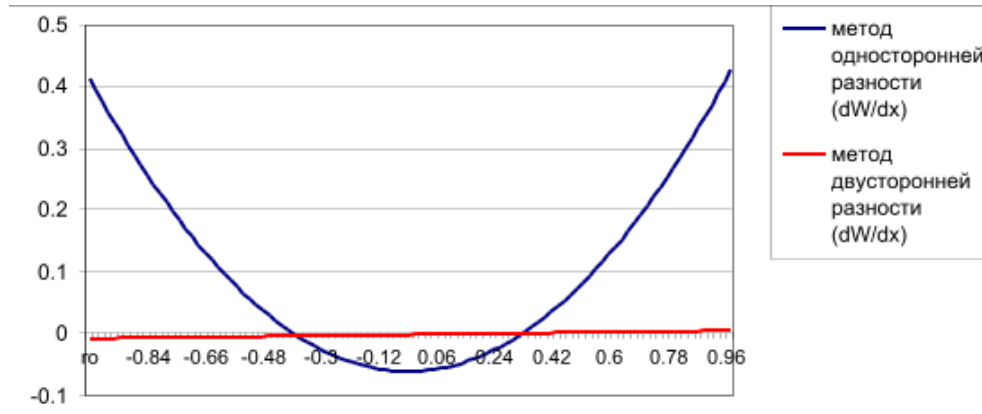


Производная по  $\rho_y$  (при  $\rho_x = 0$ ):

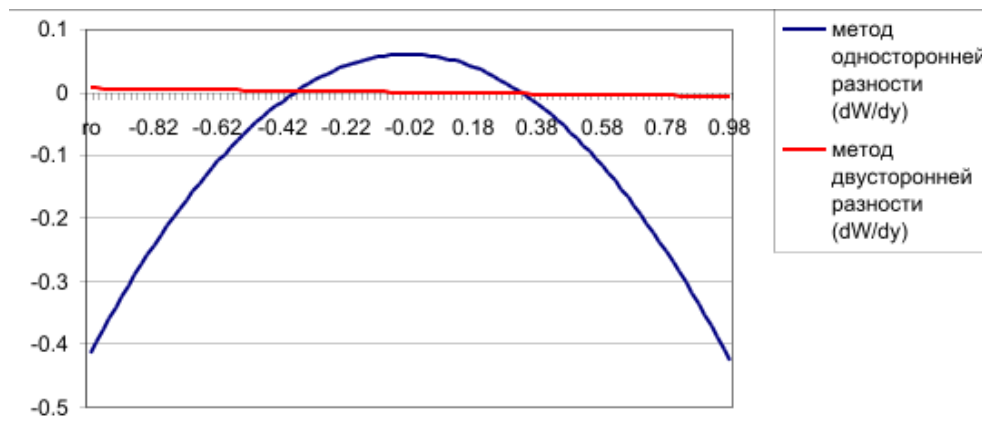


Графики зависимости точности от  $\rho$  для различных методов дифференцирования:

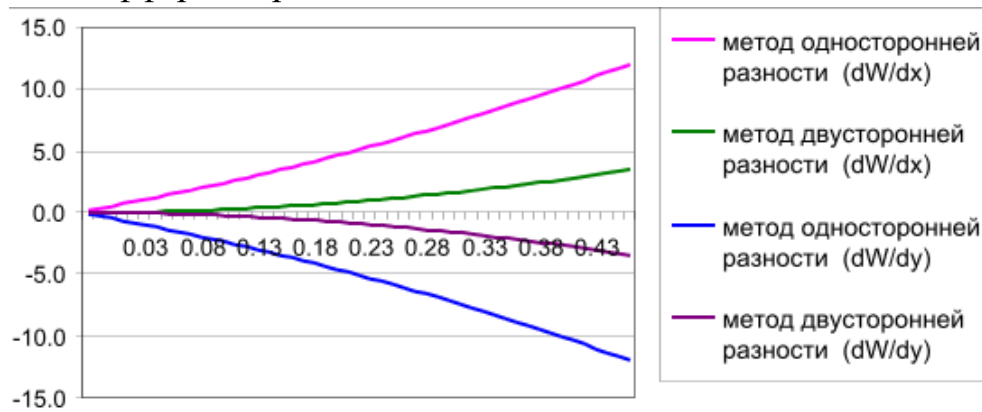
Зависимость точности от  $\rho_x$ :



Зависимость точности от  $\rho_y$ :



Графики зависимости точности от шага при  $\rho=0.9$  для различных методов дифференцирования





## Глава 2. Методы численного интегрирования

### 2.1. Задача численного интегрирования

В ряде задач возникает необходимость вычисления определенного интеграла от некоторой функции:

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad (2.1)$$

где  $f(x)$  – подынтегральная функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ .

Геометрический смысл интеграла заключается в том, что если  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $[a, b]$ , то интеграл  $\int_a^b f(x) \cdot dx$  численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции  $y = f(x)$ , отрезком оси абсцисс, прямой  $x = a$  и прямой  $x = b$  (рис.2.1). Таким образом, вычисление интеграла равносильно вычислению площади криволинейной трапеции.

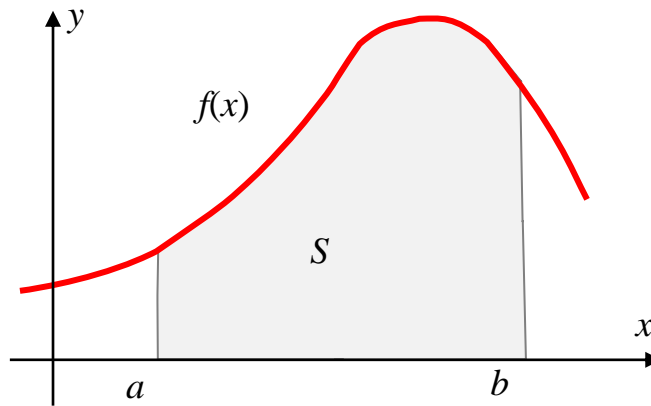


Рис.2.1. Геометрический смысл интеграла

Задача численного интегрирования состоит в замене исходной подынтегральной функции некоторой аппроксимирующей функцией (обычно полиномом).

Численное интегрирование применяется, когда:

- сама подынтегральная функция не задана аналитически, а например, представлена в виде таблицы значений;
- аналитическое представление подынтегральной функции известно, но её первообразная не выражается через аналитические функции.

Способы численного вычисления определенных интегралов основаны на замене интеграла конечной суммой:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum_{j=1}^N c_j \cdot f(x_j) \quad (2.2)$$

где  $c_j$  – числовые коэффициенты, выбор которых зависит от выбранного метода численного интегрирования,  $x_j$  – узлы интегрирования ( $x_j \in [a, b], j = 1, \dots, N$ ). Выражение (2.2) называют **квадратурной формулой**.

Разделим отрезок  $[a, b]$  на  $N$  равных частей, то есть на  $N$  элементарных отрезков. Длина каждого элементарного отрезка:

$$h = \frac{b-a}{N} \quad (2.3)$$

Тогда значение интеграла можно представить в виде:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cdot dx \quad (2.4)$$

Из этого выражения видно, что для численного интегрирования на отрезке  $[a, b]$ , достаточно построить квадратурную формулу на каждом частичном отрезке  $[x_{j-1}, x_j]$ .

Погрешность квадратурной формулы определяется выражением:

$$\Psi_N = \int_a^b f(x) \cdot dx - \sum_{j=1}^N c_j \cdot f(x_j) \quad (2.5)$$

и зависит от выбора коэффициентов  $c_j$  и от расположения узлов  $x_j$ .

Погрешность численного интегрирования определяется шагом разбиения. Уменьшая этот шаг, можно добиться большей точности. Однако увеличивать число точек не всегда возможно. Если функция задана в табличном виде, приходится ограничиваться заданным множеством точек. Повышение точности может быть в этом случае достигнуто за счет повышения степени используемых интерполяционных многочленов.

**Формулы Ньютона-Котеса** получаются путем замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа с разбиением каждого частичного отрезка интегрирования на  $n$  равных частей. Получившиеся формулы используют значения подынтегральной функции в узлах интерполяции и являются точными для всех многочленов степени  $x$

зависящей от числа узлов. Точность решения растет с увеличением степени интерполяционного многочлена.

**Метод Гаусса** не предполагает разбиения отрезка интегрирования на равные промежутки. Формулы численного интегрирования интерполяционного типа ищутся таким образом, чтобы они обладали наивысшим порядком точности при заданном числе узлов. Узлы и коэффициенты формул численного интегрирования находятся из условий обращения в нуль их остаточных членов для всех многочленов максимально высокой степени.

## 2.2. Методы Ньютона-Котеса

### Метод прямоугольников

Одним из простейших методов численного интегрирования является **метод прямоугольников**. На частичном отрезке  $[x_{j-1}, x_j]$  подынтегральную функцию заменяют полиномом Лагранжа нулевого порядка, построенным в одной точке. В качестве этой точки можно выбрать середину частичного отрезка  $x_{j-0.5} = x_j - 0.5h$ . Тогда значение интеграла на частичном отрезке:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cdot dx \approx f(x_{j-0.5}) \cdot h \quad (2.6)$$

Подставив это выражение в (2.4), получим составную формулу **средних прямоугольников**:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum_{j=1}^N f(x_{j-0.5}) \cdot h \quad (2.7)$$

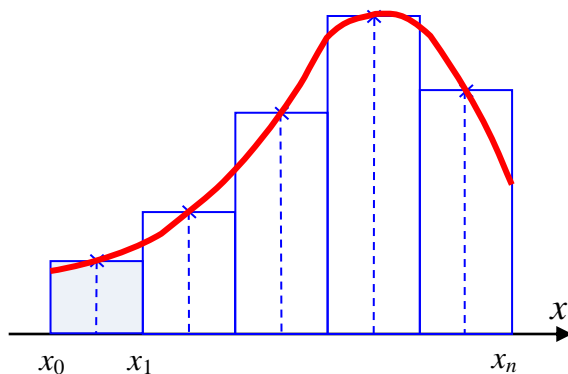
Графическая иллюстрация метода средних прямоугольников представлена на рис.2.2(а). Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из  $N$  прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы  $N$  элементарных прямоугольников.

Формулу (2.7) можно представить в ином виде:

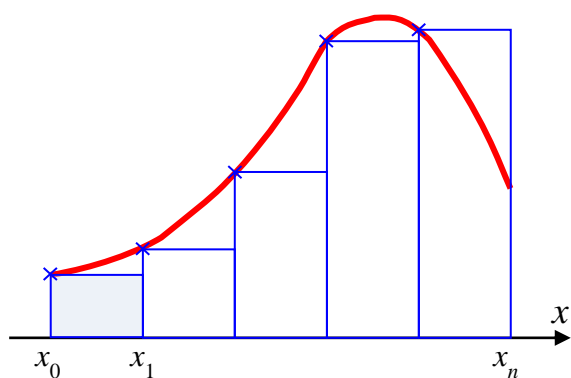
$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum_{j=1}^N h \cdot f(x_{j-1}) \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x) \cdot dx \approx \sum_{j=1}^N h \cdot f(x_j) \quad (2.8)$$

Эти формулы называются формулой **левых** и **правых прямоугольников** соответственно. Графически метод левых и правых прямоугольников представлен на рис.2.2(б, в). Однако из-за нарушения

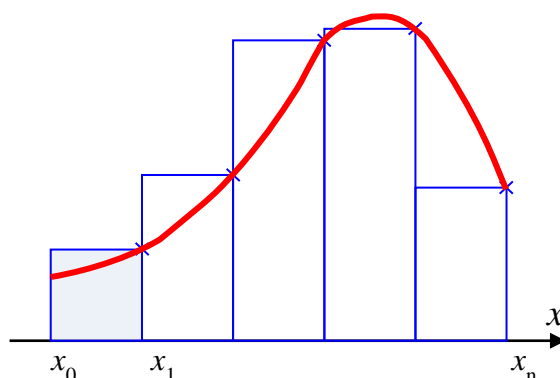
симметрии в формулах правых и левых прямоугольников, их погрешность значительно больше, чем в методе средних прямоугольников.



а) средние прямоугольники



б) левые прямоугольники



в) правые прямоугольники

Рис.2.2. Интегрирование методом прямоугольников

### Метод трапеций

Если на частичном отрезке  $[x_{j-1}, x_j]$  подынтегральную функцию заменить полиномом Лагранжа первой степени:

$$f(x) = L_{1,j}(x) = \frac{1}{h} \left[ (x - x_{j-1})f(x_j) - (x - x_j)f(x_{j-1}) \right] \quad (2.9)$$

то искомый интеграл на частичном отрезке запишется следующим образом:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx \approx \frac{1}{h} \left[ f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_{j-1}) dx - f(x_{j-1}) \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_j) dx \right] = \frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2} h \quad (2.10)$$

Тогда составная формула трапеций на всем отрезке интегрирования  $[a, b]$  примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^N \frac{f(x_j) + f(x_{j-1})}{2} h = h \left[ \frac{1}{2}(f_1 + f_N) + f_2 + \dots + f_{N-1} \right] \quad (2.11)$$

Графически метод трапеций представлен на рис.2.3. Площадь криволинейной трапеции заменяется площадью многоугольника, составленного из  $N$  трапеций, при этом кривая заменяется вписанной в нее ломаной. На каждом из частичных отрезков функция аппроксимируется прямой, проходящей через конечные значения, при этом площадь трапеции на каждом отрезке определяется по формуле 2.10.

Погрешность метода трапеций выше, чем у метода средних прямоугольников. Однако на практике найти среднее значение на элементарном интервале можно только у функций, заданных аналитически (а не таблично), поэтому использовать метод средних прямоугольников удается далеко не всегда.

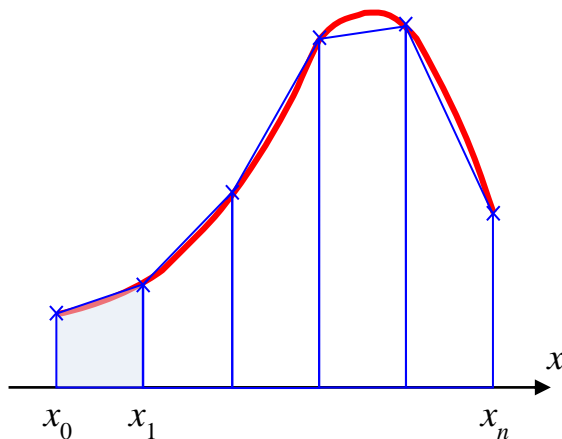


Рис.2.3. Интегрирование методом трапеций

### Метод Симпсона

В этом методе подынтегральная функция на частичном отрезке  $[x_{j-1}, x_j]$  аппроксимируется параболой, проходящей через три точки  $x_{j-1}$ ,  $x_{j-0.5}$ ,  $x_j$ , то есть интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени:

$$f(x) = L_{2,j}(x) = \frac{2}{h^2} \left[ (x - x_{j-0.5})(x - x_j)f(x_{j-1}) - 2 \cdot (x - x_{j-1})(x - x_j)f(x_{j-0.5}) + (x - x_{j-1})(x - x_{j-0.5})f(x_j) \right] \quad (2.12)$$

Проведя интегрирование, получим:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_{j-1} + 4f_{j-0.5} + f_j) \quad (2.13)$$

Это и есть **формула Симпсона** или формула парабол. На отрезке  $[a, b]$  формула Симпсона примет вид:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{6}[f_0 + f_N + 2(f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1}) + 4(f_{0.5} + f_{1.5} + f_{2.5} + \dots + f_{N-0.5})] = \\ &= \frac{h}{6} \left[ f_0 + f_N + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N-1} f_j + 4 \cdot \sum_{j=0.5}^{N-0.5} f_j \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если разбить отрезок интегрирования  $[a, b]$  на **четное** количество  $2N$  равных частей с шагом  $h = \frac{b-a}{2N}$ , то можно построить параболу на каждом двоином частичном отрезке  $[x_{j-1}, x_j]$  и переписать выражения (2.12-2.14) без дробных индексов. Тогда формула Симпсона примет вид:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{3}[f_0 + f_{2N} + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2N-2}) + 4(f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2N-1})] = \\ &= \frac{h}{3} \left[ f_0 + f_{2N} + 2 \cdot \sum_{j=2,2}^{2N-2} f_j + 4 \cdot \sum_{j=1,2}^{2N-1} f_j \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Графическое представление метода Симпсона показано на рис.2.4. На каждом из двоиных частичных отрезков заменяем дугу данной кривой параболой.

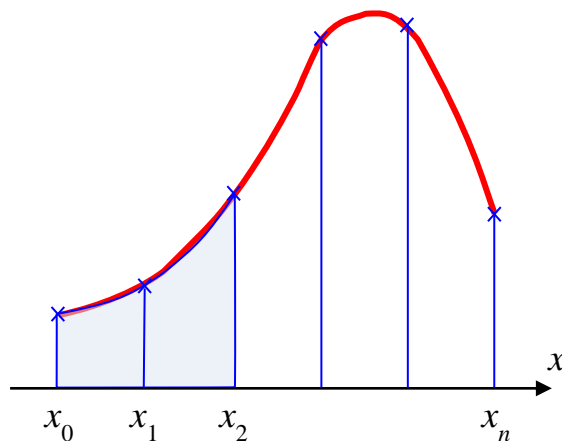


Рис.2.4. Интегрирование методом Симпсона

## Семейство методов Ньютона-Котеса

Выше были рассмотрены три схожих метода интегрирования функций – метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона. Их объединяет общая идея: интегрируемая функция интерполируется на отрезке интегрирования по равноотстоящим узлам многочленом Лагранжа, для которого аналитически вычисляется значение интеграла. Семейство методов, основанных на таком подходе, называется **методами Ньютона-Котеса**.

В выражении  $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^N c_j f(x_j)$  коэффициенты  $c_j$  правильнее

называть **весовыми коэффициентами**. Величину  $\Psi_N = \int_a^b f(x)dx - \sum_{j=0}^N c_j f(x_j)$ , определяющую погрешность численного интегрирования, называют **остатком**.

Для семейства методов Ньютона-Котеса можно записать общее выражение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{n \cdot h}{C_n} \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^n c_{in} f(x_i) \quad (2.16)$$

где  $n$  – порядок метода Ньютона-Котеса,  $N$  – количество частичных отрезков,  $h = \frac{x_j - x_{j-1}}{n}$ ,  $C_n = \sum_{i=0}^n c_{in}$ ,  $x_i = x_j + i \cdot h$ .

Из выражения (2.16) легко можно получить формулу прямоугольников для  $n = 0$ , формулу трапеций для  $n = 1$ , и формулу Симпсона для  $n = 2$ . Коэффициенты  $c_{in}$  могут быть заданы в табличной форме (таблица.2.1).

Таблица 2.1. Весовые коэффициенты метода Ньютона-Котеса

$n$	$C_n$	$c_{0n}$	$c_{1n}$	$c_{2n}$	$c_{3n}$	$c_{4n}$	$c_{5n}$
0	1	1					
1	2	1	1				
2	6	1	4	1			
3	8	1	3	3	1		
4	90	7	32	12	32	7	
5	288	19	75	50	50	75	19

### 2.3. Метод Гаусса

В формулах численного интегрирования Ньютона-Котеса используются равноотстоящие узлы. В случае квадратурных формул Гаусса узлы интегрирования  $x_i$  на отрезке  $[x_{j-1}, x_j]$  располагаются не равномерно, а выбираются таким образом, чтобы при наименьшем возможном числе узлов точно интегрировать многочлены наивысшей возможной степени.

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \frac{a-b}{2N} \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^n c_{in} \cdot f(x_i) \quad (2.17)$$

Узлы  $x_i$  являются корнями полинома Лежандра степени  $n$ , а веса вычисляются интегрированием полиномов Лежандра по формуле

$$a_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_n(x_i)]^2}, \text{ где } P'_n - \text{ первая производная полинома Лежандра.}$$

Узлы и веса, рассчитанные для отрезка  $[-1,1]$ , приводятся в таблице 2.2. Для интегрирования на произвольном частичном отрезке необходимо пересчитать значения узлов для данного частичного отрезка  $[x_{j-1}, x_j]$ :

$$x_i = x_{j-1} + \frac{(x_{i[-1;1]} + 1)(x_{j-1} - x_j)}{2} \quad (2.18)$$

Квадратура Гаусса относится к квадратурам открытого типа. Это означает, что ни один из узлов не совпадает ни с одним из концов отрезка интегрирования  $a$  или  $b$ .

Веса квадратур Гаусса всегда положительны, и при увеличении числа узлов точность приближения почти всегда возрастает.



Таблица 2.2. Весовые коэффициенты метода Гаусса

$n$	$i$	$x_{i[-1;1]}$	$c_i$
1	1	0	2
2	1	-0.5773503	1
	2	0.5773503	1
3	1	-0.7745967	0.5555556
	2	0	0.8888889
	3	0.7745967	0.5555556
4	1	-0.8611363	0.3478548
	2	-0.3399810	0.6521451
	3	0.3399810	0.6521451
	4	0.8611363	0.3478548
5	1	-0.9061798	0.4786287
	2	-0.5384693	0.2369269
	3	0	0.5688888
	4	0.5384693	0.2369269
	5	0.9061798	0.4786287
6	1	-0.9324700	0.1713245
	2	-0.6612094	0.3607616
	3	-0.2386142	0.4679140
	4	0.2386142	0.4679140
	5	0.6612094	0.3607616
	6	0.9324700	0.1713245

## 2.4. Практическое задание

Цель работы: углубление знаний по разделу «Методы численного интегрирования», приобретение практических навыков численного интегрирования функции методами Гаусса и Ньютона-Котеса различных порядков.

### Задание для работы

1. Вычислить определенный интеграл функции методами Ньютона-Котеса (1-5 порядка) и Гаусса (1-6 порядка).
2. Вычислить функцию концентрации энергии (ФКЭ) по заданному распределению интенсивности в функции рассеяния точки (ФРТ).

### Вычисление ФКЭ

Функция концентрации энергии (ФКЭ) показывает, какая часть общей интенсивности ФРТ укладывается в круг диаметром  $d'$ . ФКЭ вычисляется как интеграл ФРТ по диаметру круга  $d'$ :

$$E(d') = \frac{\int \int h(\eta'_x, \eta'_y) d\eta'_x d\eta'_y}{\int \int_{\infty} h(\eta'_x, \eta'_y) d\eta'_x d\eta'_y} \quad (5.1)$$

где  $h(\eta'_x, \eta'_y)$  – функция рассеяния точки в канонических координатах.

В данной лабораторной работе количество точек в выборке достаточно большое, поэтому вычисления можно выполнять по методу прямоугольников, то есть как сумму значений в точках, попадающих в круг диаметром  $d'$ .

В файле с выборкой ФРТ значения канонических предметных координат по  $x$  и  $y$  находятся в диапазоне от -6.375 до 6.375, с шагом 0.05.

Результатом работы программы являются:

- графики зависимости точности от количества узлов для различных порядков метода Ньютона-Котеса и метода Гаусса;
- графики ФРТ и ФКЭ.

Файлы с распределением интенсивности в функции рассеяния точки находятся в электронном учебнике [17] [http://aco.ifmo.ru/el\\_books/numerical\\_methods/lab/docs/](http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lab/docs/).

Таблица 2.1. Варианты задания

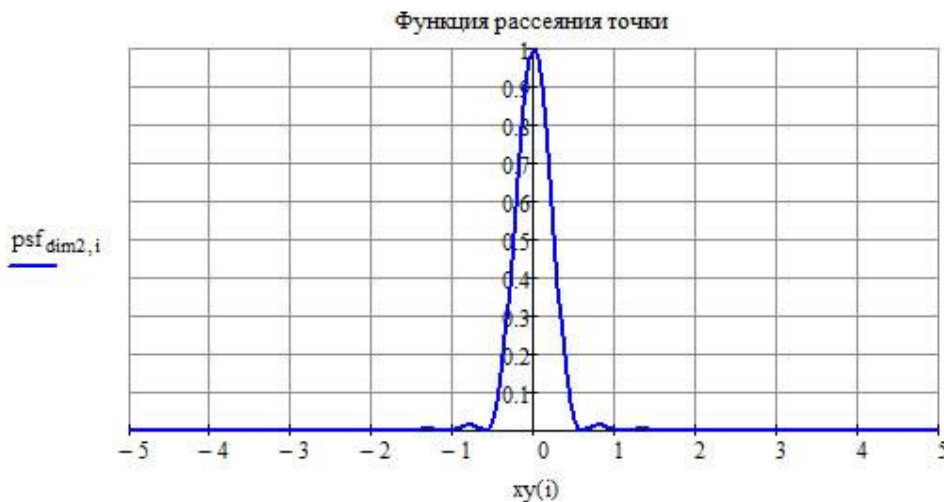
Вариант	Интеграл	Файл распределением интенсивности в ФРТ
1	$\int_{-\pi}^{\pi/3} \sin(x) \cdot dx$	psf_c00_00.txt
2	$\int_0^{\pi/2} \cos(x) \cdot dx$	psf_c20_02.txt
3	$\int_0^{2\pi} \sin(2\pi x) \cdot dx$	psf_c20_03.txt
4	$\int_{-2\pi}^{2\pi} \cos(2\pi x) \cdot dx$	psf_c40_02.txt
5	$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} (\sin(x)^2) \cdot dx$	psf_c40_03.txt
6	$\int_0^{\pi/3} (\cos(x)^2) \cdot dx$	psf_c40_04.txt
7	$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot dx$	psf_c40_05.txt
8	$\int_{-1}^1 (x^2 + 1) \cdot dx$	psf_c40_06.txt
9	$\int_{-\pi}^{2\pi} \sin(x) \cdot dx$	psf_c40_07.txt
10	$\int_0^{\pi/3} \cos(x) \cdot dx$	psf_c40_08.txt
11	$\int_{2\pi}^{3\pi} \sin(2\pi x) \cdot dx$	psf_c60_03.txt

12	$\int_{\pi}^{2\pi} \cos(2\pi x) \cdot dx$	psf_c60_04.txt
13	$\int_0^{\frac{3}{4}\pi} (\sin(x)^2) \cdot dx$	psf_c60_05.txt
14	$\int_{-\pi/2}^{\pi/3} (\cos(x)^2) \cdot dx$	psf_c60_06.txt
15	$\int_0^{\pi} e^x \cdot dx$	psf_c60_07.txt

### Пример выполнения отчета

#### Задание для работы, вариант 1

1. Вычислить определенный интеграл функции  $\int_{-\pi}^{\pi/3} \sin(x)$  методами Ньютона-Котеса (1-5 порядка) и Гаусса (1-6 порядка).
2. Вычислить функцию концентрации энергии (ФКЭ) по заданному распределению интенсивности в функции рассеяния точки (ФРТ).



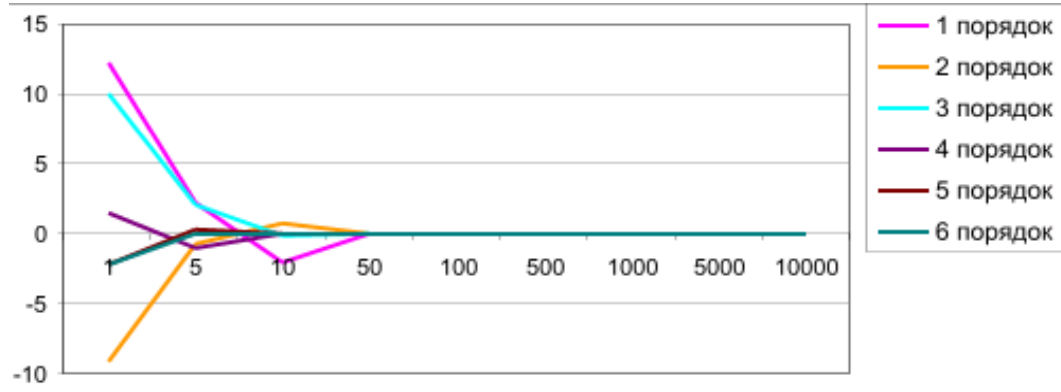
#### Вычисления

$$\int_{-\pi}^{\pi/3} \sin(x) = -\cos(x) \Big|_{-\pi}^{\pi/3} = -1.54$$

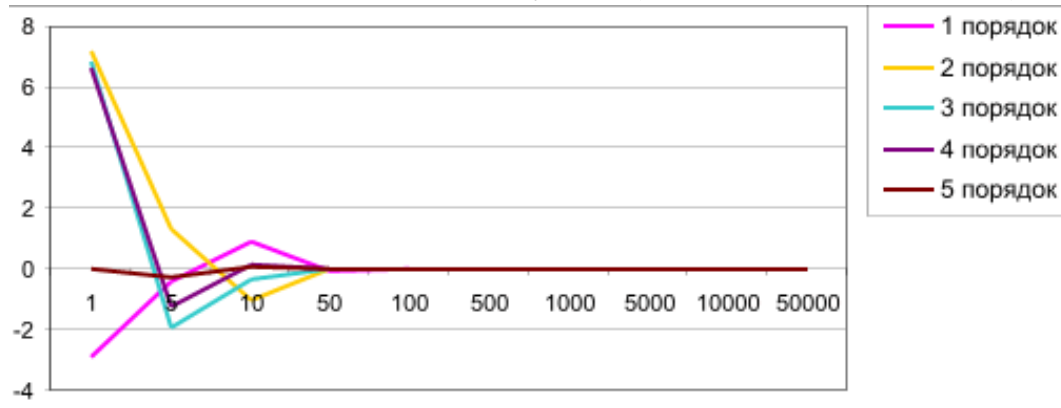
## Результаты работы программы

### 1) Зависимость точности от количества узлов

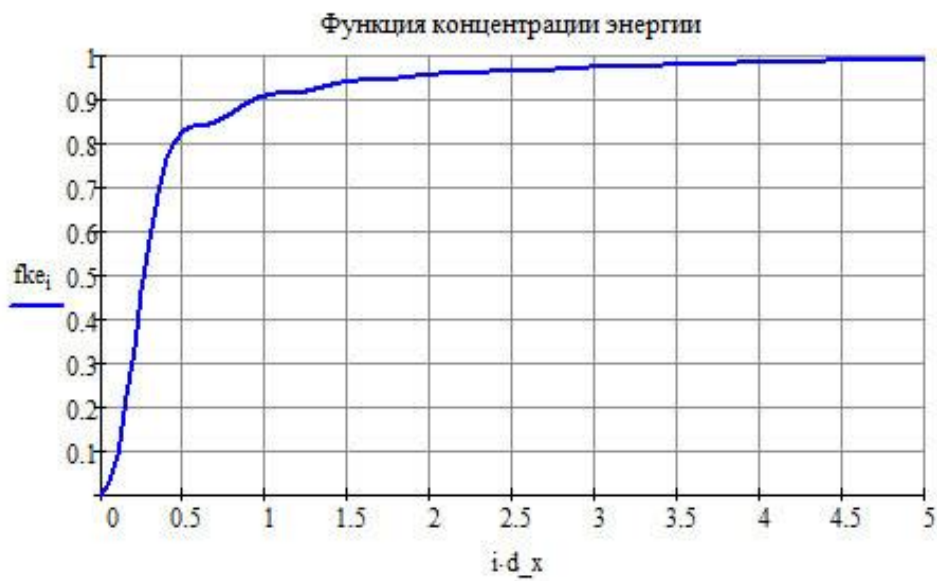
Зависимость точности от кол-ва узлов (метод Гаусса)



Зависимость точности от кол-ва узлов (метод Ньютона-Котеса)



### 2) График ФКЭ



## Глава 3. Интерполяция

### 3.1. Задача интерполяции

Пусть функция  $f(x)$  задана набором точек  $(x_i, y_i)$  на интервале  $[a, b]$ :

$$y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n, a \leq x_i \leq b \quad (3.1)$$

**Задача интерполяции** – найти функцию  $F(x)$ , принимающую в точках  $x_i$  те же значения  $y_i$ . Тогда, **условие интерполяции**:

$$F(x_i) = y_i \quad (3.2)$$

При этом предполагается, что среди значений  $x_i$  нет одинаковых. Точки  $x_i$  называют **узлами интерполяции**.

Если  $F(x)$  ищется только на отрезке  $[a, b]$  – то это задача **интерполяции**, а если за пределами первоначального отрезка, то это задача **экстраполяции**.

Задача нахождения интерполяционной функции  $F(x)$  имеет много решений, так как через заданные точки  $x_i, y_i$  можно провести бесконечно много кривых, каждая из которых будет графиком функции, для которой выполнены все условия интерполяции. Для практики важен случай интерполяции функции многочленами:

$$F(x) = P_m(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_m \cdot x^m, i = 0, 1, \dots, m \quad (3.3)$$

При этом искомым полином называется **интерполяционным полиномом**.

При построении одного многочлена для всего рассматриваемого интервала  $[a, b]$  для нахождения коэффициентов многочлена необходимо решить систему уравнений, построенную на основе полинома (3.3). Данная система содержит  $n + 1$  уравнение, следовательно, с ее помощью можно определить  $n + 1$  коэффициент. Поэтому максимальная степень интерполяционного многочлена  $m = n$ , и многочлен принимает вид

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n, i = 0, 1, \dots, n \quad (3.4)$$

### 3.2. Локальная и глобальная интерполяция

Если задан  $n + 1$  узел интерполяции, то на этих узлах можно построить один интерполяционный многочлен  $n$ -й степени,  $n - 1$  многочленов первой

степени и большой набор многочленов степени меньше  $n$ , опирающиеся на некоторые из этих узлов.

Теоретически максимальную точность обеспечивает многочлен более высокой степени. Однако на практике наиболее часто используют многочлены невысоких степеней, во избежание погрешностей расчета коэффициентов при больших степенях многочлена.

Если функция  $f(x)$  интерполируется на отрезке  $[a, b]$  с помощью единого многочлена  $P_m(x)$  для всего отрезка, то такую интерполяцию называют **глобальной**. В случае **локальной интерполяции** на каждом интервале  $[x_i, x_{i+1}]$  строится отдельный интерполяционный полином невысокой степени.

### 3.3. Кусочно-линейная интерполяция

Простейшим и часто используемым видом локальной интерполяции является линейная (или кусочно-линейная) интерполяция. Она заключается в том, что узловые точки соединяются отрезками прямых (рис.3.1), то есть через каждые две точки  $(x_i, y_i)$  и  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  проводится прямая, то есть составляется полином первой степени:

$$F(x) = a_0 + a_1 \cdot x, \text{ при } x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (3.5)$$

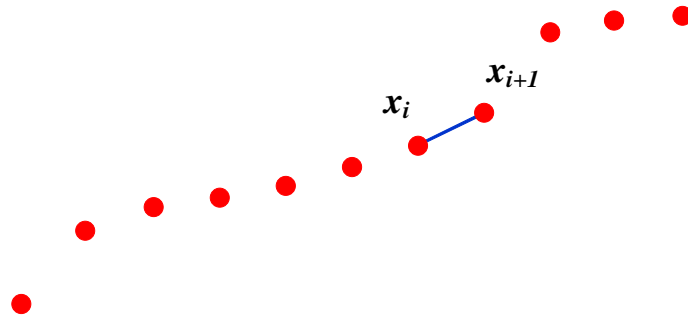


Рис. 3.1. Кусочно-линейная интерполяция

Коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$  разные на каждом интервале  $[x_i, x_{i+1}]$ , и находятся из выполнения условий интерполяции на концах отрезка:

$$\begin{cases} f_{i-1} = a_0 + a_1 \cdot x_{i-1} \\ f_i = a_0 + a_1 \cdot x_i \end{cases} \quad (3.6)$$

Из системы уравнений (3.6) можно найти коэффициенты:

$$a_0 = f(x_{i-1}) - a_1 \cdot x_{i-1}, \quad a_1 = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad (3.7)$$

При использовании кусочно-линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает значение  $x$ , а затем подставить его в выражение (3.5), используя коэффициенты для данного интервала.

### 3.4. Кусочно-квадратичная интерполяция

В случае квадратичной интерполяции, для каждой трех узловых точек  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ , строится уравнение параболы:

$$F(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2, \text{ при } x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \quad (3.8)$$

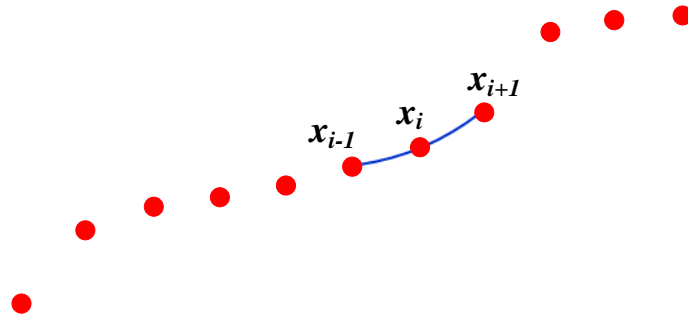


Рис.3.2. Кусочно-квадратичная интерполяция

Здесь коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$  разные на каждом интервале  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  и определяются решением системы уравнений для условия прохождения параболы через три точки:

$$\begin{cases} f_{i-1} = a_0 + a_1 \cdot x_{i-1} + a_2 \cdot x_{i-1}^2 \\ f_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 \\ f_{i+1} = a_0 + a_1 \cdot x_{i+1} + a_2 \cdot x_{i+1}^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

Из системы уравнений (3.9) можно найти коэффициенты:

$$\begin{aligned} a_0 &= f(x_{i-1}) - a_1 \cdot x_{i-1} - a_2 \cdot x_{i-1}^2 \\ a_1 &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - a_2 \cdot (x_i + x_{i-1}) \\ a_2 &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \end{aligned} \quad (3.10)$$



### 3.5. Многочлен Лагранжа

При глобальной интерполяции на всем интервале  $[a, b]$  строится единый многочлен. Одной из форм записи интерполяционного многочлена для глобальной интерполяции является многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x) \quad (3.11)$$

где  $l_i(x)$  – базисные многочлены степени  $n$ :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (3.12)$$

То есть многочлен Лагранжа можно записать в виде:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (3.13)$$

Многочлен  $l_i(x)$  удовлетворяет условию  $l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ . Это условие

означает, что многочлен равен нулю при каждом  $x_j$  кроме  $x_i$ , то есть  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  – корни этого многочлена. Таким образом, степень многочлена  $L_n(x)$  равна  $n$  и при  $x \neq x_i$  обращаются в ноль все слагаемые суммы, кроме слагаемого с номером  $i = j$ , равного  $y_i$ .

Выражение (3.11) применимо как для равноотстоящих, так и для не равноотстоящих узлов. Погрешность интерполяции методом Лагранжа зависит от свойств функции  $f(x)$ , от расположения узлов интерполяции и точки  $x$ . Полином Лагранжа имеет малую погрешность при небольших значениях  $n$  ( $n < 20$ ). При больших  $n$  погрешность начинает расти, что свидетельствует о том, что метод Лагранжа не сходится (то есть его погрешность не убывает с ростом  $n$ ).

Многочлен Лагранжа в явном виде содержит значения функций в узлах интерполяции, поэтому он удобен, когда значения функций меняются, а узлы интерполяции неизменны. Число арифметических операций, необходимых для построения многочлена Лагранжа, пропорционально  $n^2$  и является наименьшим для всех форм записи. К недостаткам этой формы записи можно

отнести то, что с изменением числа узлов приходится все вычисления проводить заново.

Кусочно-линейная и кусочно-квадратичная локальные интерполяции являются частными случаями интерполяции многочленом Лагранжа.

### 3.6. Многочлен Ньютона

Другая форма записи интерполяционного многочлена – интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями. Пусть функция  $f(x)$  задана с произвольным шагом, и точки таблицы значений пронумерованы в произвольном порядке.

**Разделенные разности** нулевого порядка совпадают со значениями функции в узлах. Разделенные разности первого порядка определяются через разделенные разности нулевого порядка:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.14)$$

Разделенные разности второго порядка определяются через разделенные разности первого порядка:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} \quad (3.15)$$

Разделенные разности  $k$ -го порядка определяются через разделенные разности порядка  $k - 1$ :

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i} \quad (3.16)$$

Используя понятие разделенной разности интерполяционный многочлен Ньютона можно записать в следующем виде:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \quad (3.17)$$

За точностью расчета можно следить по убыванию членов суммы (3.17). Если функция достаточно гладкая, то справедливо приближенное равенство  $f(x) - P_n(x) \approx P_{n+1}(x) - P_n(x)$ . Это приближенное равенство можно использовать для практической оценки погрешности интерполяции:  $\varepsilon_n = |P_{n+1}(x) - P_n(x)|$ .

### **3.7. Практическое задание**

Цель работы: углубление знаний по разделу «Методы интерполяции», приобретение практических навыков интерполяции функции кусочно-линейным и кусочно-квадратичным методами, а также интерполяционными многочленами Лагранжа и Ньютона.

#### **Задание для работы**

1. Сгенерировать выборку функции (размером 10 элементов). Выполнить интерполяцию кусочно-линейным и кусочно-квадратичным методами, а также интерполяционными многочленами Лагранжа и Ньютона, и перейти на выборку размером 100 точек.
2. Прочитать из файла выборку и перейти на другую размерность выборки при помощи интерполяции кусочно-линейным и кусочно-квадратичным методами.

Результатом работы программы являются:

- графики функции, полученные различными методами интерполяции (на одном графике) (п.1 задания);
- величина среднеквадратического отклонения восстановленной функции от аналитически заданной для различных методов интерполяции (п.1 задания);
- графики выборки после перехода на новую размерность (п.2 задания).

Файлы с выборкой находятся в электронном учебнике [17]  
[http://aco.ifmo.ru/el\\_books/numerical\\_methods/lab/docs/](http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lab/docs/).

Таблица 3.1. Варианты заданий

Вариант	Функция	Файл с выборкой
1	$\sin(x)$ , $[0; 2\pi]$	v1.txt, перейти на размерность 1024 элемента
2	$\sin(x)$ , $[-\pi; \pi]$	v2.txt, перейти на размерность 1024 элемента
3	$\sin(x)$ , $[-\pi; 2\pi]$	v3.txt, перейти на размерность 1024 элемента
4	$\sin(x)$ , $[0; \pi]$	v4.txt, перейти на размерность 1024 элемента
5	$\frac{\sin(x)}{x}$ , $[-\pi; \pi]$	v5.txt, перейти на размерность 1024 элемента
6	$\frac{\sin(x)}{x}$ , $[-2\pi; 2\pi]$	v6.txt, перейти на размерность 1024 элемента
7	$\frac{\sin(x)}{x}$ , $[\pi; 5\pi]$	v7.txt, перейти на размерность 1024 элемента
8	$\frac{\sin(x)}{x}$ , $[-4\pi; -\pi]$	v8.txt, перейти на размерность 1024 элемента
9	$\frac{\sin(x)}{x}$ , $[-\pi; 2\pi]$	v9.txt, перейти на размерность 512 элементов
10	$\sin(x) \cdot x$ , $[0; 2\pi]$	v10.txt, перейти на размерность 512 элементов
11	$\sin(x) \cdot x$ , $[-\pi; 2\pi]$	v11.txt, перейти на размерность 512 элементов
12	$\sin(x) \cdot x$ , $[-\pi; -2\pi]$	v12.txt, перейти на размерность 512 элементов
13	$\sin(x) \cdot x$ , $[-1.5\pi; 1.5\pi]$	v13.txt, перейти на размерность 512 элементов
14	$\sin(x) \cdot x$ , $[-4\pi; \pi]$	v14.txt, перейти на размерность 512 элементов
15	$\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$ , $[-\pi; \pi]$	v15.txt, перейти на размерность 512 элементов

## Пример выполнения отчета

### Задание для работы, вариант 1

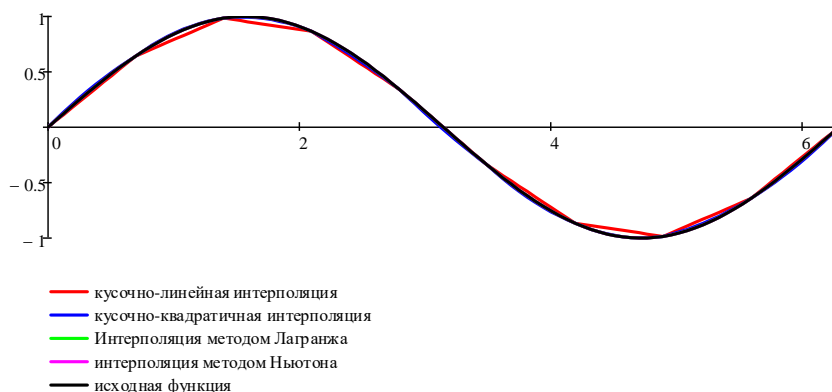
1. Сгенерировать выборку функции (размером 10 элементов). Выполнить интерполяцию кусочно-линейным и кусочно-квадратичным методами, а также интерполяционными многочленами Лагранжа и Ньютона, и перейти на выборку размером 100 точек.

$$\sin(x), [0;2\pi]$$

2. Прочитать из файла выборку и перейти на другую размерность выборки при помощи интерполяции кусочно-линейным и кусочно-квадратичным методами.

### Результаты работы программы

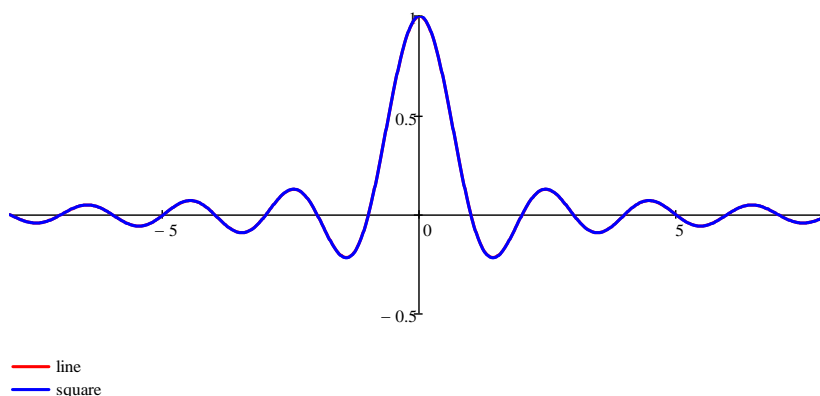
Графики функции, полученные различными методами интерполяции



Среднеквадратическое отклонение восстановленной функции от аналитически заданной:

кусочно-линейная интерполяция	СКО=0.030971
кусочно-квадратичная интерполяция	СКО=0.009970
интерполяция многочленами Лагранжа	СКО=2.22E-05
интерполяция многочленами Ньютона	СКО=2.22E-05

Графики выборки после перехода на новую размерность



## Глава 4. Аппроксимация

В главе 3 была рассмотрена задача интерполяции, которая заключается в определении промежуточных значений функции по известному дискретному набору значений функции. **Аппроксимация** – это определение параметров аналитической функции, описывающей набор точек, полученных в результате эксперимента.

### 4.1. Задача аппроксимации

Предположим, имеется набор из  $n$  точек  $(x_i, y_i)$ , полученных в результате эксперимента, и необходимо аппроксимировать (описать) эти данные некоторой функцией  $f(x)$ . Если исходные данные были получены с высокой точностью и количество точек не очень большое, то можно аппроксимировать данные функцией, которая проходит через все узловые точки. На практике экспериментально полученные данные всегда обладают погрешностью, часто довольно значительной, тогда при аппроксимации можно провести кривую таким образом, чтобы ее отклонение от всех точек было минимальным, но при этом она не обязательно будет проходить через каждую точку (рис.4.1). Такая аппроксимация сгладит погрешность первоначальных данных.

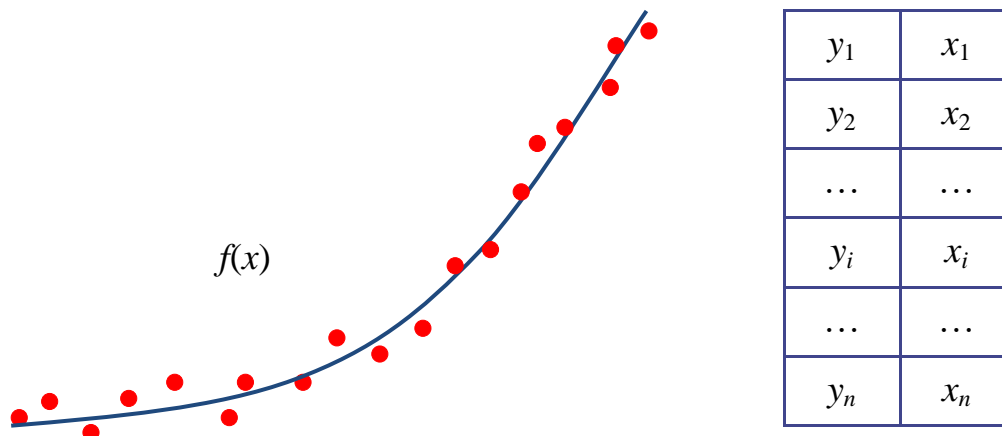


Рис.4.1. Задача аппроксимации

Представим аппроксимирующую функцию в виде суммы произведений коэффициентов  $c_0, c_1, \dots, c_m$  и базисных функций  $g_0, g_1, \dots, g_m$ :

$$f(x_i) = c_0 \cdot g_0(x_i) + c_1 \cdot g_1(x_i) + \dots + c_m \cdot g_m(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.1)$$

Выбор базисных функций, то есть зависимости, которой можно описать реальные данные – это отдельная задача, часто решаемая методом проб и

последовательных приближений. В этом случае исходные данные, представленные в графической форме (семейства точек или кривые), сопоставляются с семейством графиков ряда типовых функций, используемых обычно для целей аппроксимации. Однако во многих случаях базисная функция известна, и требуется только найти ее коэффициенты.

Во многих случаях в качестве базисной функции выбирают степенной полином:

$$f(x_i) = c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (4.2)$$

#### 4.2. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Для определения неизвестных коэффициентов составим систему линейных уравнений. В общем случае система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – это система из  $m$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4.3)$$

где  $m$  – количество уравнений,  $n$  – количество неизвестных,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – неизвестные, которые надо определить,  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$  – коэффициенты системы,  $b_1, b_2, \dots, b_m$  – свободные члены (известны).

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

или

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица системы,  $\mathbf{X}$  – столбец неизвестных,  $\mathbf{B}$  – столбец свободных членов:

$$\mathbf{A}_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений сводится к нахождению значений элементов столбца неизвестных  $\mathbf{X}$  (корней системы) по известным  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Необходимым и достаточным условием существования единственного решения системы линейных алгебраических уравнений является условие  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , то есть определитель матрицы  $\mathbf{A}$  не равен нулю. В случае равенства нулю определителя матрица  $\mathbf{A}$  называется вырожденной, и при этом СЛАУ либо не имеет решения, либо имеет бесчисленное множество решений.

Если матрица системы квадратная, и ее определитель не равен нулю, систему можно решить одним из следующих методов.

### Метод Крамера

При небольшой размерности системы  $m$  для решения часто используют метод Крамера:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}} \quad (4.7)$$

где  $\det \mathbf{A}$  – определитель матрицы системы,  $\det \mathbf{A}_i$  – определитель матрицы системы, где вместо  $i$ -го столбца стоит столбец правых частей.

Для больших матриц решение методом Крамера является слишком долгим и трудоемким.

### Метод Гаусса

Наиболее известным и популярным прямым методом решения СЛАУ является метод Гаусса. Этот метод заключается в последовательном исключении неизвестных, когда система уравнений (матрица  $\mathbf{A}$ ) приводится к равносильной системе треугольного вида (прямой ход метода Гаусса). Затем из полученной треугольной матрицы последовательно, начиная с последних по номеру, находят все переменные системы (обратный ход метода Гаусса).

### Метод обратной матрицы

Если  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , то существует обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$ . Тогда решение СЛАУ можно записать в виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \quad (4.8)$$



То есть, решение СЛАУ можно свести к умножению известной обратной матрицы на вектор правых частей. Нахождение обратной матрицы – трудоемкая операция, однако, при наличии вычислительных библиотек, предоставляющих вычисление обратной матрицы (иногда несколькими способами), такой вариант может быть менее сложен и более эффективен для самостоятельной реализации.

### 4.3. Пример использование СЛАУ для решения задачи аппроксимации

Систему линейных алгебраических уравнений можно применить и для решения задачи аппроксимации. Например, аппроксимируем  $n$  имеющихся точек  $(x_i, y_i)$  параболой:

$$f(x_i) = c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 \quad (4.9)$$

Тогда в столбец неизвестных можно записать искомые коэффициенты  $c_0, c_1, c_2$ , в столбец свободных членов – известные значения  $y_0, \dots, y_n$ , а в матрицу системы – вычисленные значения для каждого  $y_i$  при каждом коэффициенте  $c_0, c_1, c_2$ :

$$\mathbf{A}(m \times n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_i & x_i^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(m) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

### 4.4. Метод наименьших квадратов (МНК)

Для переопределенных СЛАУ (количество уравнений больше количества неизвестных  $m > n$ ) система не имеет единственного точного решения, но можно найти “оптимальный” вектор  $\mathbf{X}$ . В этом случае для решения СЛАУ используется метод наименьших квадратов (МНК). При помощи этого метода коэффициенты аппроксимирующей функции вычисляются таким образом, чтобы среднеквадратичное отклонение экспериментальных данных от найденной аппроксимирующей функции (сумма квадратов отклонений между векторами  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$  и  $\mathbf{B}$  уравнения (4.5)) было наименьшим:

$$\sum_i \varepsilon_i^2 = \sum_i (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min, \quad \text{где } \varepsilon_i = y_i - f(x_i) \quad (4.11)$$

Для вывода решения системы линейных уравнений методом наименьших квадратов перепишем выражение (4.5), с добавлением вектора погрешности  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.12)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Теперь задача сводится к минимизации квадрата нормы вектора погрешности  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\sum_i \varepsilon_i^2 = \|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_m] \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_m \end{pmatrix} \rightarrow \min \quad (4.14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{B})^T (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{B}) \rightarrow \min \quad (4.15)$$

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - 2 \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} \rightarrow \min \quad (4.16)$$

Для нахождения минимума необходимо вычислить частную производную по  $\mathbf{X}$  уравнения (4.16) и приравнять ее к 0:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{X}} = 2 \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - 2 \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.17)$$

Отсюда находим значение вектора  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \quad (4.18)$$

Таким образом, метод наименьших квадратов сводится к нахождению обратной матрицы.

### **Взвешенный метод наименьших квадратов**

Если в полученных экспериментально данных разные измерения (точки) имеют разные погрешности, можно использовать взвешенный метод наименьших квадратов. Во взвешенном МНК разные уравнения системы (разные точки экспериментально полученных данных) получают разный вес  $w_i$ , обычно пропорциональный погрешности каждой точки  $w_i \approx \frac{1}{\delta y_i}$ .

Взвешенный метод наименьших квадратов можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W}^2 \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W}^2 \cdot \mathbf{B} \quad (4.19)$$

где  $\mathbf{W}$  — диагональная матрица весов:

$$\mathbf{W}(n \times n) = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w_n \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

#### 4.5. Практическое задание

Цель работы: углубление знаний по разделам «Аппроксимация», приобретение практических навыков выполнения вычислений с матрицами с использованием стандартной библиотеки `boost::uBLAS`.

##### Задание для работы

По формуле Герцбергера (Приложение В) рассчитать показатель преломления стекла  $n_\lambda$  для трех длин волн. Результат расчета для стандартных длин волн можно проверить в каталоге стекла GlassBank (<http://glassbank.ifmo.ru/>).

Реализовать возможность расчета произвольного показателя преломления для длин волн от 0.3 до 2 мкм.

Вследствие округления точные значения рассчитанных показателей преломления могут варьироваться в пределах 4-5 знака после запятой.

Для работы с матрицами воспользоваться библиотекой `boost::uBLAS`. Описание работы с библиотекой `boost::uBLAS` и вычисления обратной матрицы находится в электронном учебнике [17] [http://aco.ifmo.ru/el\\_books/numerical\\_methods/library/ublas.html](http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/library/ublas.html).

Результатом работы программы являются показатели преломления стекла для заданных длин волн.

Таблица 3.1. Варианты заданий

Вариант	Марка стекла	Известные показатели преломления	Определить показатели преломления для длин волн
1	ЛК3	$n_i$ 1.504141 $n_F$ 1.492267 $n_e$ 1.489121 $n_C$ 1.485310 $n_r$ 1.484062 $n_t$ 1.479102	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.43583 \\ 0.58930 \\ 0.83020 \end{pmatrix}, \text{ мкм} \begin{pmatrix} g \\ D \\ \text{снел.} \end{pmatrix}$
2	ТК2	$n_i$ 1.597156 $n_F$ 1.579422 $n_e$ 1.574856 $n_C$ 1.569463 $n_r$ 1.567750 $n_t$ 1.561447	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.45561 \\ 0.64380 \\ 0.58930 \end{pmatrix}, \text{ мкм} \begin{pmatrix} \text{снел.} \\ C' \\ D \end{pmatrix}$
3	ЛФ5	$n_i$ 1.611971 $n_F$ 1.584813 $n_e$ 1.578322 $n_C$ 1.570894 $n_r$ 1.568596 $n_t$ 1.560549	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.43583 \\ 0.40466 \\ 0.75644 \end{pmatrix}, \text{ мкм} \begin{pmatrix} g \\ h \\ \text{снел.} \end{pmatrix}$
4	БФ1	$n_i$ 1.548784 $n_F$ 1.531443 $n_e$ 1.527058 $n_C$ 1.521895 $n_r$ 1.520262 $n_t$ 1.514198	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.63280 \\ 0.48000 \\ 0.40466 \end{pmatrix}, \text{ мкм} \begin{pmatrix} \text{снел.} \\ F' \\ h \end{pmatrix}$

Вариант	Марка стекла	Известные показатели преломления	Определить показатели преломления для длин волн
5	Ф2	$n_i$ 1.662241 $n_F$ 1.628440 $n_e$ 1.620541 $n_C$ 1.611600 $n_r$ 1.608862 $n_t$ 1.599483	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.40466 \\ 0.58756 \\ 0.64380 \end{pmatrix}, \text{МКМ} \begin{pmatrix} h \\ d \\ \text{cne}\varphi \end{pmatrix}$
6	ТФ10	$n_i$ 1.898752 $n_F$ 1.828930 $n_e$ 1.813763 $n_C$ 1.797152 $n_r$ 1.792217 $n_t$ 1.776254	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.63280 \\ 1.52960 \\ 0.43583 \end{pmatrix}, \text{МКМ} \begin{pmatrix} \text{cne}\varphi \\ \text{cne}\varphi \\ g \end{pmatrix}$
7	К8	$n_i$ 1.535813 $n_F$ 1.521949 $n_e$ 1.518291 $n_C$ 1.513890 $n_r$ 1.512460 $n_t$ 1.506870	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.6328 \\ 1.0600 \\ 0.4800 \end{pmatrix}, \text{МКМ} \begin{pmatrix} \text{cne}\varphi \\ \text{cne}\varphi \\ F' \end{pmatrix}$
8	БК8	$n_i$ 1.567959 $n_F$ 1.552822 $n_e$ 1.548860 $n_C$ 1.544111 $n_r$ 1.542578 $n_t$ 1.536686	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.64380 \\ 0.58756 \\ 1.06 \end{pmatrix}, \text{МКМ} \begin{pmatrix} C' \\ d \\ \text{cne}\varphi \end{pmatrix}$

Вариант	Марка стекла	Известные показатели преломления	Определить показатели преломления для длин волн
9	ТК14	$n_i$ 1.637907 $n_F$ 1.620126 $n_e$ 1.615507 $n_C$ 1.610006 $n_r$ 1.608243 $n_t$ 1.601588	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.45561 \\ 0.64380 \\ 0.58930 \end{pmatrix}$ , МКМ $\begin{pmatrix} cne\varphi \\ C' \\ D \end{pmatrix}$
10	БФ4	$n_i$ 1.573704 $n_F$ 1.555178 $n_e$ 1.550501 $n_C$ 1.545021 $n_r$ 1.543289 $n_t$ 1.536907	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.63280 \\ 1.52960 \\ 0.43583 \end{pmatrix}$ , МКМ $\begin{pmatrix} cne\varphi \\ cne\varphi \\ g \end{pmatrix}$
11	ТФ1	$n_i$ 1.700215 $n_F$ 1.661197 $n_e$ 1.652193 $n_C$ 1.642080 $n_r$ 1.639008 $n_t$ 1.628620	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.63280 \\ 0.48000 \\ 0.40466 \end{pmatrix}$ , МКМ $\begin{pmatrix} cne\varphi \\ F' \\ h \end{pmatrix}$
12	Ф1	$n_i$ 1.657814 $n_F$ 1.624656 $n_e$ 1.616877 $n_C$ 1.608068 $n_r$ 1.605371 $n_t$ 1.596092	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.40466 \\ 0.58756 \\ 0.64380 \end{pmatrix}$ , МКМ $\begin{pmatrix} h \\ d \\ cne\varphi \end{pmatrix}$

1.536686

Вариант	Марка стекла	Известные показатели преломления	Определить показатели преломления для длин волн
13	TK23	$n_i$ 1.612613 $n_F$ 1.595862 $n_e$ 1.591481 $n_C$ 1.586248 $n_r$ 1.584568 $n_t$ 1.578219	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.43583 \\ 0.58930 \\ 0.83020 \end{pmatrix}, \text{MKM} \begin{pmatrix} g \\ D \\ \text{cneц} \end{pmatrix}$
14	ЛК7	$n_i$ 1.500244 $n_F$ 1.487890 $n_e$ 1.484604 $n_C$ 1.480610 $n_r$ 1.479300 $n_t$ 1.474101	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.45561 \\ 0.64380 \\ 0.58930 \end{pmatrix}, \text{MKM} \begin{pmatrix} \text{cneц} \\ C' \\ D \end{pmatrix}$
15	БК4	$n_i$ 1.551794 $n_F$ 1.536374 $n_e$ 1.532369 $n_C$ 1.527606 $n_r$ 1.526083 $n_t$ 1.520378	$\lambda = \begin{pmatrix} 0.64380 \\ 0.58756 \\ 1.06 \end{pmatrix}, \text{MKM} \begin{pmatrix} C' \\ d \\ \text{cneц} \end{pmatrix}$

## Пример выполнения отчета

### Задание для работы, вариант 1

По формуле Герцбергера рассчитать показатель преломления стекла  $n_\lambda$  для трех длин волн. Результат расчета для стандартных длин волн можно проверить в каталоге стекла [GlassBank](http://GlassBank.ru).

Стекло ЛК3. Определить показатель преломления для длин волн  $\lambda = \begin{pmatrix} 0.43583 \\ 0.58930 \\ 0.83020 \end{pmatrix}$ , мкм  $\begin{pmatrix} g \\ D \\ \text{спеу.} \end{pmatrix}$ .

Известные показатели преломления:

$$n_i = 1.504141$$

$$n_F = 1.492267$$

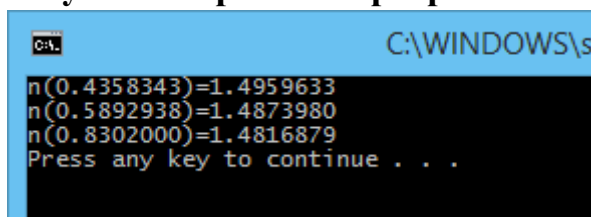
$$n_e = 1.489121$$

$$n_C = 1.485310$$

$$n_r = 1.484062$$

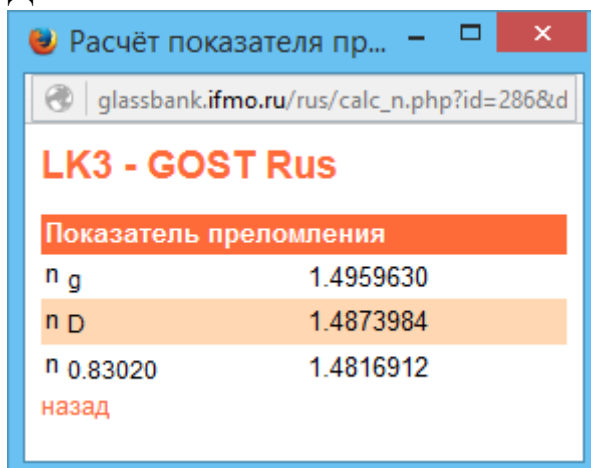
$$n_t = 1.479102$$

### Результаты работы программы:



```
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
n(0.4358343)=1.4959633
n(0.5892938)=1.4873980
n(0.8302000)=1.4816879
Press any key to continue . . .
```

### Данные из каталога GlassBank



Показатель преломления	
n <sub>g</sub>	1.4959630
n <sub>D</sub>	1.4873984
n <sub>0.83020</sub>	1.4816912

[назад](#)



## Глава 5. Преобразование Фурье и его свойства

### 5.1. Непрерывное преобразование Фурье и его свойства

#### Одномерное преобразование Фурье

Пусть  $f(x)$  – произвольная одномерная функция. Преобразование Фурье произвольной одномерной функции также является одномерной функцией и определяется следующим интегралом:

$$\tilde{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi i vx} dv = F[f(x)] \quad (5.1)$$

где  $v$  – пространственная частота,  $\tilde{f}(v)$  – Фурье-образ функции,  $F$  – оператор преобразования Фурье,  $F[f(x)]$  – сокращенная запись преобразования Фурье.

Функция и её фурье-образ связаны обратным преобразованием Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v) \cdot e^{2\pi i vx} dx = F^{-1}[\tilde{f}(v)] \quad (5.2)$$

Преобразование Фурье является обратимым:

$$f(x) \xleftrightarrow{F} \tilde{f}(v) \quad (5.3)$$

#### Двумерное преобразование Фурье

Двумерное преобразование Фурье определяется аналогично для произвольной двумерной функции  $f(x, y)$ :

$$\tilde{f}(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-2\pi i(xv_x + yv_y)} dx dy = F[f(x, y)], \quad (5.4)$$

где  $v_x$  и  $v_y$  – частотные декартовы координаты,  $\tilde{f}(v_x, v_y)$  – фурье-образ функции  $f(x, y)$ .

Обратное преобразование Фурье двумерной функции:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v_x, v_y) \cdot e^{2\pi i(v_x x + v_y y)} dv_x dv_y = F^{-1}[\tilde{f}(v_x, v_y)]. \quad (5.5)$$

#### Использование преобразования Фурье в оптике

Преобразование Фурье является основой математического аппарата для описания дифракции светового поля (в том числе в оптических системах) и вычисления характеристик качества оптических систем [4]. В частности,

комплексная амплитуда в изображении точки вычисляется как обратное преобразование Фурье от зрачковой функции  $U'(\eta'_x, \eta'_y) = F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)]$ , функция рассеяния точки вычисляется как квадрат модуля обратного фурье-преобразования от зрачковой функции  $h(\eta'_x, \eta'_y) = |F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)]|^2$ , а оптическая передаточная функция вычисляется как прямое фурье-преобразование от функции рассеяния точки  $D(\omega_x, \omega_y) = F[h(\eta_x, \eta_y)]$ .

### Основные свойства фурье-образов произвольной функции

В таблице 5.1 приведены основные свойства фурье-образа произвольной функции. Где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – произвольные константы,  $g(x, y)$  – произвольная функция, а  $\tilde{g}(v_x, v_y)$  – её фурье-образ.

Таблица 5.1. Основные свойства фурье-образов произвольной функции

Функция	Фурье-образ
$\sum_n c_n \cdot f_n(x, y)$	$\sum_n c_n \cdot \tilde{f}_n(v_x, v_y)$
$f(ax, by)$	$\frac{1}{ ab } \cdot \tilde{f}\left(\frac{v_x}{a}, \frac{v_y}{b}\right)$
$f(x-a, y-b)$	$\tilde{f}(v_x, v_y) \cdot e^{-2\pi i \cdot (av_x + bv_y)}$
$f(x, y) \otimes g(x, y)$	$\tilde{f}(v_x, v_y) \cdot \tilde{g}(v_x, v_y)$

Значение фурье-образа в точке с координатой  $v=0$  можно представить как сумму всех значений функции, а значение функции в точке с координатой  $x=0$  можно представить как сумму всех значений фурье-образа (**теорема о центральном значении**):

$$\tilde{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(v) dv \quad (5.6)$$

Модуль фурье-спектра убывает пропорционально  $\sim \frac{1}{v^{n+1}}$ , где  $n$  – порядок дифференцируемости исходной функции. То есть, чем более гладкая функция, тем быстрее убывает ее фурье-спектр (**теорема о производной**):

$$\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \xleftrightarrow{F} \tilde{f}(v) \cdot (2\pi i v)^n \quad (5.7)$$

Количество энергии (сумма всех значений функции), содержащееся в функции после преобразования Фурье (сумма всех значений фурье-спектра) остается неизменной (**теорема Парсеваля или закон сохранения энергии**):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\nu)|^2 d\nu \quad (5.8)$$

### Свойства симметрии преобразования Фурье

Свойства симметрии преобразования Фурье приводятся в таблице 5.2.

Таблица 5.2. Свойства симметрии преобразования Фурье

Функция	Фурье-образ
вещественная и четная	вещественный и четный
вещественная и нечетная	мнимый и нечетный
вещественная и не симметричная	комплексный: вещественная часть четная, мнимая часть нечетная

Фурье-образ функций, обладающих осевой симметрией, может быть найден с использованием преобразования Ганкеля:

$$\tilde{f}(\nu_r) = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) \cdot r \cdot J_0(2\pi \nu_r r) dr \quad (5.9)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – радиус в полярной пространственной системе координат;  $\nu_r = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2}$  – радиус в полярной частотной системе координат, а  $J_0$  – функция Бесселя. Справедливо и обратное преобразование:

$$f(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \tilde{f}(\nu_r) \cdot \nu_r \cdot J_0(2\pi \nu_r r) d\nu_r \quad (5.10)$$

### Фурье-образ двумерной функций с разделяющимися переменными

Фурье-образ двумерной функций с разделяющимися переменными можно определить как произведение фурье-образов составляющих её множителей:

$$\tilde{f}(\nu_x, \nu_y) = F[f(x, y)] = F[f_x(x)] \cdot F[f_y(y)] = \tilde{f}_x(\nu_x) \cdot \tilde{f}_y(\nu_y) \quad (5.11)$$

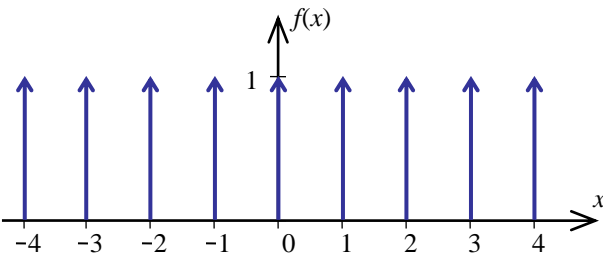
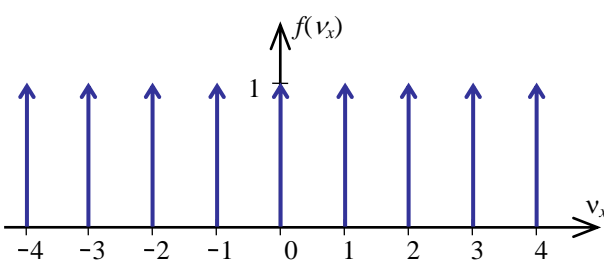
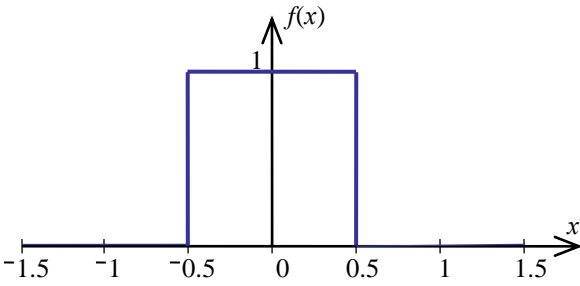
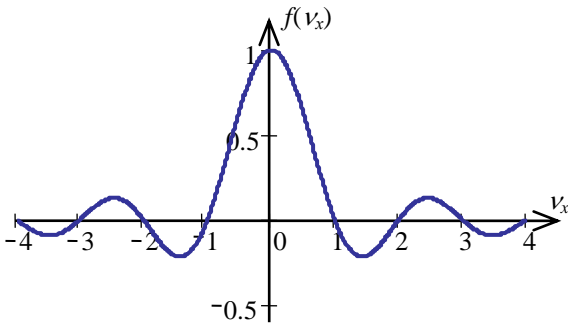
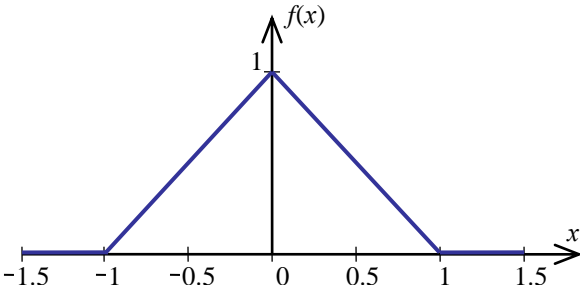
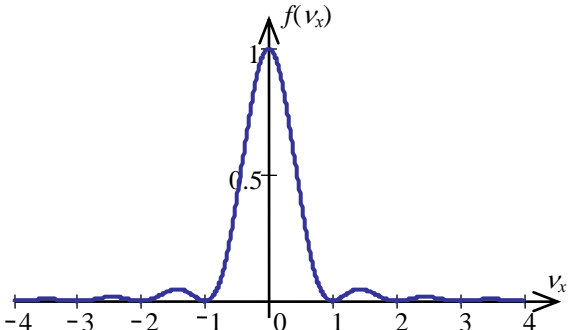
В таблице 5.3 приведены аналитические выражения и графики некоторых одномерных функций и их фурье-образов, которые используются для представления функций с разделяющимися переменными.

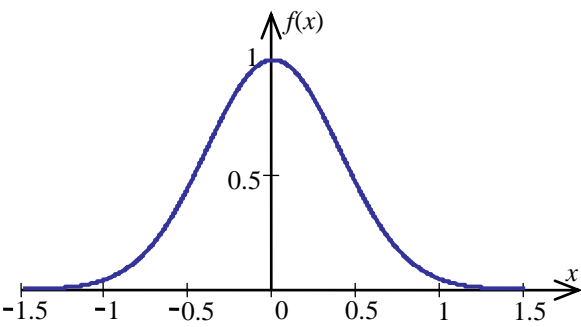
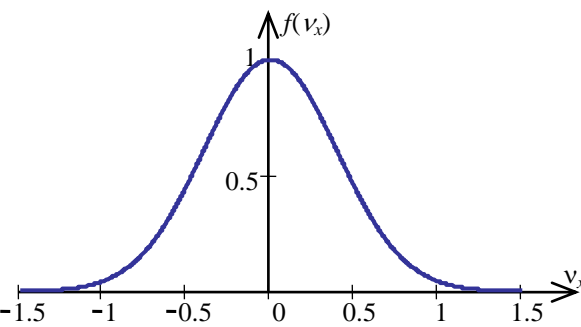
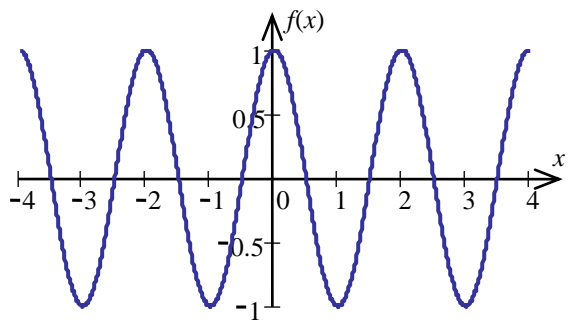
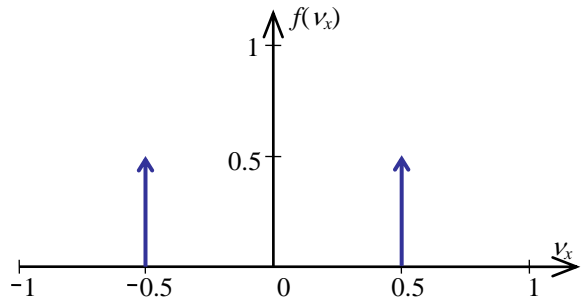
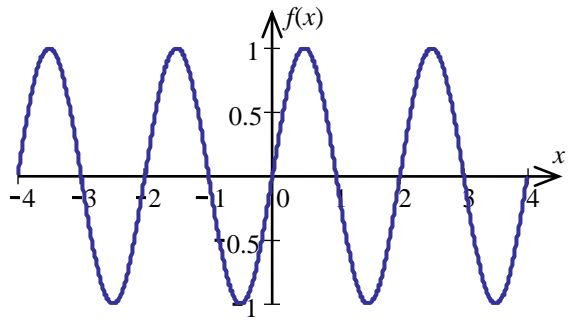
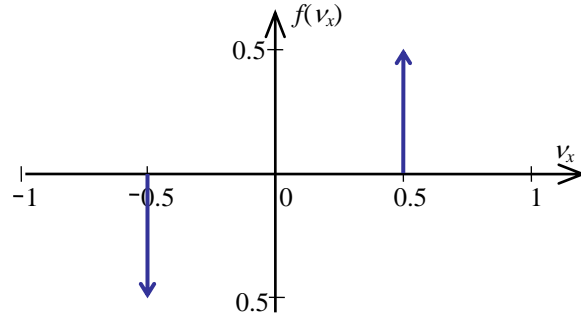
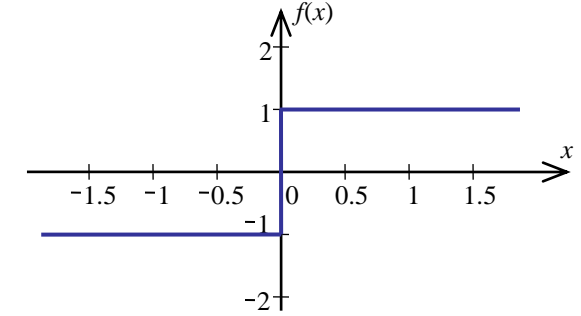
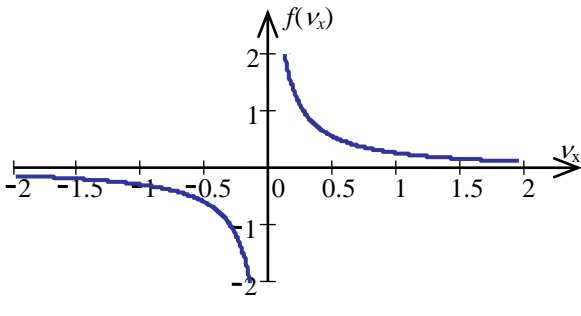
## 5.2. Таблицы функций и их фурье-образов

### Одномерные функции и их фурье-образы

В таблице 5.3 приведены аналитические выражения и графики некоторых одномерных функций и их фурье-образов.

Таблица 5.3. Некоторые одномерные функции и их фурье-образы

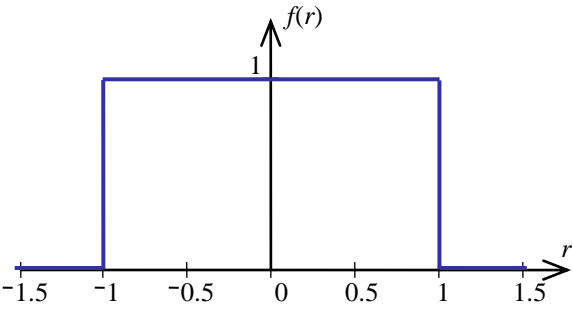
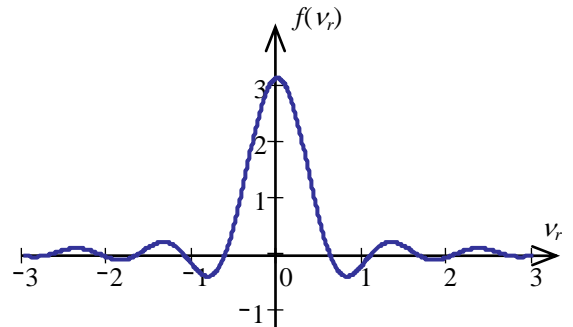
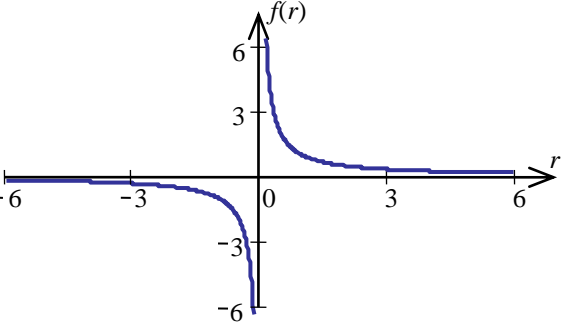
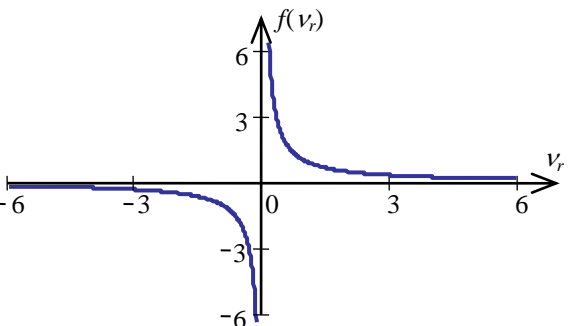
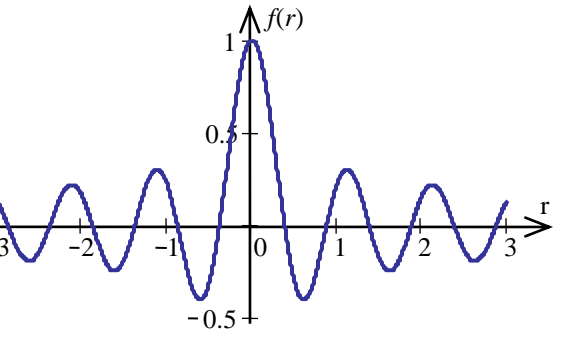
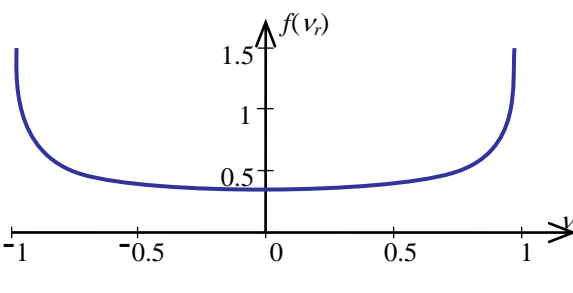
Функция	Фурье-образ
$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$	1
$\text{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x+n)$ 	$\text{comb}(v_x)$ 
$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1/2; 1/2]; \\ 0, & x \notin [-1/2; 1/2]. \end{cases}$ 	$\text{sinc}(\pi v_x) = \frac{\sin(\pi v_x)}{\pi v_x}$ 
$\text{tr}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-1; 1]; \\ 1+x, & x \in [-1; 0]; \\ 1-x, & x \in [0; 1]. \end{cases}$ 	$\text{sinc}^2(\pi v_x)$ 

Функция	Фурье-образ
$e^{-\pi \cdot x^2}$ 	$e^{-\pi \cdot v_x^2}$ 
$\cos(\pi x)$ 	$\frac{\delta(v_x - 1/2) + \delta(v_x + 1/2)}{2}$ 
$\sin(\pi x)$ 	$\frac{\delta(v_x - 1/2) - \delta(v_x + 1/2)}{2i}$ 
$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$ 	$\frac{i}{\pi v_x}$ 

### Осесимметричные функции и их фурье-образы

В таблице 5.4 приведены аналитические выражения и графики сечений некоторых осесимметричных функций и их фурье-образов. Для описания функций, имеющих осевую симметрию, используется радиус в полярной пространственной системе координат или в полярной частотной системе координат:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ .

Таблица 5.4. Некоторые осесимметричные функции и их фурье-образы

Функция	Фурье-образ
<p style="text-align: center;"><math>\text{circ}(r)</math></p> 	<p style="text-align: center;"><math>\pi \cdot \text{Bessinc}(2\pi v_r) = \frac{J_1(2\pi v_r)}{v_r}</math></p> 
<p style="text-align: center;"><math>\frac{1}{r}</math></p> 	<p style="text-align: center;"><math>\frac{1}{v_r}</math></p> 
<p style="text-align: center;"><math>J_0(2\pi r)</math></p> 	<p style="text-align: center;"><math>\frac{1}{\pi \sqrt{1 - v_r^2}}</math></p> 

### 5.3. Дискретное преобразование Фурье

#### Спектр периодической функции

Рассмотрим преобразование Фурье от периодической функции  $f(x) = g(x - nT)$ , где  $g(x)$  – функция одного периода, повторяющаяся с периодом  $T$ . Такую периодическую функцию можно описать как свертку функции  $comb(x/T)$  с функцией одного периода  $g(x)$ :

$$f(x) = g(x) \otimes comb\left(\frac{x}{T}\right) \quad (5.12)$$

Тогда, согласно свойствам преобразования Фурье (таблица 5.1), спектр периодической функции  $f(x)$  можно вычислить как произведение фурье-образа функции  $comb(x/T)$  и фурье-образа функции одного периода  $g(x)$ :

$$\tilde{f}(v) = \tilde{g}(v) \cdot comb(Tv) \quad (5.13)$$

Таким образом, спектр периодической функции с периодом  $T$  существует только в отдельных точках, то есть является дискретным с шагом  $1/T$  (рис.5.1), причем огибающая дискретного спектра – фурье-образ одного периода функции (**теорема о спектре периодической функции**).

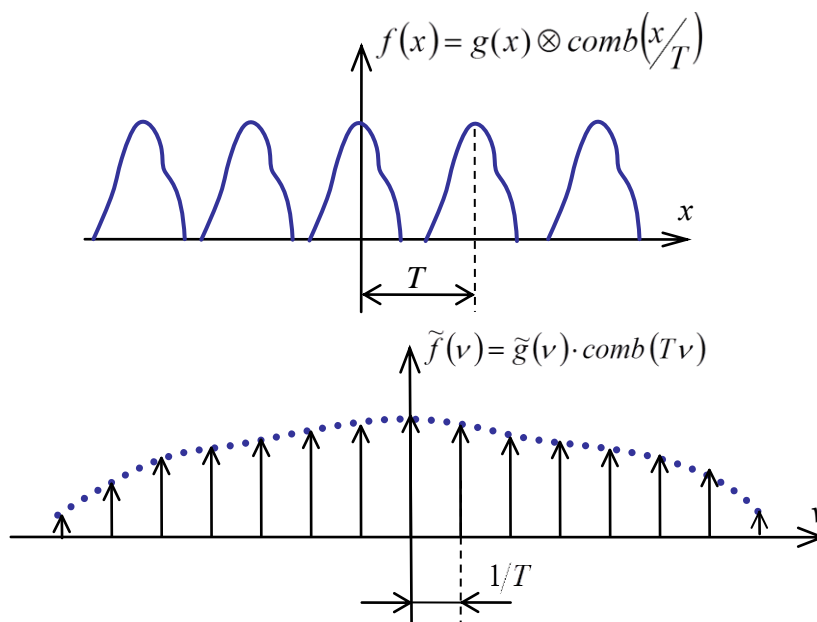


Рис.5.1. Периодическая функция и ее спектр

### Спектр дискретной функции

Чтобы описать дискретную функцию, можно представить исходную функцию в виде произведения огибающей  $g(x)$  и функции отсчетов  $comb(x/T)$ :

$$f(x) = g(x) \cdot comb\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \quad (5.14)$$

Спектр дискретной функции с шагом дискретизации  $\Delta x$  будет периодической функцией с периодом  $T = 1/\Delta x$ , а в пределах одного периода – спектр огибающей выборки (рис.5.2). При этом **частота Найквиста**  $\nu = 1/2\Delta x$  – предельная частота, на которой повторяющиеся спектры выборки не пересекаются (**теорема о спектре дискретной функции**).

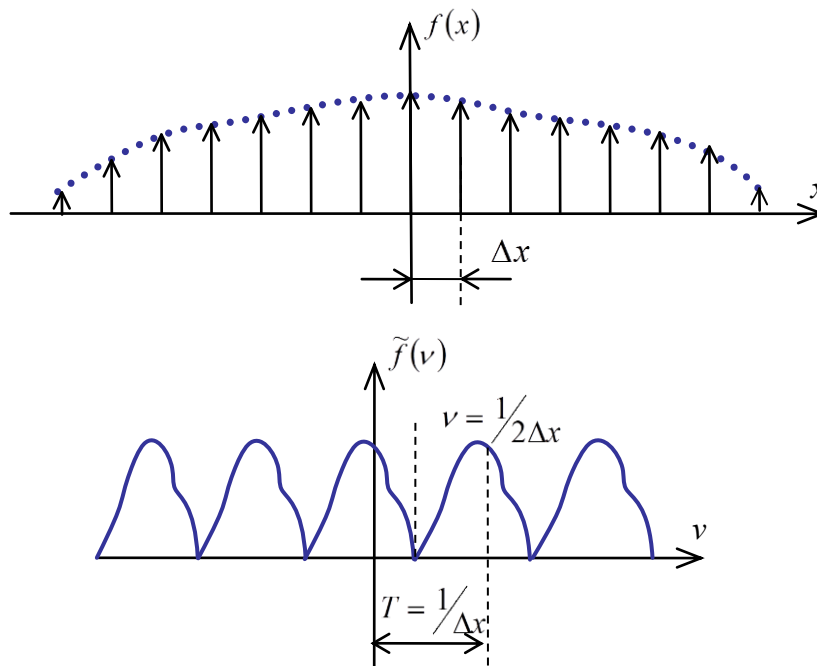


Рис.5.2. Дискретная функция и ее спектр

### Теорема о выборке

**Теорема о выборке** определяет условия, при которых по выборке  $f(x) = g(x) \cdot comb(x/\Delta x)$  возможно восстановить непрерывную функцию  $g(x)$ .

В общем случае восстановить по выборке непрерывную функцию невозможно. Однако если исходная функция имеет финитный спектр Фурье (конечный по протяженности), то при соблюдении определенных условий для шага выборки  $\Delta x$  функцию можно восстановить однозначно.



**Теорема о выборке** (известна так же как теорема Уиттекера – Шеннона или теорема Котельникова) формулируется следующим образом: любая двумерная функция с финитным фурье-образом однозначно определяется выборкой с шагами  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , величина которых удовлетворяет неравенствам:

$$\Delta x \leq \frac{1}{2\nu_x}, \quad \Delta y \leq \frac{1}{2\nu_y} \quad (5.15)$$

где  $\nu_x$  и  $\nu_y$  – предельные частоты в фурье-образе этой функции.

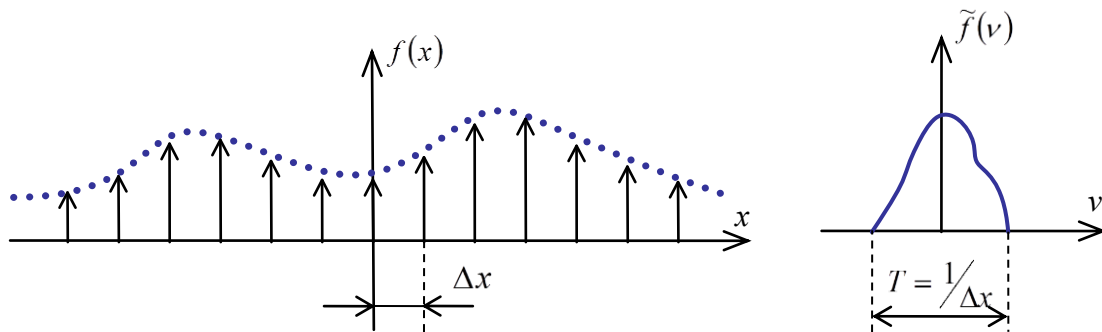


Рис.5.3. Теорема о выборке

### Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

При численной реализации преобразования Фурье непрерывные функции заменяются дискретными, а их интегральные преобразования – соответствующими суммами. Одномерное **дискретное преобразование Фурье (ДПФ)** выборки некоторой функции размером  $N$  описывается следующим выражением:

$$\tilde{f}_{mn} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{kl} \cdot e^{-2\pi i \frac{(km+ln)}{N}} \quad (5.16)$$

где  $m$  – номер элемента в выборке функции,  $k$  – номер элемента в выборке фурье-спектра,  $N$  – размерность выборок.

Обратное ДПФ определяется выражением:

$$f_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_{mn} \cdot e^{2\pi i \frac{(mk+nl)}{N}} \quad (5.17)$$

Вычисление преобразования Фурье путём выполнения непосредственно суммирования является неэффективным, поэтому для вычисления

дискретного фурье-образа функций, как правило, используется один из алгоритмов **быстрого преобразования Фурье (БПФ)**. Разработано большое количество быстрых алгоритмов для вычисления преобразования Фурье, многие из которых реализованы в виде библиотек на различных языках программирования.

Одной из наиболее эффективных и удобных в использовании библиотек является **FFTW** [19]. Существенное увеличение производительности вычислений в этой библиотеке достигается за счёт того, что во время выполнения выбирается наиболее подходящий алгоритм БПФ для данного количества элементов выборки.

Все быстрые алгоритмы, включая алгоритмы библиотеки FFTW работают наиболее эффективно с выборками, размерность которых является  $2^n$ , то есть 2, 4, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 и т.д. Поэтому, при использовании быстрых алгоритмов желательно задавать размерность выборки равную  $2^n$ .

Из теоремы о выборке следует, что если количество элементов в выборке функции и выборке спектра одинаково и равно  $N$ , шаги по функции и по спектру связаны между собой соотношениями:

$$\Delta x \leq \frac{1}{N \cdot \Delta v_x}, \quad \Delta y \leq \frac{1}{N \cdot \Delta v_y} \quad (5.18)$$

### *Сдвиговое дискретное преобразование Фурье (СДПФ)*

#### **Одномерное СДПФ**

Свойства ДПФ таковы, что после выполнения вычислений нулевые отсчёты фурье-образа попадают в нулевые элементы выборки (рис.5.4). Первые  $N/2 - 1$  элементов выборки воспроизводят положительную частотную область фурье-образа, а следующие  $N/2$  элементов соответствуют отрицательным частотам. Между тем, при работе с дискретными функциями и их фурье-образами удобнее получать выборку с обычным расположением элементов. Для этого необходимо выполнить циклическое смещение элементов на  $N/2$ . Кроме того, часто требуется осуществлять произвольное (нецелочисленное) смещение положения элементов относительно начала координат. В частности, при моделировании формирования частично когерентного изображения это особенно важно, так как в вычислениях необходимо использовать фурье-образ функции комплексного пропускания предмета смещённый относительно зрачковой функции.

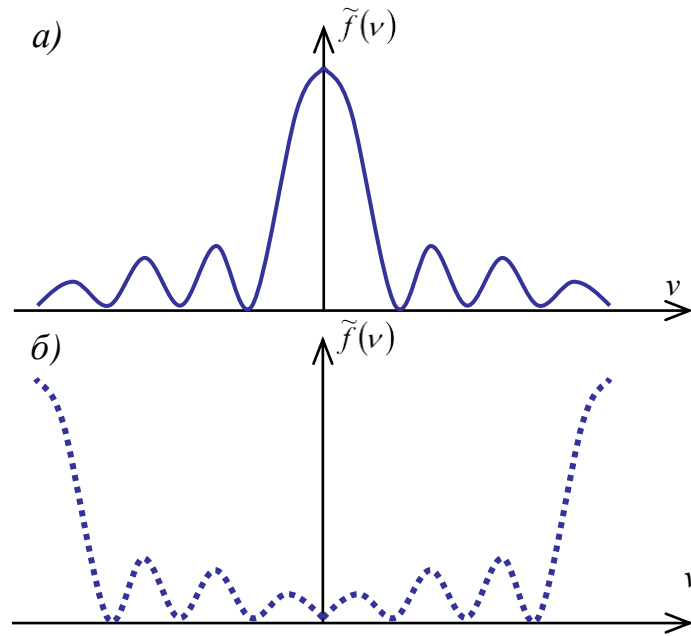


Рис.5.4. Вид спектра функции:

- а) после непрерывного преобразования Фурье  
 б) после дискретного преобразования Фурье

Преодолеть неудобства использования ДПФ позволяет его модификация, которая осуществляется на основе теоремы о сдвиге преобразования Фурье. Пусть сдвиг нулевого отсчёта функции относительно начала координат составляет  $k_s \cdot \Delta x$ , а сдвиг нулевого отсчёта фурье-образа относительно начала его координат составляет  $m_s \cdot \Delta \nu$ . Тогда дискретное представление прямого преобразования Фурье примет вид:

$$\tilde{f}_m = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{(k+k_s)(m+m_s)}{N}} \quad (5.19)$$

где  $m_s$  – величина сдвига функции;  $k_s$  – величина сдвига спектра.

Преобразование такого вида называется **сдвиговым дискретным преобразованием Фурье (СДПФ)**. Введение параметров сдвига придаёт СДПФ свойства, которые сближают его с непрерывным преобразованием Фурье. Для получения фурье-образов с привычным расположением начала координат в центре выборки необходимо выполнить СДПФ с параметрами сдвига  $k_s = N/2$  и  $m_s = N/2$  в соответствии с выражением (5.19). СДПФ с параметрами сдвига  $k_s = 0$  и  $m_s = 0$ , совпадает с ДПФ и обладает всеми его свойствами. С помощью пары преобразований: СДПФ и обратного СДПФ, с надлежащим образом подобранными параметрами сдвига  $k_s$  и  $m_s$  можно

получать интерполированные произвольно расположенные промежуточные отсчёты функций.

СДПФ легко выражается через ДПФ тривиальным раскрытием скобок в выражении (5.20):

$$\tilde{f}_m = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \left( f_k \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{km_s}{N}} \right) \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{km}{N}} \right] \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{k_s m}{N}} \quad (5.20)$$

Как видно из выражения (5.20), вычисление СДПФ можно выполнить в 3 этапа:

1. Домножение выборки функции на сдвиговую экспоненту  $e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{km_s}{N}}$ , обеспечивающую смещение спектра.
2. Выполнение ДПФ, с использованием любого алгоритма БПФ.
3. Домножение выборки спектра на сдвиговую экспоненту  $e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{k_s m}{N}}$ , компенсирующее смещение выборки.

Аналогичное выражение и процедура вычисления используется для обратного СДПФ.

### Двумерное СДПФ

Для двумерного преобразования Фурье необходимо сдвигать функцию и спектр в направлении  $x$  и направлении  $y$ :

$$\tilde{f}_{mn} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_{kl} \cdot e^{-2 \pi i \frac{(k+k_s)(m+m_s)}{N}} \cdot e^{-2 \pi i \frac{(l+l_s)(n+n_s)}{N}} \quad (5.21)$$

где  $m_s, n_s$  – величина сдвига функции;  $k_s, l_s$  – величина сдвига спектра.

Для получения фурье-образов с привычным расположением начала координат в центре выборки в соответствии с выражением необходимо выполнить СДПФ с параметрами сдвига  $k_s = N/2, l_s = N/2$  и  $m_s = N/2, n_s = N/2$ . СДПФ с параметрами сдвига  $k_s = 0, l_s = 0$  и  $m_s = 0, n_s = 0$ , совпадает с ДПФ и обладает всеми его свойствами.

Двумерное СДПФ выражается через ДПФ следующим образом:

$$\tilde{f}_m = \left[ \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{km_s}{N}} \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{ln_s}{N}} \right] \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{km}{N}} \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{ln}{N}} \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{k_s m}{N}} \cdot e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{l_s n}{N}} \quad (5.22)$$

Двумерное СДПФ можно выполнить в 3 этапа:

1. Домножение выборки функции на сдвиговые экспоненты  $e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{l_s n}{N}}$ ,  $e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{km_s}{N}}$ , обеспечивающие смещение спектра.
2. Выполнение ДПФ, с использованием любого алгоритма БПФ.
3. Домножение выборки спектра на сдвиговые экспоненты  $e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{k_s m}{N}}$ ,  $e^{-2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{ln_s}{N}}$ , компенсирующие смещение выборки.

Аналогичное выражение и процедура вычисления используется для обратного двумерного СДПФ.

#### 5.4. Практическое задание

Цель работы: углубление знаний по разделу «Методы численного преобразования Фурье», приобретение практических навыков выполнения сдвигового дискретного преобразования Фурье с использованием стандартной библиотеки FFTW [17].

##### Задание для работы

1. Вычислить спектр функции при помощи сдвигового преобразования Фурье.
2. Вычислить спектр функции  $f(x, y) = circ(\rho)$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , при помощи сдвигового двумерного преобразования Фурье.
3. Вычислить ФРТ оптической системы для заданной формы зрачка и сравнить с ФРТ безабберационной оптической системы с круглым зрачком и равномерным пропусканием.

Результатом работы программы являются графики и полутоновые изображения функции и ее спектра (вещественной и мнимой части), и графики и полутоновые изображения ФРТ.

### Вычисление ФРТ оптической системы

$$\text{ФРТ оптической системы: } h(\eta'_x, \eta'_y) = \frac{1}{H'} \cdot \left| F^{-1} [f(\rho_x, \rho_y)] \right|^2:$$

где  $H'$  – обобщённая задняя светосила

$$H' = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^{1/2}(\rho_x, \rho_y) \cdot d\rho_x \cdot d\rho_y \right)^2 = \left( \sum \sqrt{\tau_{i,j}} \cdot dx \cdot dy \right)^2,$$

$f(\rho_x, \rho_y)$  – зрачковая функция

$$f(\rho_x, \rho_y) = \begin{cases} \tau^{1/2}(\rho_x, \rho_y) \cdot e^{2\pi i W(\rho_x, \rho_y)}, & \text{внутри } \Omega_0 \\ 0, & \text{вне } \Omega_0 \end{cases}$$

где  $(\rho_x, \rho_y)$  – зрачковые координаты,

$\tau(\rho_x, \rho_y)$  – функция пропускания по зрачку,

$W(\rho_x, \rho_y)$  – функция волновой аберрации,

$\Omega_0$  – область зрачка.

Для круглого зрачка с равномерным пропусканием и в отсутствии аберраций  $f(\rho_x, \rho_y) = \text{circ}(\rho)$ ,  $H' = \pi^2$ .

Шаг по выборке вычислять как  $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}}$ , где  $N$  – количество элементов

выборки. Для  $N = 256$ :  $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{N}} = 0.0625$ .

Таблица 5.5. Варианты заданий

Вариант	Функция для одномерного преобразования Фурье	Функция для двумерного преобразования Фурье (форма зрачка)
1	$rect(x)$	Квадратный зрачок $f(\rho_x, \rho_y) = rect(\rho_x / 2) \cdot rect(\rho_y / 2)$
2	$Tr(x)$	Круглый зрачок с центральным экранированием $f(\rho_x, \rho_y) = \text{circ}(\rho) - \text{circ}(\rho/\varepsilon)$ , $\varepsilon = 0.6$
3	$Sinc(2\pi x)$	Круглый зрачок с центральным экранированием $f(\rho_x, \rho_y) = \text{circ}(\rho) - \text{circ}(\rho/\varepsilon)$ , $\varepsilon = 0.7$

<b>4</b>	$\text{Sinc}^2(2\pi x)$	Круглый зрачок с центральным экранированием $f(\rho_x, \rho_y) = \text{circ}(\rho) - \text{circ}(\rho/\varepsilon)$ , $\varepsilon = 0.8$
<b>5</b>	$\cos(2\pi x)$	Круглый зрачок с центральным экранированием $f(\rho_x, \rho_y) = \text{circ}(\rho) - \text{circ}(\rho/\varepsilon)$ , $\varepsilon = 0.9$
<b>6</b>	$1 + \cos(2\pi x)$	Круглый зрачок с неравномерным пропусканием $\tau(\rho_x, \rho_y) = e^{-2\pi\rho^2}$
<b>7</b>	$\cos(2\pi x) - 1$	Круглый зрачок с неравномерным пропусканием $\tau(\rho_x, \rho_y) = \rho^2$
<b>8</b>	$e^{-2\pi x^2}$	Круглый зрачок с наличием расфокусировки $W(\rho) = c_{20} \cdot (2\rho^2 - 1)$ , $c_{20} = 0.1$
<b>9</b>	$-\text{rect}(x)$	Круглый зрачок с наличием расфокусировки $W(\rho) = c_{20} \cdot (2\rho^2 - 1)$ , $c_{20} = 0.15$
<b>10</b>	$-\text{Tr}(x)$	Круглый зрачок с наличием расфокусировки $W(\rho) = c_{20} \cdot (2\rho^2 - 1)$ , $c_{20} = 0.2$
<b>11</b>	$-\text{Sinc}(2\pi x)$	Круглый зрачок с наличием расфокусировки $W(\rho) = c_{20} \cdot (2\rho^2 - 1)$ , $c_{20} = 0.25$
<b>12</b>	$-\text{Sinc}^2(2\pi x)$	Круглый зрачок со сферической aberrацией 3го порядка $W(\rho) = c_{40} \cdot (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$ , $c_{40} = 0.1$
<b>13</b>	$f(x) = 1$	Круглый зрачок со сферической aberrацией 3го порядка $W(\rho) = c_{40} \cdot (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$ , $c_{40} = 0.15$
<b>14</b>	$\sin(2\pi x)$	Круглый зрачок со сферической aberrацией 3го порядка $W(\rho) = c_{40} \cdot (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$ , $c_{40} = 0.2$
<b>15</b>	$1 + \sin(2\pi x)$	Круглый зрачок со сферической aberrацией 3го порядка $W(\rho) = c_{40} \cdot (6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$ , $c_{40} = 0.25$

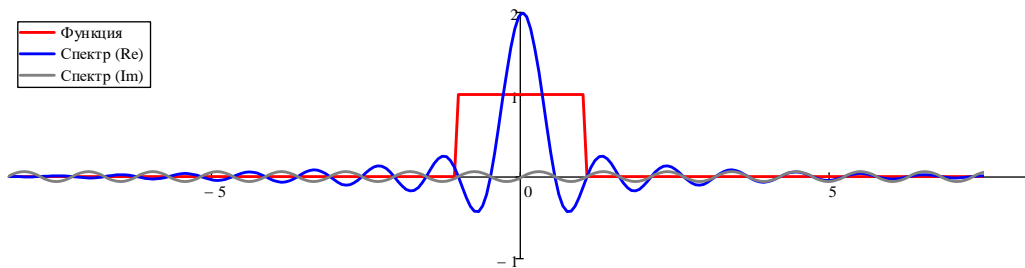
## Пример выполнения отчета

### Задание для работы, вариант 1

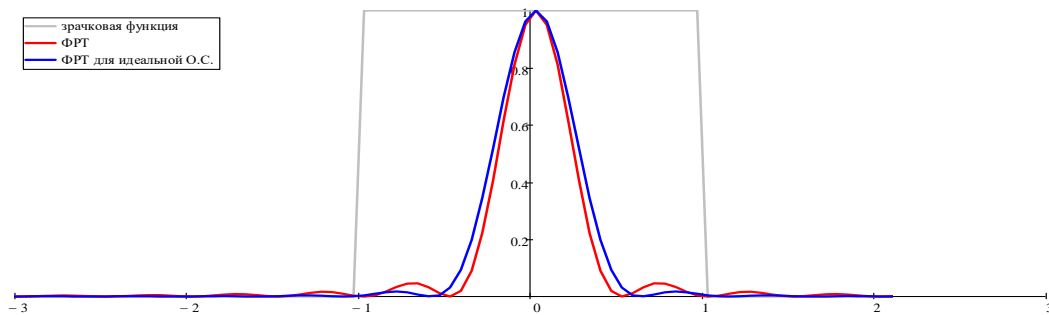
1. Вычислить спектр функции при помощи сдвигового преобразования Фурье, функция:  $rect(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-0.5; +0.5] \\ 0, & x \in [-0.5; +0.5] \end{cases}$
2. Вычислить спектр функции  $f(x, y) = circ(\rho)$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  при помощи сдвигового двумерного преобразования Фурье.
3. Вычислить ФРТ оптической системы для заданной формы зрачка и сравнить с ФРТ безабберационной оптической системы с круглым зрачком и равномерным пропусканием. Квадратный зрачок  $f(\rho_x, \rho_y) = rect(\rho_x / 2) \cdot rect(\rho_y / 2)$ .

### Результаты работы программы

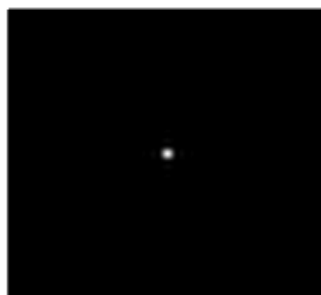
Графики одномерной функции и ее спектра



Графики и полутонные изображения ФРТ



ФРТ идеальной О.С.



ФРТ



## Приложение А. Погрешности вычислений

### ***Абсолютная и относительная погрешности***

Точность полученного в результате вычисления результата определяется погрешностью вычислений. Различают два вида погрешностей – абсолютную и относительную.

Абсолютная погрешность некоторого числа равна разности между его истинным значением и приближенным значением, полученным в результате вычисления или измерения:

$$\Delta x = x - a \quad (\text{A.1})$$

где  $a$  – приближенное значение числа  $x$ .

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности к приближенному значению числа:

$$\delta x = \Delta x / x \quad (\text{A.2})$$

Истинное значение величины  $x$  обычно неизвестно. Имеется лишь приближенное значение  $a$  и нужно найти его предельную погрешность  $\Delta a$ . В дальнейшем значение  $\Delta a$  принимается в качестве абсолютной погрешности приближенного числа  $a$ . Тогда истинное значение  $x$  находится в интервале  $a \pm \Delta a$ .

### ***Источники погрешностей***

Рассмотрим различные причины возникновения погрешностей.

#### **Математическая модель задачи является неточной**

Погрешность возникает из-за того, что сам численный метод или математическая модель является лишь приближением к точному методу (например, дифференцирование). Кроме того, любая математическая модель или метод могут внести существенные погрешности, если в ней не учтены какие-то особенности рассматриваемой задачи. Модель может прекрасно работать в одних условиях и быть совершенно неприемлемой в других. Такую погрешность называют также методической. Она всегда имеет место, даже при абсолютно точных данных и абсолютно точных вычислениях. В большинстве случаев погрешность численного метода можно уменьшить до требуемого значения за счет изменения параметров метода (например, уменьшением шага дискретизации, или увеличением количества итераций).

#### **Ошибки в исходных данных**

Исходные данные задачи часто являются основным источником погрешностей. Ошибки такого типа неизбежны и проявляются в любых

реальных задачах, поскольку любое измерение может быть проведено с только какой-то предельной точностью. Вместе с погрешностями, вносимыми математической моделью, их называют **неустраняемыми погрешностями**, поскольку они не могут быть уменьшены ни до начала решения задачи, ни в процессе ее решения.

Следует стремиться к тому, чтобы все исходные данные были примерно одинаковой точности. Сильное уточнение одних исходных данных при наличии больших погрешностей в других не приводит к повышению точности конечных результатов. Если какие-то отдельные точки данных (измерения) явно ошибочные, их можно исключить из вычислений.

### **Вычислительные ошибки (ошибки округления)**

Ошибки этого типа проявляются из-за дискретной (а не непрерывной) формы представления величин в компьютере. Вычислительные ошибки можно свести к минимуму продуманно организовывая алгоритмы.

### **Вычислительные ошибки**

Рассмотрим подробнее вычислительные ошибки. Допустим, исходные данные не имеют погрешности, но поскольку место в памяти компьютера, отведенное на хранение чисел, ограничено, и соответственно ограничена точность представления чисел, возникновение вычислительных ошибок неизбежно.

### **Представление чисел с плавающей точкой**

Для хранения целых чисел (int, long, unsigned int и т.д.) обычно отводится 4 байта памяти, что позволяет представлять целые числа, находящиеся примерно в диапазоне от  $-2 \cdot 10^9 \div 2 \cdot 10^9$ .

В вычислениях чаще используются вещественные числа (float, double). Такие числа представляются в компьютере в форме с плавающей точкой, и хранятся в логарифмическом виде – мантисса и порядок:

$$x = \pm m \cdot a^p \quad (\text{A.3})$$

где  $m$  – мантисса,  $p$  – порядок,  $a$  – основание степени.

Мантисса записывается в нормализованной форме – с фиксированной точкой, подразумеваемой после первой значащей цифры. Нормализованной формой числа с плавающей точкой называется такая форма, в которой мантисса десятичного числа (без учёта знака) принимает значения  $1 \leq m < 10$ , а мантисса двоичного числа принимает значения от  $1 \leq m < 2$ .

Например, число 273.9 можно представить в виде  $2.739 \cdot 10^2$  или в компьютерном представлении 2.739E+02.

В таблице А.1 приводится диапазон допустимых значений и другие параметры для чисел с плавающей точкой одинарной (float) и двойной (double) точности.

*Таблица А.1. Диапазон чисел, представимых в формате с плавающей точкой*

<b>Точность</b>	<b>Одинарная</b>	<b>Двойная</b>
Размер (байты)	4	8
Наименьшее значение	$1.2 \cdot 10^{-38}$	$2.3 \cdot 10^{-308}$
Наибольшее значение	$3.4 \times 10^{+38}$	$1.7 \times 10^{+308}$
Размеры степени и мантиссы (биты)	8-23	11-52

Для чисел с плавающей точкой существует понятие машинного эпсилон – наименьшего положительного числа  $\varepsilon$  такого, что  $1 + \varepsilon \neq 1$ . Например, для числа с одинарной точностью  $1 + 0.00000001 = 1$ . Для одинарной точности  $\varepsilon = 2^{-24} \approx 5.9 \cdot 10^{-8}$ , а для двойной точности  $\varepsilon = 2^{-53} \approx 1.1 \cdot 10^{-16}$ .

### **Погрешность округления**

При вычислениях с помощью компьютера неизбежны погрешности округлений, связанные с ограниченностью хранимых разрядов мантиссы. Для приближенного числа, полученного в результате округления, абсолютная погрешность  $\Delta a$  принимается равной половине единицы последнего разряда числа. Например, значение  $a = 0.734$  могло быть получено округлением чисел 0.73441, 0.73353 и др. При этом  $\Delta a = 0.0005$ . При простом отбрасывании лишних разрядов эта погрешность увеличивается вдвое.

Перевод чисел из одной системы счисления в другую также может быть источником погрешности из-за того, что основание одной системы счисления не является степенью основания другой (например, 10 и 2). Это может привести к тому, что в новой системе счисления число невозможно представить абсолютно точно, например:

$$\begin{aligned} 0.1 &= 0.100000000000000001 \\ 299.8 &= 299.800000000000001 \\ 8059807621.14 &= 8059807621.1400003 \end{aligned}$$

### **Погрешность арифметических действий над приближенными числами**

При выполнении операций над приближенными числами можно оценить предельную погрешность результата в зависимости от выполняемой операции. При умножении или делении чисел друг на друга их относительные погрешности складываются:

$$\delta(x \cdot y) = \delta x + \delta y, \delta(x/y) = \delta x + \delta y \quad (\text{A.4})$$

При возведении в степень приближенного числа его относительная погрешность умножается на показатель степени:

$$\delta(x^k) = k \cdot \delta x \quad (\text{A.5})$$

При сложении или вычитании чисел их абсолютные погрешности складываются:

$$\Delta(x \pm y) = \Delta x + \Delta y \quad (\text{A.6})$$

Относительная погрешность суммы положительных слагаемых вычисляется как:

$$\delta(x + y) = \frac{\Delta(x+y)}{x+y} = \frac{\Delta x + \Delta y}{x+y} = \frac{x \cdot \delta x + y \cdot \delta y}{x+y}. \quad (\text{A.7})$$

Отсюда следует, что относительная погрешность суммы нескольких чисел одного и того же знака, заключена между наименьшей и наибольшей из относительных погрешностей слагаемых:

$$\min(\delta x, \delta y) \leq \delta(x + y) \leq \max(\delta x, \delta y). \quad (\text{A.8})$$

На практике для оценки погрешности при сложении чисел обычно используют максимальную погрешность  $\max(\delta x, \delta y)$ .

При сложении погрешность будет сильно зависеть от абсолютных величин складываемых чисел. Рассмотрим пример сложения двух чисел с одинаковым количеством значащих цифр, но разных по абсолютному значению:

$$1234 + 0.005678 = 1234.00005678$$

или в компьютерном представлении:

$$1.234\text{E}+03 + 5.678\text{E}-03 = 1.234005678\text{E}+03$$

После сложения количество значащих цифр равно 10. Число с одинарной точностью (float) позволяет хранить только 8 значащих цифр, то есть на самом деле число будет равно 1.2340056E+03. Две значащие цифры потерялись в процессе сложения. Потеря точности здесь возникает из-за того, что при прибавлении к большому числу малых чисел результат сложения выходит за пределы точности при округлении. Для того чтобы уменьшить погрешность вычислений, нужно складывать числа в порядке возрастания их абсолютной величины. Таким образом можно минимизировать абсолютную величину промежуточной погрешности при каждом сложении.

Рассмотрим теперь вычитание чисел (сложение чисел разного знака, или вычитание чисел одного знака). В соответствии с выражением (A.7) относительная погрешность может быть очень большой в случае, если числа близки между собой, так как даже при малых погрешностях  $\Delta x, \Delta y$  результат

их сложения в знаменателе может быть очень малым. Чтобы уменьшить погрешность при вычитании, необходимо строить вычислительные алгоритмы таким образом, чтобы избегать вычитания близких чисел.

Таким образом, можно сделать вывод, что сложение и вычисление являются плохо обусловленными (неустойчивыми) операторами, так как при некоторых данных даже небольшая погрешность в исходных данных может привести к большой погрешности результата. Уменьшить погрешность можно за счет правильной последовательности операций. Из-за погрешности округления в машинной арифметике важен порядок выполнения операций, и известные из алгебры законы коммутативности (и дистрибутивности) здесь не всегда выполняются.

## Приложение Б. Полиномы Цернике

Одним из способов предоставления функции волновой аберрации является ее разложение в ряд по полиномам Цернике:

$$\begin{aligned} W(\rho, \varphi) &= \sum_n \sum_m c_{nm} R_n^m(\rho) \cdot \cos(m\varphi) = \\ &= c_{00} + c_{20} R_2^0(\rho) + c_{40} R_4^0(\rho) + c_{60} R_6^0(\rho) + \dots, \\ &+ c_{11} R_1^1(\rho) \cos(\varphi) + c_{31} R_3^1(\rho) \cos(\varphi) + c_{51} R_5^1(\rho) \cos(\varphi) + \dots \\ &+ c_{22} R_2^2(\rho) \cos(2\varphi) + c_{42} R_4^2(\rho) \cos(2\varphi) + \dots \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

где  $\rho$  и  $\varphi$  – зрачковые полярные канонические координаты,  $m+n$  – чётное число, причем  $n \geq m$ ,  $R_n^m(\rho)$  – радиальные полиномы Цернике, зависящие только от  $\rho$ ,  $c_{nm}$  – коэффициенты разложения.

### Поперечные и продольные аберрации

Поперечные и продольные аберрации оптической системы связаны с волновой аберрацией через частные производные. Поперечные аберрации в канонических координатах являются частными производными первого порядка по  $\rho_x, \rho_y$ :

$$\Delta \eta'_x = \frac{\partial W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_x}, \quad \Delta \eta'_y = \frac{\partial W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_y} \quad (\text{Б.4})$$

Продольные аберрации являются частными производными второго порядка по  $\rho_x, \rho_y$ :

$$\Delta S'_x = \frac{\partial^2 W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_x^2}, \quad \Delta S'_y = \frac{\partial^2 W(\rho_x, \rho_y)}{\partial \rho_y^2} \quad (\text{Б.5})$$

### Канонические зрачковые координаты

Зрачковые канонические координаты описывают относительное положение точек на зрачке и получаются нормированием обобщённых координат на зрачке к соответствующим апертурам:

$$\rho_y = \frac{P_y}{A_y} = \frac{P'_y}{A'_y}; \quad \rho_x = \frac{P_x}{A_x} = \frac{P'_x}{A'_x} \quad (\text{Б.2})$$

где  $P_x$  и  $P_y$  – входные зрачковые координаты,  $A_x$  и  $A_y$  – передние обобщённые апертуры,  $P'_x$  и  $P'_y$  – выходные зрачковые координаты,  $A'_x$  и  $A'_y$

– задние обобщённые апертуры. Области зрачков в канонических координатах представляют собой круги единичного радиуса.

В канонических координатах координаты главного луча будут  $\rho_x = \rho_y = 0$ , координаты верхнего луча  $\rho_x = 0, \rho_y = 1$ , координаты нижнего луча  $\rho_x = 0, \rho_y = -1$  (рис.А.1).

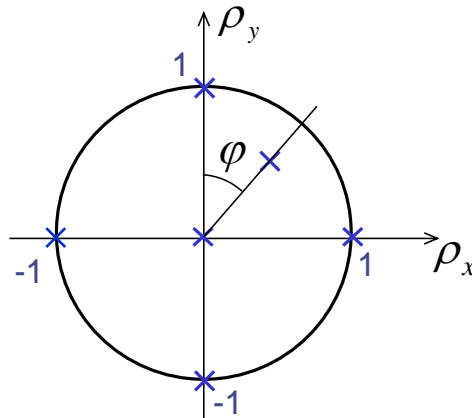


Рис.Б.1. Зрачок в канонических координатах

В разложении волновой aberrации по полиномам Цернике обычно используются полярные канонические зрачковые координаты  $\rho$  и  $\varphi$  :

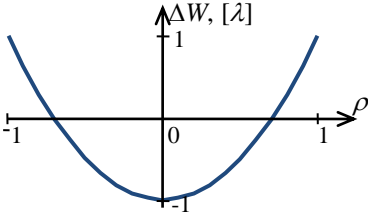
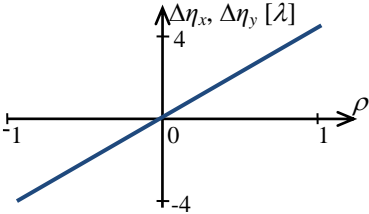
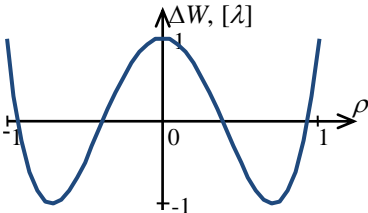
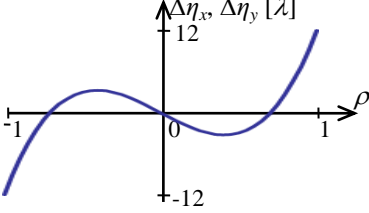
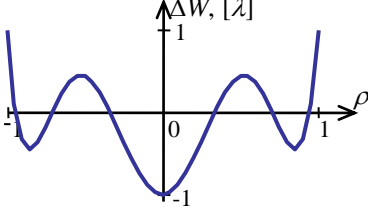
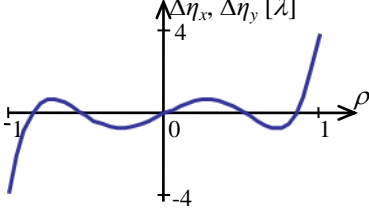
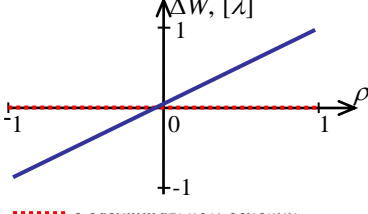
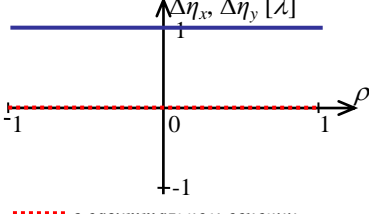
$$\begin{aligned} \rho_x &= \rho \sin \varphi \\ \rho_y &= \rho \cos \varphi, \quad \rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}, \quad \varphi = \arctg(\rho_x / \rho_y) \end{aligned} \quad (\text{А.3})$$

### Таблица aberrаций оптических систем

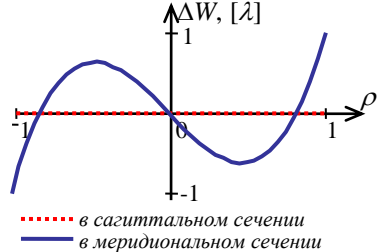
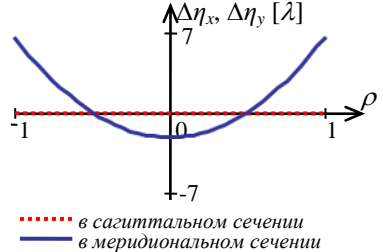
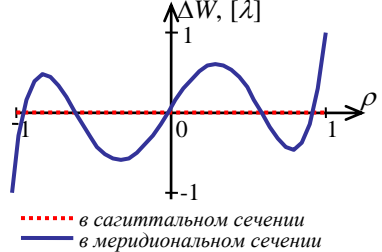
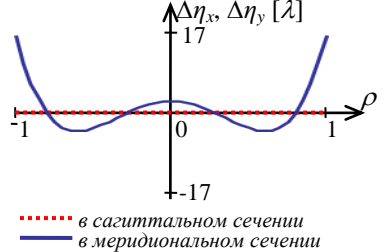
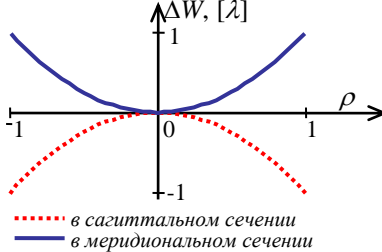
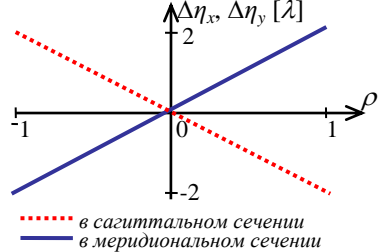
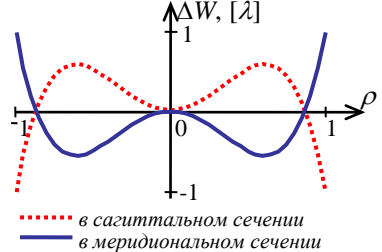
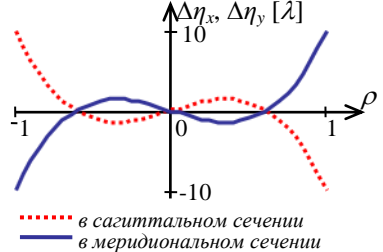
Каждое слагаемое ряда (Б.1) описывает aberrацию определенного вида и порядка, а коэффициент  $c_{nm}$  показывает вклад отдельных типов aberrаций.

В таблице Б.1 приводятся выражения для волновой aberrации, профиль волнового фронта и графики поперечных aberrаций для отдельных видов aberrаций оптических систем. Профиль волнового фронта приводится для значений коэффициентов  $c_{nm} = 1$ .

Таблица Б.1. Аберрации оптических систем, описываемые с использованием полиномов Цернике

Вид аберрации	Выражение для волновой аберрации	Профиль волнового фронта	Поперечные аберрации
Расфокусировка	$c_{20}R_2^0(\rho),$ где $R_2^0(\rho) = 2\rho^2 - 1$		
Сферическая аберрация 3-го порядка	$c_{40}R_4^0(\rho),$ где $R_4^0(\rho) = 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$		
Сферическая аберрация 5-го порядка	$c_{60}R_6^0(\rho),$ где $R_6^0(\rho) = 20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$		
Поперечное смещение, при различных значениях по полю описывает дисторсию	$c_{11}R_1^1(\rho)\cos\varphi,$ где $R_1^1(\rho) = \rho$	 <p style="text-align: center;"> <span style="color: red;">.....</span> в сагиттальном сечении  <span style="color: blue;">————</span> в меридиональном сечении                     </p>	 <p style="text-align: center;"> <span style="color: red;">.....</span> в сагиттальном сечении  <span style="color: blue;">————</span> в меридиональном сечении                     </p>



Вид aberrации	Выражение для волновой aberrации	Профиль волнового фронта	Поперечные aberrации
кома 3-го порядка	$c_{31} R_3^1(\rho) \cos \varphi,$ где $R_3^1(\rho) = 3\rho^3 - 2\rho$	 <p>..... в сагиттальном сечении — в меридиональном сечении</p>	 <p>..... в сагиттальном сечении — в меридиональном сечении</p>
кома 5-го порядка	$c_{51} R_5^1(\rho) \cos \varphi,$ где $R_5^1(\rho) = 10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho$	 <p>..... в сагиттальном сечении — в меридиональном сечении</p>	 <p>..... в сагиттальном сечении — в меридиональном сечении</p>
астигматизм 3-го порядка	$c_{22} R_2^2(\rho) \cos 2\varphi,$ где $R_2^2(\rho) = \rho^2$	 <p>..... в сагиттальном сечении — в меридиональном сечении</p>	 <p>..... в сагиттальном сечении — в меридиональном сечении</p>
астигматизм 5-го порядка	$c_{42} R_4^2(\rho) \cos 2\varphi,$ где $R_4^2(\rho) = 4\rho^4 - 3\rho^2$	 <p>..... в сагиттальном сечении — в меридиональном сечении</p>	 <p>..... в сагиттальном сечении — в меридиональном сечении</p>

## Приложение В. Аппроксимация показателей преломления по формуле Герцбергера

**Дисперсионная формула** – это аппроксимация, позволяющая описывать зависимость показателя преломления от длины волны  $n(\lambda)$ . Для каждой оптической среды определяется набор коэффициентов, значения которых позволяют восстанавливать показатель преломления (рис.В.1).

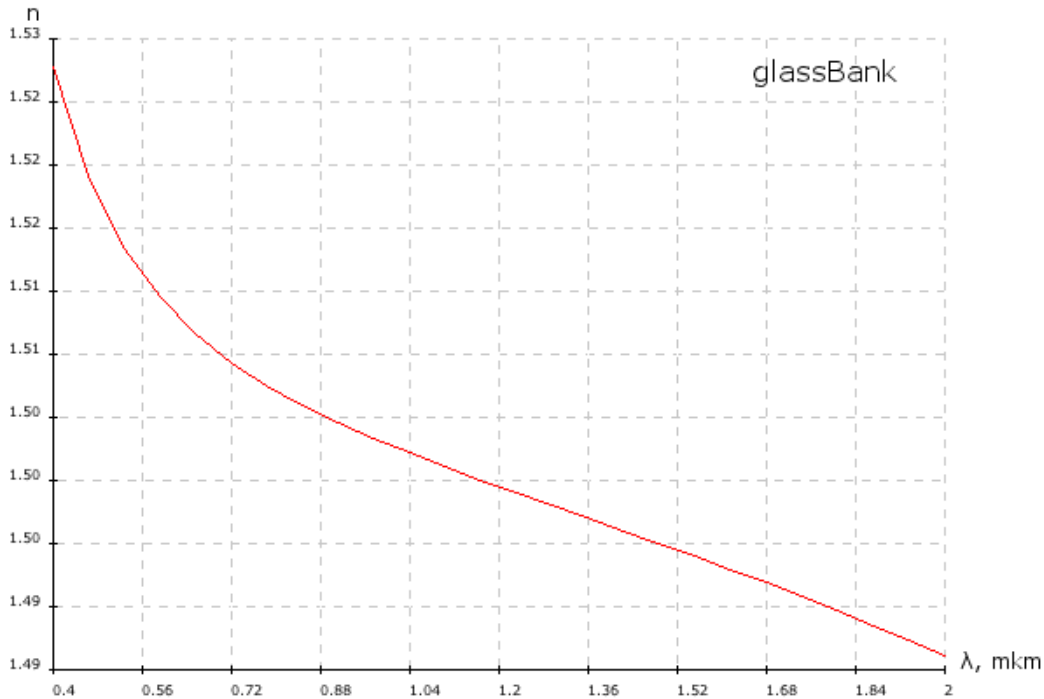


Рис.В.1. Пример графика дисперсии для стекла K8

Существует несколько различных дисперсионных формул [6], в частности формула Герцбергера:

$$n(\lambda) = \mu_1 + \mu_2\lambda^2 + \mu_3\lambda^4 + \mu_4L + \mu_5L^2 + \mu_6L^3, \quad (\text{В.1})$$

где  $L = (\lambda^2 - \lambda_0^2)^{-1}$ ,  $\lambda_0^2 = 0,028 \text{ мкм}^2$ .

Формула Зелмейера:

$$n(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{c_1\lambda^2}{\lambda^2 - c_4} + \frac{c_2\lambda^2}{\lambda^2 - c_5} + \frac{c_3\lambda^2}{\lambda^2 - c_6}} \quad (\text{В.2})$$

Формула Шотта:

$$n(\lambda) = \sqrt{c_1 + c_2\lambda^2 + \frac{c_3}{\lambda^2} + \frac{c_4}{\lambda^4} + \frac{c_5}{\lambda^6} + \frac{c_6}{\lambda^8}} \quad (\text{В.3})$$

Формула Резника:

$$n(\lambda) = c_2 + c_4\nu + c_6\nu^2 + c_8\nu^3 + c_{10}\nu^4 + c_3\mu + c_5\mu^2 + c_7\mu^3 + c_9\mu^4 + c_{11}\mu^5 \quad (\text{B.4})$$

$$\text{где } \mu = \frac{L_\lambda - L_{av}}{\Delta L}, \quad L_\lambda = \frac{1}{\lambda^2 - c_1}, \quad L_{av} = \frac{L_{\max} + L_{\min}}{2}, \quad \Delta L = \frac{L_{\min} - L_{\max}}{2},$$

$$L_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}^2 - c_1}, \quad L_{\min} = \frac{1}{\lambda_{\min}^2 - c_1}, \quad \nu = \frac{\lambda^2 - \lambda_{av}^2}{\Delta\lambda}, \quad \lambda_{av} = \frac{\lambda_{\max}^2 + \lambda_{\min}^2}{2},$$

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_{\max}^2 - \lambda_{\min}^2}{2}.$$

В практическом задании в разделе 4 предлагается использовать для аппроксимации показателя преломления формулу Герцбергера [15].

Для определения параметров  $\mu_1, \dots, \mu_6$  достаточно шести значений показателя преломления для каждого стекла, однако для повышения точности вычисления можно взять большее число известных показателей преломления.

Система уравнений в матричном виде для  $m \geq 6$  показателей преломления выглядит следующим образом:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{N}, \quad (\text{B.5})$$

$$\text{где } \mathbf{A}(m \times 6) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^4 & L_1 & L_1^2 & L_1^3 \\ 1 & \lambda_i^2 & \lambda_i^4 & L_i & L_i^2 & L_i^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_m^2 & \lambda_m^4 & L_m & L_m^2 & L_m^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}(6) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}(m) = \begin{pmatrix} n_{\lambda_1} \\ n_{\lambda_i} \\ \dots \\ n_{\lambda_m} \end{pmatrix},$$

$n_{\lambda_i}$  – известные показатели преломления для длин волн  $\lambda_i$ ,  $m$  – количество известных показателей преломления,  $\mu_1, \dots, \mu_6$  – параметры уравнения Герцбергера.

Для учета погрешности в известных показателях преломления необходимо умножить обе части системы уравнения на диагональную матрицу весов  $\mathbf{Q}$ , элементы которой обратно пропорциональны корню квадратному из погрешностей соответствующих показателей:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}, \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{Q}_{m \times m} = \begin{pmatrix} q_1 & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & q_m \end{pmatrix}, q_i = \frac{1}{\sqrt{\delta n_{\lambda_i}}}$$

Решая систему уравнений при помощи метода наименьших квадратов, получим:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{\Lambda}^T \cdot \mathbf{Q}^2 \cdot \mathbf{\Lambda})^{-1} \cdot \mathbf{\Lambda}^T \cdot \mathbf{Q}^2 \cdot \mathbf{N} \quad (\text{B.7})$$

В результате исследований [15] были определены погрешности показателя преломления и соответствующие веса  $q_i$  (таблица В.1).

*Таблица В.1. Весовые коэффициенты для различных длин волн*

Длины волн	Спектральные линии	Весовой коэффициент
365,01 нм, 404,66 нм	<i>i h</i>	1
434,05 – 656,28 нм	<i>G g F e d D C</i>	10
0,7 – 1,4 мкм		1
1,5 – 2,6 мкм		0,1

## Приложение Г. Свойства математических функций

### Преобразование графиков функций

Линейным преобразованием функции  $y = f(x)$  называется преобразование самой функции и/или ее аргумента к виду  $y = A \cdot f(a \cdot x + b) + B$ , а также преобразование, содержащее модуль аргумента и/или функции.

Рассмотрим типовые преобразования.

#### Симметричное отображение

График функции  $y = f(-x)$  получается симметричным отображением графика  $y = f(x)$  относительно оси  $OY$ .

График функции  $y = -f(x)$  получается симметричным отображением графика  $y = f(x)$  относительно оси  $OX$ .

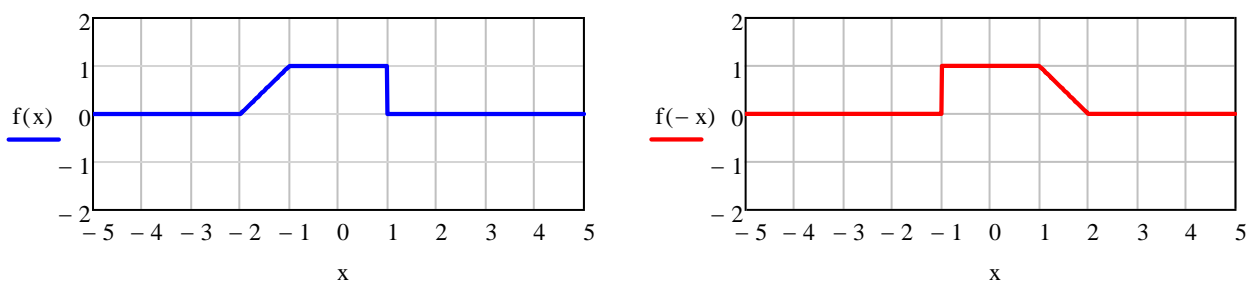


Рис.Г.1. Симметричное отображение функции относительно оси  $OY$

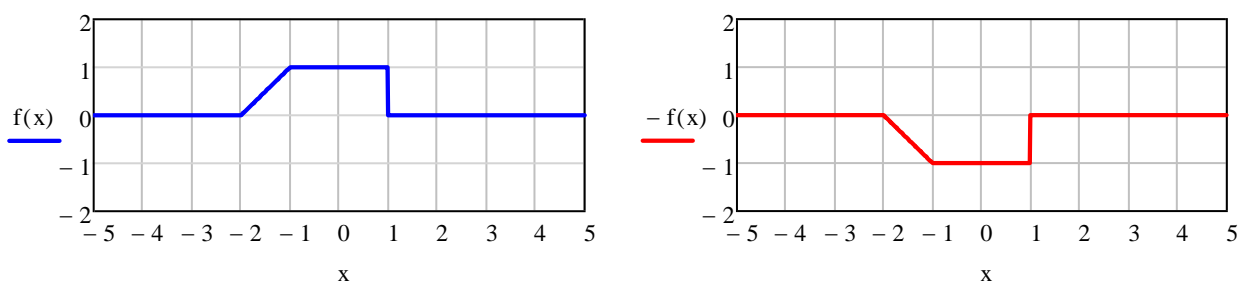


Рис.Г.2. Симметричное отображение функции относительно оси  $OX$

## Смещение

График функции  $y = f(x + b)$  получается параллельным переносом графика функции  $y = f(x)$  вправо вдоль оси  $OX$  на расстояние  $b$ , если  $b < 0$ , и в отрицательном направлении вдоль оси  $OX$ , если  $b > 0$ .

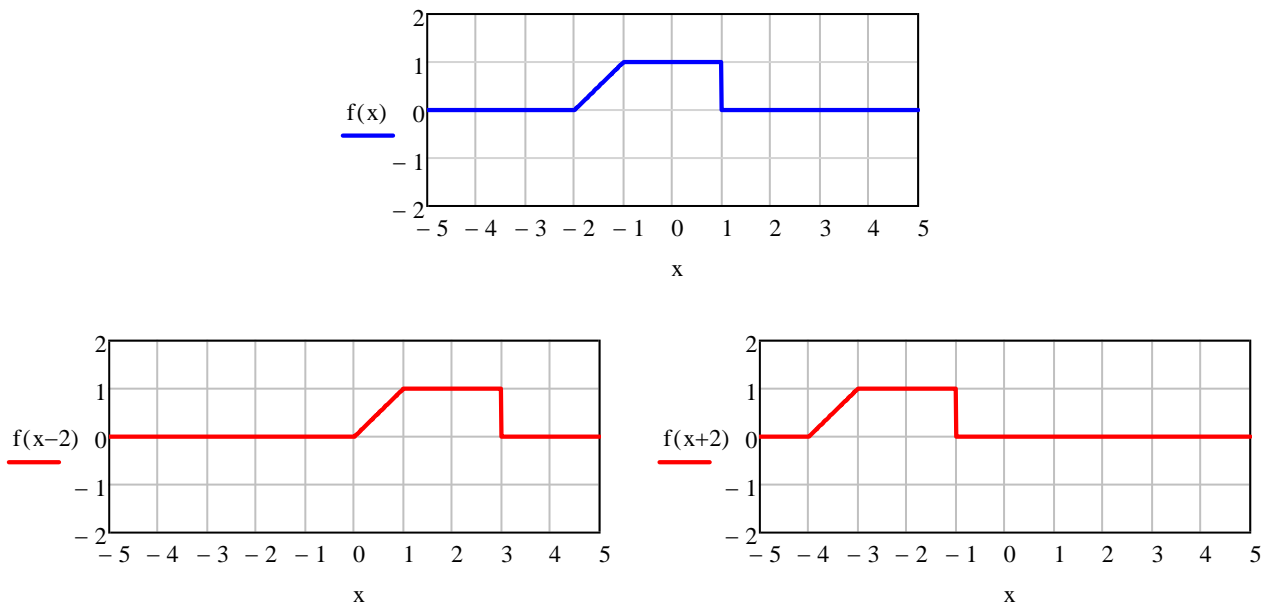


Рис.Г.3. Смещение функции вдоль оси  $OX$

График функции  $y = f(x) + b$  получается параллельным переносом графика функции  $y = f(x)$  вверх вдоль оси  $OY$  на расстояние  $b$ , если  $b < 0$ , и вниз вдоль оси  $OY$ , если  $b > 0$ .

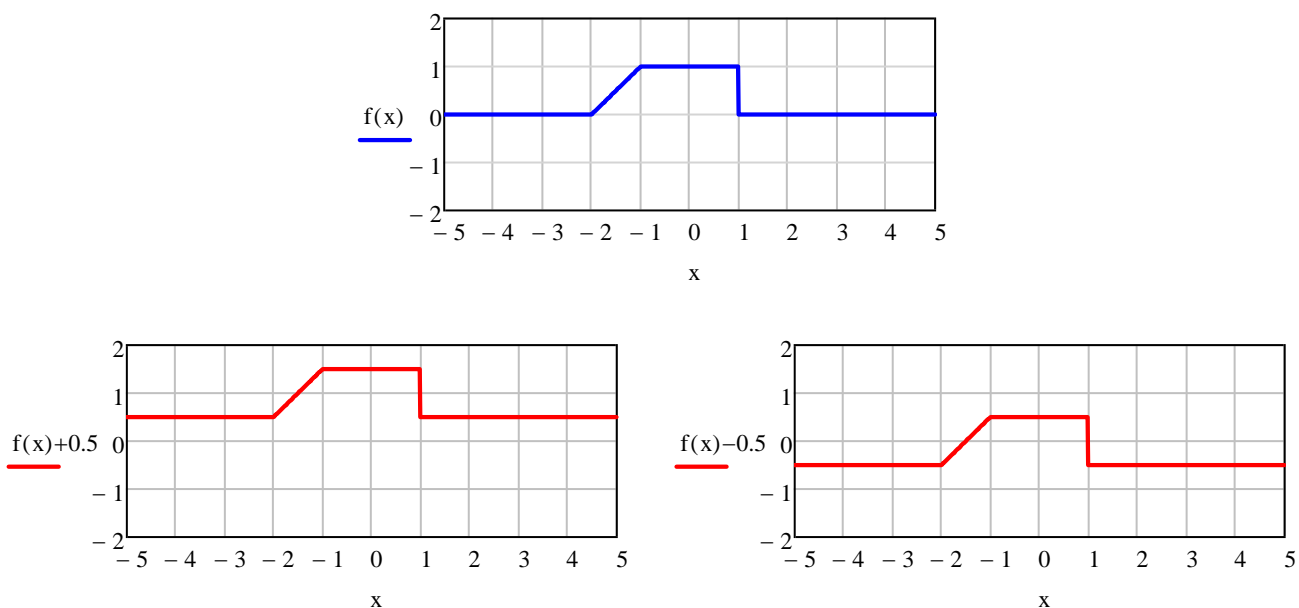


Рис.Г.4. Смещение функции вдоль оси  $OY$

## Масштабирование

График функции  $y = f(a \cdot x)$ , ( $a \neq 0$ ) получается сжатием графика  $y = f(x)$  вдоль оси  $OX$  к оси  $OY$  в  $a$  раз. График функции  $y = f(1/a \cdot x)$ , ( $a \neq 0$ ) получается растяжением графика  $y = f(x)$  вдоль оси  $OX$  к оси  $OY$  в  $a$  раз.

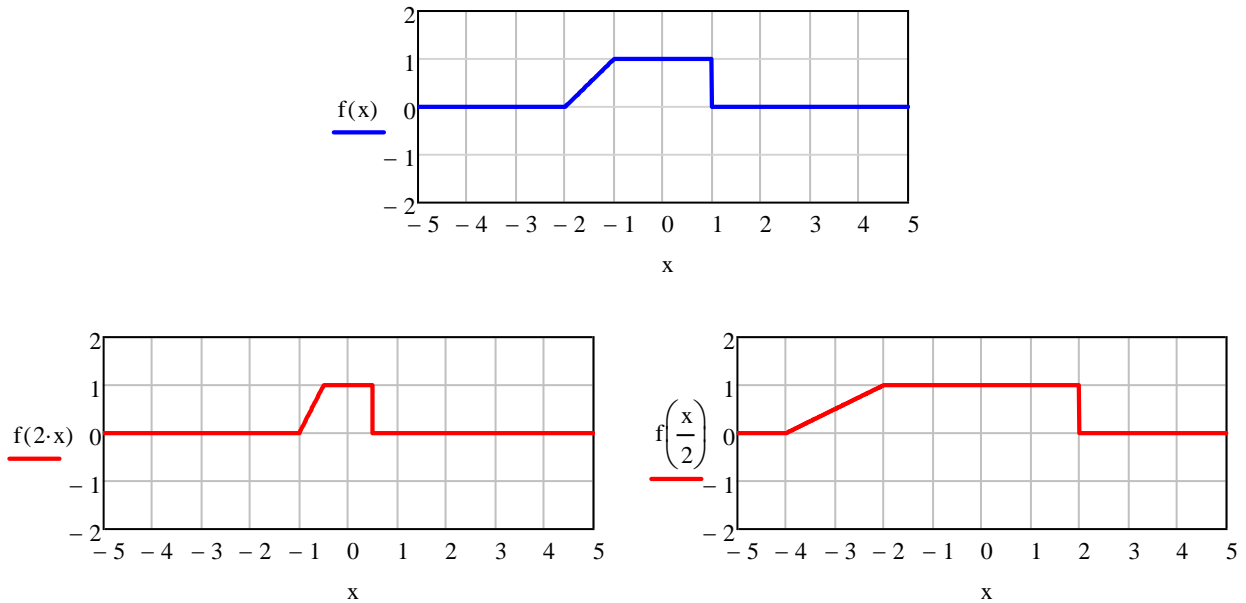


Рис.Г.5. Масштабирование функции вдоль оси  $OX$

График функции  $y = A \cdot f(x)$ , ( $A \neq 0$ ) получается растяжением графика  $y = f(x)$  вдоль оси  $OY$  от оси  $OX$  в  $A$  раз. График функции  $y = 1/A \cdot f(x)$ , ( $A \neq 0$ ) получается сжатием графика  $y = f(x)$  вдоль оси  $OY$  от оси  $OX$  в  $A$  раз.

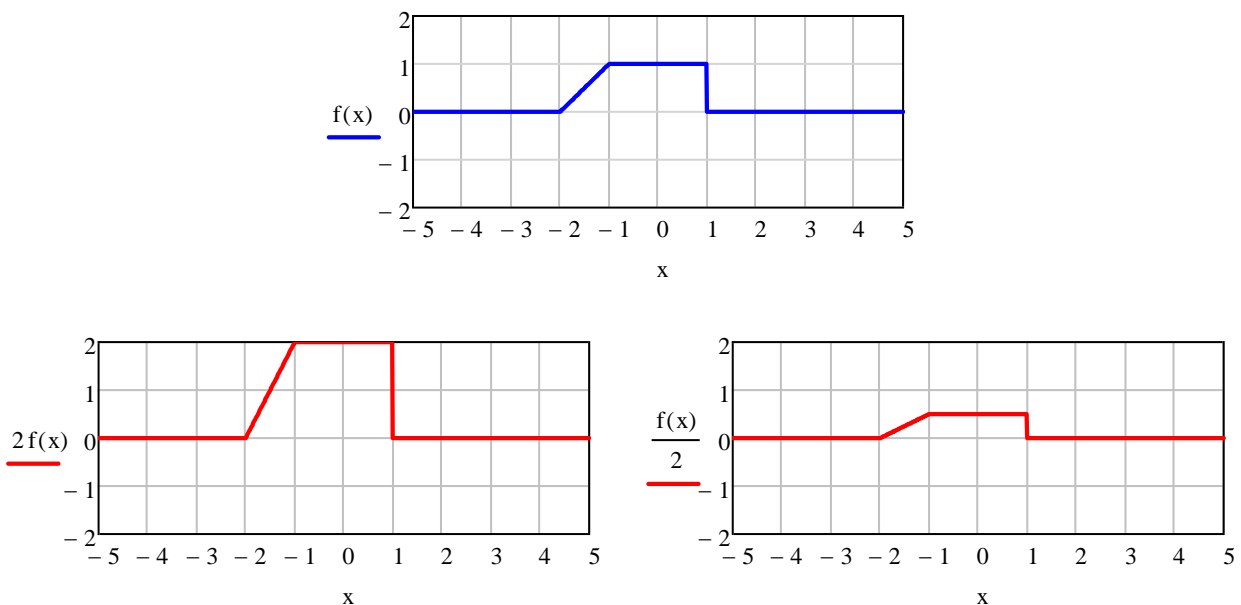


Рис.Г.6. Масштабирование функции вдоль оси  $OY$

## Отражение

График функции  $y = f(|x|)$  получается из графика функции  $y = f(x)$  симметричным отражением части графика функции  $y = f(x)$ , с отрицательным значением  $x < 0$  относительно оси ОУ вправо.

График функции  $y = |f(x)|$  получается симметричным отражением отрицательной части графика функции  $y = f(x)$  относительно оси ОХ на верхнюю полуплоскость.

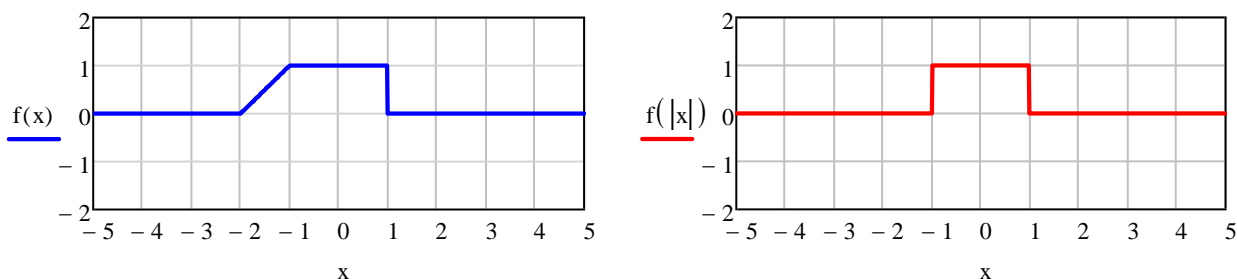


Рис.Г.5. Отражение функции относительно оси ОУ

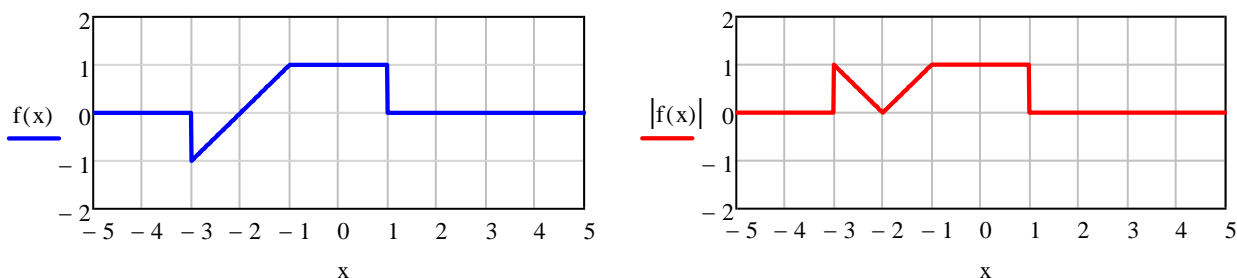


Рис.Г.6. Отражение функции относительно оси ОХ

## Последовательность преобразований

Если в функции присутствует несколько преобразований, последовательность преобразований аргумента происходит в “обратном” порядке по сравнению с обычными арифметическими действиями, то есть вначале происходит смещение, а потом масштабирование. Преобразование функции происходит в “правильном” порядке, в соответствии с последовательностью арифметических действий. Перед преобразованием графика функция приводится к виду  $y = f(a \cdot (x + b))$ .



Рассмотрим пример. Пусть дана некоторая функция  $y = f(x)$ . Требуется построить график функции  $y = 1.5 \cdot f(0.5 \cdot x + 1)$ . В таблице Г.1 приводится последовательность действий для построения.

Таблица Г.1. Последовательность действий преобразования графика функции

	Действие над графиком	График
1	Функция $y = f(x)$ .	
2	Выражение $y = 1.5 \cdot f(0.5 \cdot x + 1)$ приводим к виду $y = 1.5 \cdot f(0.5 \cdot (x + 2))$	
3	Смещение графика влево на 2	
4	Растяжение графика вдоль оси ОХ в 2 раза	
5	Растяжение графика вдоль оси ОУ в 1.5 раза	

## Свойства дельта-функции

Дельта-функция, или функция Дирака определяется следующим образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0; \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \quad (\text{Г.1})$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cdot dx = 1 \quad (\text{Г.2})$$

То есть, эта функция не равна нулю только в точке  $x = 0$ , где она обращается в бесконечность таким образом, чтобы её интеграл по любой окрестности  $x = 0$  был равен 1. Функция стремится к бесконечности в точке  $x = 0$ , что на графике обычно отображается в виде стрелки единичной высоты (рис.Г.7).

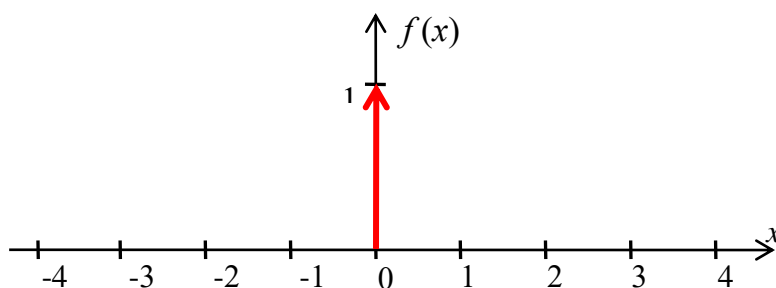


Рис.Г.7. Дельта-функция

Дельта-функция обладает несколькими интересными свойствами.

Произведение некоторой произвольной функции  $f(x)$  и смещенной на величину  $a$  дельта-функции  $\delta(x - a)$ , равно смещенной дельта-функции  $\delta(x - a)$ , умноженной на значение функции в точке  $x = a$ :

$$f(x) \cdot \delta(x - a) = f(a) \cdot \delta(x - a) \quad (\text{Г.3})$$

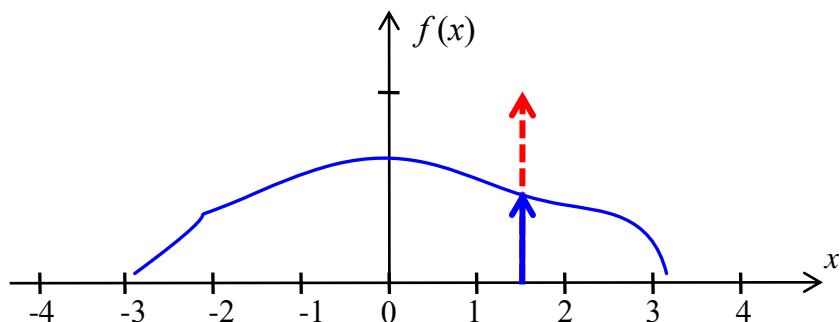


Рис.Г.8. Произведение дельта-функции и произвольной функции

Интеграл произведения некоторой произвольной функции  $f(x)$  и смещенной на величину  $a$  дельта-функции  $\delta(x - a)$ , равен значению функции в точке  $x = a$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - a) = f(a) \quad (\text{Г.4})$$

Свертка некоторой произвольной функции  $f(x)$  и смещенной на величину  $a$  дельта-функции  $\delta(x - a)$ , равна самой функции, смещенной на величину  $a$ :

$$f(x) \otimes \delta(x - a) = f(x - a) \quad (\text{Г.5})$$

### Свертка

Свертка двух функций определяется как интеграл:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot g(x' - x, y' - y) \cdot dx dy \quad (\text{Г.6})$$

Геометрический смысл свертки – функция площади пересечения графиков двух функций, в каждой точке смещения одной из функций от  $-\infty$  до  $+\infty$  (рис.Г.9).

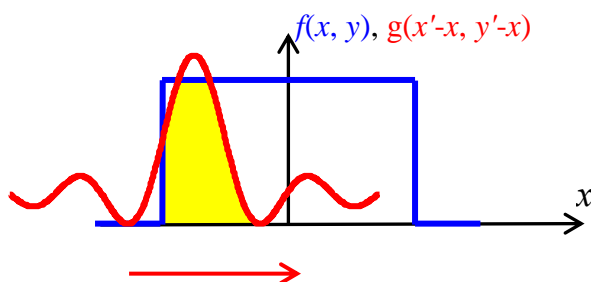


Рис.Г.9. Свертка

Свойства свертки:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) \equiv g(x, y) \otimes f(x, y) \quad (\Gamma.7)$$

$$f(x, y) \otimes (g(x, y) + h(x, y)) \equiv f(x, y) \otimes g(x, y) + f(x, y) \otimes h(x, y) \quad (\Gamma.8)$$

Свертка с некоторыми функциями:

$$f(x) \otimes \delta(x - a) = f(x - a) \quad (\Gamma.9)$$

$$f(x) \otimes \text{const} = \text{const} \quad (\Gamma.10)$$

### **Тригонометрические функции**

Основные свойства тригонометрических функций, которые могут пригодиться при выполнении заданий.

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (\Gamma.11)$$

Свойства четности:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha \quad (\Gamma.12)$$

Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (\Gamma.13)$$

Формула Эйлера:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \quad (\Gamma.14)$$

## Литература

1. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н.С.Бахвалов, А.В.Лапин, Е.В.Чижевков. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
3. Голуб Дж. Матричные вычисления / Дж.Голуб, Ч.Ван Лоан. – М.: Мир, 1993. – 548 с.
4. Домненко, В.М., Моделирование формирования оптического изображения. Учебное пособие. / В.М. Домненко, М.В. Бурсов, Т.В. Иванова. – СПб: НИУ ИТМО, 2011 – 141 с.
5. Зализняк В.Е. Основы научных вычислений: Введение в численные методы для физиков и инженеров / В.Е.Зализняк. – М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика: Институт компьютерных исследований, 2006. – 264 с.
6. Каталог оптических сред GlassBank [сайт]. (<http://glassbank.ifmo.ru>).
7. Каханер Д. Численные методы и программное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш – М.: Мир, 2001. – 576 с.
8. Колдаев В.Д. Численные методы и программирование / В.Д.Колдаев; под ред. проф. Л.Г.Гагариной. – М.: ИД "Форум": ИНФРА-М, 2008. – 335 с.
9. Основы оптики [Электронный учебник]. – СПб: НИУ ИТМО. ([http://aco.ifmo.ru/el\\_books/basics\\_optics/](http://aco.ifmo.ru/el_books/basics_optics/)).
10. Основы оптики. Конспект лекций. (второе издание) / Т.В.Иванова, Н.Б.Вознесенский, А.О.Вознесенская – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 156с.
11. Пирумов У.Г. Численные методы / У.Г.Пирумов. – М.: Дрофа, 2004. – 221 с.
12. Поршнева С.В. Численные методы на базе Mathcad / С.В.Поршнева, И.В.Беленкова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 450 с.
13. Прикладное программирование [Электронный учебник]. – СПб: НИУ ИТМО. ([http://aco.ifmo.ru/el\\_books/applied\\_programming/](http://aco.ifmo.ru/el_books/applied_programming/)).
14. Родионов С.А. Автоматизация проектирования оптических систем / С.А.Родионов. – Л.: Машиностроение, 1982. – 270 с.
15. Родионов С.А. Структура и параметры машинного каталога стекла / С.А.Родионов, В.Г.Резник – Опτικο-мех. Промышленность, 1973. – с.29-31
16. Турчак Л.И. Основы численных методов / Л.И.Турчак, П.В. Плотников – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 300 с.
17. Численные методы в оптике [Электронный учебник]. – СПб: НИУ ИТМО. ([http://aco.ifmo.ru/el\\_books/numerical\\_methods](http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods)).
18. BOOST library documentation [сайт]. (<http://www.boost.org>).
19. FFTW library documentation [сайт]. (<http://fftw.org>).

**Миссия университета** – генерация передовых знаний, внедрение инновационных разработок и подготовка элитных кадров, способных действовать в условиях быстро меняющегося мира и обеспечивать опережающее развитие науки, технологий и других областей для содействия решению актуальных задач.

---

### **КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ОПТИКИ**

Кафедра прикладной и компьютерной оптики - одна из крупнейших кафедр российских ВУЗов, занимающихся задачами современной оптической науки.

Кафедра возникла при слиянии двух кафедр оптического факультета: теории оптических приборов и кафедры оптических приборов и компьютерной оптики. Поэтому на кафедре учат специалистов, имеющих самое широкое представление об оптике в целом, от проектирования оптических систем самого разного назначения до компьютерной обработки изображений и интерферограмм.

Овладение такими разнообразными знаниями невозможно без практической работы с приборами, и кафедра имеет в своем составе несколько учебно-исследовательских лабораторий.

В лаборатории оптических измерений и контрольно-измерительных приборов студенты получают знания и навыки в области метрологии, учатся измерять характеристики оптических систем и параметры деталей и материалов.

Лаборатория микроскопов и медицинских оптических приборов знакомит с различными типами микроскопов (поляризационными, биологическими, металографическими), методами наблюдения микрообъектов и т.п., а также с приборами, применяемыми офтальмологами для диагностики зрения.

Лаборатория геодезических приборов позволяет получить начальные навыки работы с теодолитами, дальномерами и другими приборами, применяемыми в геодезии и картографии, узнать особенности проектирования различных их узлов и конструкции.

В лабораториях компьютерных средств контроля оптики и исследования качества оптического изображения занимаются проблемами контроля качества оптических поверхностей оптической системы в целом, а также компьютеризации и автоматизации этих процессов.

В учебном процессе используются научный потенциал и лабораторная база крупнейшего в России научного центра в области оптики - ВНИЦ

ГОИ им. С.И.Вавилова, ведущего оптического предприятия - ОАО "ЛОМО".

Достижения кафедры отмечены двумя Ленинскими премиями, пятью Государственными премиями, премией Совета Министров, премией французской Академии Наук. Кроме того, работы, выполненные на кафедре, отмечались многочисленными медалями и дипломами международных и российских выставок, медалями С.П.Королева, Ю.А.Гагарина, премиями Минвуза.

За период существования кафедры было подготовлено более 150 кандидатов наук, из них 30 иностранцев, а также 16 докторов наук. Большинство научных и производственных подразделений в области прикладной оптики в России, а также многие в США, Израиле и Китае возглавляют ученики нашей научной школы.

В настоящее время кафедра прикладной и компьютерной оптики факультета Лазерной и световой инженерии является одним из крупнейших подразделений Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики, ориентированным на выпуск высококвалифицированных специалистов в области оплотехники.

С информацией о кафедре можно ознакомиться на сайте: [aso.ifmo.ru](http://aso.ifmo.ru)

Иванова Татьяна Владимировна

## **Численные методы в оптике**

**Учебное пособие**

В авторской редакции

Редакционно-издательский отдел Университета ИТМО

Зав. РИО

Н.Ф. Гусарова

Подписано к печати

Заказ №

Тираж

Отпечатано на ризографе



Редакционно-издательский отдел  
Университета ИТМО  
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49